Cvičenia z geometrických algoritmov a ich zložitosti

(pracovná verzia)

zostavovateľ: Pavel Chalmovianský

Cvičenia riešené študentami z oblasti výpočtovej geometrie a zložitosti geometrických algoritmov.

Bratislava, 11. októbra 2012

KAPITOLA 1

Úvod

Cieľom tohoto dokumentu je zozbierať a publikovať riešenia cvičení z oblasti geometrických algoritmov a ich zložitosti.

Ku skúške treba splniť aspoň jednu z nasledujúcich požiadaviek:

- vyriešiť dostatok úloh počas semestra alebo
- napísať písomku na konci semestra.

Teraz bližšie vysvetlenie každej z možností.

Úlohy riešené počas semestrau musia byť zo štyroch oblastí – konvexné obaly a ich konštrukcie, proximita, geometrické vyhľadávanie a prieniky. Z každej oblasti aspoň jedna úloha.

Za vypracovanie jednej úlohy získate max. 100 bodov, pričom rozdelenie bodov je nasledujúce:

- správne riešenie úlohy max. 50 bodov (maximálny počet bodov je uvedený v zátvorke pri zadaní cvičenia), rozhoduje kvalita riešenia, jasnosť metódy a podania
- napísanie riešenia v elektronickej podobe(LaTeX) max. 30 bodov, rozhoduje koľko práce je na tom, aby sa to dalo publikovať, či daný text obsahuje aj nejaký ilustračný obrázok apod.
- ak ste vymysleli iné (zaujímavé) alebo lepšie riešenie ako Vaši predchodcovia (t.j. nejaké riešenie je už uverejnené v tejto zbierke) získate prémiu max. 20 bodov (lepšie znamená šikovnejšie, pochopiteľnejšie, kratšie, prehľadnejšie apod.); ak dané cvičenie ešte nebolo riešené, túto prémiu získavate pri správnom riešení automaticky vo výške 10 bodov
- prémiových 10 bodov môžete získať, ak si zadanie cvičenia nájdete sami na internete, v knihách apod., a žiadne podobné nie je v tejto zbierke a odsúhlasím ho

Riešenie ľubovolného cvičenia môžete iterovať (najviac 2x), pričom zakaždým dostanete spätnú väzbu v podobe návodov na pokračovanie. Rovnaké riešenia ocením známkou a vydelím počtom rovnakých riešení (aj iteratívne, ak by sa objavili nové).

Ku skúške potrebujete z každej oblasti vyriešený aspoň jeden príklad na 25 bodov a dokopy aspoň 200 bodov. Kto získa aspoň 350 bodov, nemusí na skúške riešiť príklady. Kto dosiahne 400 bodov, má zaručenú skúšku. O známke sa dohodneme podľa kvality a množstva príkladov vyriešených počas semestra.

Ciele elektronického spracovania sú dva. Jednak sa naučíte písať texty, ktoré by mali byť čitateľné pre iných a jednak sa naučíte, ako má formálne taký text vyzerať a čo má obsahovať.

Ako pomôcku som vytvoril súbor `priklad.tar.bz2`, v ktorom nájdete základnú kostru texovského súboru k napísaniu riešenia úlohy. Obsahuje aj príklad uvedený nižšie.

Termíny na odovzdanie úloh sú:

- úloha č. 1: 11. 11. 2012,
- úloha č. 2: 2. 12. 2012
- úloha č. 3: 23. 12. 2012,
- úloha č. 4: 6. 1. 2013.

Cvičenie 1.1 (20 bodov). *Nech* $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n \in \mathbb{E}^2$ *sú body. Zostrojte konvexný obal tejto množiny bodov tak, aby ste dosiahli optimálnu zložitosť algoritmu.*

Tento príklad by som obodoval nasledovne: je správne vyriešený a pomerne zrozumiteľne napísaný. Časť o začiatku algoritmu by mohla byť opísaná jasnejšie alebo ilustrovaná obrázkom. Postup by mohol byť dokumentovaný nejakým formálnejším algoritmom v pseudokóde. Za riešenie je 15 bodov, za napísanie (bez obrázka a formálneho algoritmu) je 15 bodov. Ďalších 20 bodov je za to, že ide o nový príklad. Dokopy teda 50 bodov.

Alternatívne si môžete zvoliť písomku z príkladov z tejto zbierky na konci semestra, ktora bude obsahovať 4 úlohy, po jednej z každej tematickej oblasti. Na úspešné absolvovanie vyžadujem 50% bodov. **Body zo semestra sa v tomto prípade nepočítajú.**

Cvičenia v nasledujúcich častiach pochádzajú z rôznych zdrojov. časť z nich je z kníh ako napr. [**PS85**],[**dBvKOS00**], [**BY98**], časť je z internetu napr. [**Eri**] z a časť z nich ma napadla pri mojej práci. Za opravu mnohých chýb v texte vďačím Viktorovi Majorovi.

KAPITOLA 2

Štartovacie úlohy

CVIČENIE 2.1 (20 bodov). *Nájdite algoritmus, ktorý optimálne určí v množine n bodov z euklidovskej roviny, či sa medzi nimi nachádzajú tri kolineárne body.*

CVIČENIE 2.2 (15 bodov). *Opíšte čo najefektívnejšiu procedúru na zistenie prieniku dvoch priamok v $\mathbb{E}^2$. Ošetrite všetky prípady.*

CVIČENIE 2.3 (15 bodov). *Opíšte čo najefektívnejšiu procedúru na zistenie veľkosti orientovaného uhla dvoch priamok $\mathbb{E}^2$ daných parametricky. Ošetrite všetky prípady.*

CVIČENIE 2.4 (35 bodov). *V ľubovoľnom trojuholníku* **abc** *nájdite bod* **p** *taký, že* $|\mathbf{ap}| + |\mathbf{bp}| + |\mathbf{cp}|$ *je najmenšie.*

CVIČENIE 2.5 (30 bodov). *Opíšte dátovú štruktúru „spájateľná fronta" a operácie vkladania, vyberania, spájania a rozdeľovania na nej pomocou vhodne zvolenej stromovej dátovej štruktúry.*

KAPITOLA 3

Konvexné obaly

CVIČENIE 3.1 (30 bodov). *Je daná množina obsahujúca* n *bodov v rovine. Zostrojte jednoduchý mnohouholník, ktorého vrcholy sú body danej množiny. Ukážte, že* $\Omega(n \log n)$ *je dolná hranica časovej zložitosti.*

CVIČENIE 3.2 (20 bodov). *Dokážte, že mnohouholník* Q *s najmenším obvodom obsahujúcim neprázdnu konečnú množinu bodov* P *je konvexný. Ukážte, že každá konvexná množina obsahujúca* P *obsahuje aj mnohouholník* Q.

CVIČENIE 3.3 (30 bodov). *Ukážte, že dva disjunktné konvexné mnohouholníky majú práve štyri spoločné oporné priamky.*

CVIČENIE 3.4 (30 bodov). *V rovine sú dané dva disjunktné konvexné mnohouholníky* P_1, P_2. *Koľko môžu mať* P_1 *a* P_2 *spoločných oporných priamok? Nájdite oporné polroviny algoritmom založeným výlučne na uhloch medzi hranami a vodorovnými priamkami idúcimi cez vrcholy.*

CVIČENIE 3.5 (20 bodov). *Daný je bod* p *a vrchol* v *konvexného mnohouholníka* P. *Načrtnite algoritmus klasifikácie vrchola* v *vzhľadom na* $\overline{pv}$ *(konkávny, oporný, reflexný).*

CVIČENIE 3.6 (50 bodov). *Nech* S *je množina obsahujúca* n *bodov s celočíselnými súradnicami v rovine. Súradnice sú dané v rozmedzí* 1 *a* n^d, *kde* d *je konštanta. Ukážte, že konvexný obal* S *sa dá nájsť v lineárnom čase.*

CVIČENIE 3.7 (50 bodov). *Nech* S *je množina obsahujúca* n *bodov s celočíselnými súradnicami v rovine. Súradnice sú dané v rozmedzí* 1 *a* m. *Nájdite algoritmus na zostrojenie konvexného obalu* S *v čase* $\mathcal{O}(n+m)$.

CVIČENIE 3.8 (25 bodov). *Popíšte inkrementálny (on line) algoritmus na vytvorenie konvexného obalu* n*-prvkovej množiny bodov v rovine a nájdite jeho zložitosť.*

CVIČENIE 3.9 (15 bodov). *Nech* S *je množina obsahujúca* n *úsečiek v rovine. Dokážte, že konvexný obal* S *je totožný s konvexným obalom* $2n$ *koncových bodov úsečiek z množiny* S.

CVIČENIE 3.10 (30 bodov). *Nech* S *je množina bodov a* a, b *sú dva body z doplnku* S *také, že* a *leží vľavo od* S *a* b *leží vpravo od* S. *Zostavte algoritmus, ktorý nájde najkratšiu cestu z* a *do* b *idúcu popod* S.

CVIČENIE 3.11 (15 bodov). *Nájdite množinu bodov v rovine, na ktorej algoritmus QuickHull dosiahne hornú hranicu svojej časovej zložitosti.*

CVIČENIE 3.12 (30 bodov). *Zostavte algoritmus konštrukcie konvexného obalu monotónneho mnohouholníka (vzhľadom na vertikálnu os), ktorého zložitosť je lineárna.*

CVIČENIE 3.13 (40 bodov). *Mnohouholník sa nazýva ortogonálne konvexný, ak prienik ľubovolnej horizontálnej(vertikálnej) priamky je najviac jeden súvislý komponent. Charakterizujte ortogonálne konvexné mnohouholníky a pokúste sa zostrojiť algoritmus na otestovanie daného mnohouholníka.*

CVIČENIE 3.14 (50 bodov). *Nech P je axiálny mnohouholník(t. j. jeho strany sú rovnobežné s osami). Ortogonálny konvexný obal mnohouholníka P tvorí najmenší(v zmysle inklúzie) ortogonálne konvexný mnohouholník obsahujúci P. Zostavte algoritmus na výpočet ortogonálneho konvexného obalu daného axiálneho mnohouholníka.*

CVIČENIE 3.15 (50 bodov). *Predpokladajme, že množina n bodov $P \subseteq \mathbb{E}^2$ je taká, že náhodne vybraná podmnožina veľkosti r obsahuje $\mathcal{O}(r^\alpha)$ vrcholov konvexného obalu pre nejaké $\alpha < 1$. Potom vieme zostrojiť algoritmus konštrukcie konvexného obalu bežiaci v čase $\mathcal{O}(n)$.*

CVIČENIE 3.16 (20 bodov). *Nech $Q \subset \mathbb{E}^3$ je jednoduchý mnohosten(uzavretá podmnožina $\mathbb{E}^3$ homeomorfná guli, ktorej hranicou je zjednotenie konečného počtu mnohouholníkov) s n vrcholmi. Opíšte algoritmus zložitosti $\mathcal{O}(n)$ na testovanie, či daný bod je z vnútra takéhoto mnohostena.*

CVIČENIE 3.17 (45 bodov). *Nech $P, Q \subset \mathbb{E}^2$ sú jednoduché mnohouholníky také, že $\operatorname{int} P \cap \operatorname{int} Q = \emptyset$, Q je konvexný a $Q \subset \operatorname{conv}(P)$. Nájdite kritérium, či existuje taký spojitý jednoparametrický systém $\phi : [0,1] \to \mathbb{E}^2$ zhodností mnohouholníka Q (pohyb mnohouholníka Q), že*

- $\phi(0) = \mathrm{id}_{\mathbb{E}^2}$,
- $\operatorname{int} \phi(t)(Q) \cap \operatorname{int} P = \emptyset$, $t \in [0,1]$,
- $\operatorname{int} \phi(1)(Q) \cap \operatorname{int} \operatorname{conv}(P) = \emptyset$.

Chceme zistiť, či sa dá konvexný mnohouholník Q „vyvliecť" z mnohouholníka P.

CVIČENIE 3.18 (30 bodov). *Nech $K \subseteq \mathbb{E}^d$ je d-rozmerný konvexný mnohosten a zobrazenie $\phi \colon \mathbb{E}^d \to K$ také, že $\phi(\mathbf{x}) = \arg\min_{\mathbf{y} \in K} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$. Ukážte, že funkcia ϕ je dobre definovaná a spojitá.*

CVIČENIE 3.19 (50 bodov). *Nech $K \subseteq \mathbb{E}^d$ je d-rozmerný konvexný mnohosten a zobrazenie $\phi \colon \mathbb{E}^d \to K$ také, že $\phi(\mathbf{x}) = \arg\min_{\mathbf{y} \in K} \|\mathbf{x} -$

$\mathbf{y}\|$. *Ukážte, že zobrazenie* ϕ *zobrazuje hranicu guľovej nadplochy obaľujúcej* K *na hranicu* ∂K. *Predpokladajte, že zobrazenie* ϕ *je spojité (pozri cvičenie 3.18).*

Cvičenie 3.20 (50 bodov). *Odhadnite zhora počet* k*-stien* d*-rozmerného konvexného mnohostena s* n *vrcholmi pre* $-1 \leq k \leq d$.

Cvičenie 3.21 (15 bodov). *Majme konečnú neprázdnu množinu bodov* Q. *Dokážte, že dva od seba najviac vzdialené body sú vrcholmi* $\mathrm{conv}(Q)$.

Cvičenie 3.22. *Dokážte, že bod* P *nie je extremálnym bodom konvexnej množiny* $C \subset \mathbb{E}^2$ *s neprázdnym vnútrom práve vtedy, ak leží v nejakom trojuholníku s vrcholmi ležiacimi v* C, *ale sám nie je vrcholom tohto trojuholníka.*

Cvičenie 3.23 (35 bodov). *Napíšte podrobne procedúru vytvárania horného konvexného obalu pre algoritmus udržiavania konvexného obalu v* $\mathbb{E}^2$. *Nezabudnite na vyvažovanie stromu. Ilustrujte na príklade.*

Cvičenie 3.24 (30 bodov). *Napíšte podrobne procedúru inkrementálneho vytvárania konvexného obalu v* $\mathbb{E}^2$, *ktorý je optimálny.*

Cvičenie 3.25 (30 bodov). *Napíšte podrobne procedúru inkrementálneho vytvárania konvexného obalu v* $\mathbb{E}^3$.

KAPITOLA 4

Proximita

CVIČENIE 4.1 (45 bodov). *Nech A a B sú množiny bodov v rovine, každá má n prvkov. Nájdite dva najbližšie body tak, že jeden je z A a druhý z B. Ukážte, že tento problém vyžaduje aspoň $\Omega(n \log n)$ operácií. Pouvažujte, či sa niečo zmení v prípade, ak A a B sú lineárne separovateľné.*

CVIČENIE 4.2 (30 bodov). *Nech A a B sú dve množiny bodov v rovine. Použite Voronoiov diagram na zistenie hodnoty*

$$\min_{a \in A} \min_{b \in B} \operatorname{dist}(a, b)$$

v čase $\mathcal{O}(n \log n)$, kde $n = |A| + |B|$.

CVIČENIE 4.3 (30 bodov). *Popíšte algoritmus na trianguláciu ľubovoľného n-uholníka, tak aby jeho zložitosť bola $\mathcal{O}(n \log n)$.*

CVIČENIE 4.4 (40 bodov). *Popíšte algoritmus vyhľadania najbližšej dvojice bodov v rovine metódou delenia roviny a odhadnite jeho zložitosť.*

CVIČENIE 4.5 (25 bodov). *Dokážte, alebo vyvráťte tvrdenie: „hrana u,v patrí do Delunayovej triangulácie množiny M práve vtedy, ak existuje kruh, ktorý okrem bodov u,v neobsahuje žiadne iné body množiny M". Uvažujte ako je to v prípade, keď nepripúšťame kocirkulárne štvorice bodov v množine generátorov.*

CVIČENIE 4.6 (50 bodov). *Dokážte, alebo vyvráťte tvrdenie: "Na stráženie ľubovoľného n-uholníka stačí $\frac{n}{3}$ strážcov."*

CVIČENIE 4.7 (35 bodov). *Popíšte transformáciu problému nájdenia Delunayovej triangulácie na problém nájdenia konvexného obalu v 3D, a zdôvodnite, prečo funguje.*

CVIČENIE 4.8 (20 bodov). *Opíšte algoritmus na vyhľadanie Voronoiovho diagramu pre n bodov v rovine, uveďte jeho pamäťovú a časovú náročnosť.*

CVIČENIE 4.9 (35 bodov). *Opíšte transformáciu problému nájdenia Voronoiovho diagramu v rovine na problém vyhľadania konvexného obalu v 3D.*

CVIČENIE 4.10 (10 bodov). *Ukážte, že triangulácia n bodov v rovine vyžaduje asymptoticky čas najmenej $\mathcal{O}(n \log n)$.*

CVIČENIE 4.11 (10 bodov). *Ukážte, že prienik dvoch rôznych rotačných kužeľov s rovnobežnými osami, vrcholmi ležiacimi v jednej rovine kolmej na osi rotácie a rovnakými vrcholovými uhlami je hyperbola.*

CVIČENIE 4.12 (25 bodov). *Nech* $P = \{\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n\} \subseteq \mathbb{E}^2$ *má* n *prvkov. Dokážte, že pri transformácii roviny transformáciou danou predpisom* $\mathbf{x} = (x_1 + d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_i), x_2)$*, kde* $\mathbf{x} \in V(\mathbf{p}_i)$*,*

(1) *je bod s minimálnou súradnicou* x_1 *v transformovanom* $V(\mathbf{p}_i)$ *práve generátor* $\mathbf{p}_i$*,*
(2) *je obrazom osi dvoch susedných bodov z* $\mathcal{V}(P)$ *buď priamka, polpriamka alebo časť hyperboly.*

CVIČENIE 4.13 (25 bodov). *V rovine je daných* n *bodov a ich Voronoiov diagram v dátovej štruktúre DCEL. Popíšte algoritmus na vyhľadanie minimálnej euklidovskej kostry a odhadnite jeho zložitosť*

CVIČENIE 4.14 (10 bodov). *Dokážte, že pre ľubovoľné* $n > 3$ *existuje množina* n *bodov v rovine taká, že aspoň jedna oblasť Voronoiovho diagramu má* $n - 1$ *vrcholov.*

CVIČENIE 4.15 (30 bodov). *Dokážte, že* n *bodov v rovine sa dá triangulovať exponenciálne veľa spôsobmi.*

CVIČENIE 4.16. *Nech* $P = \{p_1, \ldots, p_n\} \subset \mathbb{E}^2$ *má* n *prvkov. Dokážte, že pri transformácii roviny transformáciou danou predpisom* $x = (x_1 + d(x, p_i), x_2)$*, kde* $x \in V(p_i)$*,*

- *(1) je bod s minimálnou súradnicou* x_1 *v transformovanom* $V(p_i)$ *práve generátor* p_i*,*
- *(2) je obrazom osi dvoch susedných bodov z* $V(P)$ *bud priamka, polpriamka alebo časť hyperboly.*

CVIČENIE 4.17 (10 bodov). *Opíšte Voronoiov diagram a Delaunayovu trianguláciu pre pravidelný* n*-uholník.*

CVIČENIE 4.18 (30 bodov). *Opíšte Voronoiov diagram a Delaunayovu trianguláciu pre konvexný* n*-uholník.*

CVIČENIE 4.19 (50 bodov). *Opíšte Voronoiov diagram a Delaunayovu trianguláciu vnútri* n*-uholníka, ktorý má len zvislé a vodorovné hrany, pričom prienik ľubovolnej zvislej resp. vodorovnej priamky s týmto mnohouholníkom má najviac jeden komponent súvislosti (tzv.* ortogonálne konvexný mnohouholník*).*

CVIČENIE 4.20 (40 bodov). *Analyzujte, čo je množina bodov rovnako vzdialených od pevne daného bodu a úsečky v* $\mathbb{E}^2$.

CVIČENIE 4.21 (50 bodov). *Analyzujte, čo je množina bodov rovnako vzdialených od dvoch úsečiek v* $\mathbb{E}^2$.

CVIČENIE 4.22 (50 bodov). *Analyzujte, čo je množina bodov v* $\mathbb{E}^2$*, ktoré spĺňajú rovnicu*

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|^2 - a_{\mathbf{p}}^2 = \|\mathbf{x}-\mathbf{q}\|^2 - a_{\mathbf{q}}^2,$$

kde $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{E}^2$ *sú ľubovoľné, pevne zvolené,* $a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}$*. Dajte výsledku geometrickú interpretáciu.*

CVIČENIE 4.23 (50 bodov). *Ukážte, že platia inklúzie*

$$CP \subset EMST \subset RNG \subset GG \subset DT.$$

CVIČENIE 4.24 (30 bodov). *Dokážte, že obojsmerné hrany grafu* ANN *sa nachádzajú v* $EMST$.

CVIČENIE 4.25 (50 bodov). *Nech* $P = \{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\} \subset \mathbb{E}^2$, $n \in \mathbb{N}$. *Nech* $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n-1$. *Pre* $Q \subset P$, $Q = \{\mathbf{p}_{i_1}, \dots, \mathbf{p}_{i_k}\}$ *označme* $\bar{Q} = P - Q$ *a definujme* $V(Q) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{E}^2 : \|\mathbf{x}-\mathbf{p}_i\| \leq \|\mathbf{x}-\mathbf{p}_j\| \quad \text{pre všetky} \quad \mathbf{p}_i \in Q, \mathbf{p}_j \in \bar{Q}\}$. *Opíšte množinu* $V(Q)$. *Nájdite príklad, keď je pre nejaké* Q *množina* $V(Q)$ *prázdna. Ak to nie je možné, zdôvodnite prečo. Množiny* $\{V(Q), Q \subset P\}$ *tvoria tzv.* Voronoiov diagram rádu k. *Nakreslite ho pre niekoľko bodov.*

CVIČENIE 4.26 (50 bodov). *Nech* $P = \{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\} \subset \mathbb{E}^2$, $n \in \mathbb{N}$ *a nech* $W = \{w_1, \dots, w_n\} \subset \mathbb{R}$. Mocnosťou bodu $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^2$ *ku kružnici so stredom* $\mathbf{s} \in \mathbb{E}^2$ *a polomerom* $r \in \mathbb{R}_+$ *nazývame číslo* $p(\mathbf{x}, \mathbf{s}, r) = \|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|^2 - r^2$. *Nájdite, čo je množinou* $V(\mathbf{p}_i) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{E}^2 : p(\mathbf{x}, \mathbf{p}_i, w_i) \leq p(\mathbf{x}, \mathbf{p}_j, w_j), \quad \text{pre všetky} \quad j \neq i\}$. *Množiny* $\{V(\mathbf{p}_i), \mathbf{p}_i \in P\}$ *tvoria tzv.* mocnostný Voronoiov diagram. *Nakreslite ho pre niekoľko bodov.*

CVIČENIE 4.27 (50 bodov). *Nech* $P = \{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\} \subset \mathbb{E}^2$, $n \in \mathbb{N}$ *a nech* $W = \{w_1, \dots, w_n\} \subset \mathbb{R}$. Aditívne váženou vzdialenosťou bodu $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^2$ *ku bodu* $\mathbf{s} \in \mathbb{E}^2$ *váhou* $w \in \mathbb{R}$ *nazývame nazývame číslo* $p(\mathbf{x}, \mathbf{s}, w) = \|\mathbf{x}-\mathbf{s}\| - w$. *Nájdite, čo je množinou* $V(\mathbf{p}_i) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{E}^2 : p(\mathbf{x}, \mathbf{p}_i, w_i) \leq p(\mathbf{x}, \mathbf{p}_j, w_j), \quad \text{pre všetky} \quad j \neq i\}$. *Množiny* $\{V(\mathbf{p}_i), \mathbf{p}_i \in P\}$ *tvoria tzv.* aditívne vážený Voronoiov diagram. *Nakreslite ho pre niekoľko bodov.*

CVIČENIE 4.28 (50 bodov). *Nech* $P = \{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\} \subset \mathbb{E}^2$, $n \in \mathbb{N}$ *a nech* $W = \{w_1, \dots, w_n\} \subset \mathbb{R}_+$. Multiplikatívne váženou vzdialenosťou bodu $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^2$ *ku bodu* $\mathbf{s} \in \mathbb{E}^2$ *váhou* $w \in \mathbb{R}_+$ *nazývame nazývame číslo* $p(\mathbf{x}, \mathbf{s}, w) = w\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|$. *Nájdite, čo je množinou* $V(\mathbf{p}_i) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{E}^2 : p(\mathbf{x}, \mathbf{p}_i, w_i) \leq p(\mathbf{x}, \mathbf{p}_j, w_j), \quad \text{pre všetky} \quad j \neq i\}$. *Množiny* $\{V(\mathbf{p}_i), \mathbf{p}_i \in P\}$ *tvoria tzv.* multiplikatívne vážený Voronoiov diagram. *Nakreslite ho pre niekoľko bodov.*

CVIČENIE 4.29 (25 bodov). *Klasifikujte prienik dvoch rôznych rotačných kužeľov s rovnobežnými osami rotácie a rovnakými vrcholovými uhlami.*

CVIČENIE 4.30 (50 bodov). *Analyzujte, čo je množina bodov v* $\mathbb{E}^2$*, ktoré spĺňajú rovnicu*

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|+a_{\mathbf{p}}=\|\mathbf{x}-\mathbf{q}\|+a_{\mathbf{q}},$$

kde $\mathbf{p},\mathbf{q}\in\mathbb{E}^2$ *sú ľubovoľné, pevne zvolené,* $a_{\mathbf{p}},a_{\mathbf{q}}\in\mathbb{R}$.

CVIČENIE 4.31. *Ortogonálny mnohouholník je taký, ktorého strany sú buď zvislé alebo horizontálne. Nech* P *je ortogonálny mnohouholník s* n *vrcholmi. Dokážte, že* $\lfloor\frac{x}{4}\rfloor$ *kamier je niekedy nutný, ale vždy postačujúci počet na jeho stráženie.*

CVIČENIE 4.32 (10 bodov). *Zistite, či sa Voronoiov diagram dá pre ľubovoľnú neprázdnu množinu generátorov opísať rovinným grafom. Ak sa pre nejaké množiny nedá, charakterizujte ich.*

CVIČENIE 4.33 (15 bodov). *Zdôvodnite podrobne, prečo generátor ohraničeného* $V(\mathbf{p}_i)$ *neleží na* $\partial\,\mathrm{conv}(P)$.

CVIČENIE 4.34 (10 bodov). *Ukáž, že Voronoiov diagram* n *prvkovej množiny* P *má najviac* $2n-5$ *vrcholov a najviac* $3n-6$ *hrán.*

CVIČENIE 4.35 (10 bodov). *Nájdi mnohouholník pre ktorý existuje rovnostranná triangulácia.*

KAPITOLA 5

Geometrické vyhľadávanie

CVIČENIE 5.1 (20 bodov). *Nech S je množina n trojuholníkov v $\mathbb{E}^2$, ktorých hranice sú po dvoch disjunktné. Nech P je množina n bodov v $\mathbb{E}^2$. Navrhnite algoritmus, ktorý v čase $\mathcal{O}(n \log n)$ nájde všetky bod P, ktoré neležia v žiadnom z trojuholníkov z S.*

CVIČENIE 5.2 (20 bodov). *V rovine je daných n bodov. Popíšte algoritmus, ktorý zistí počet bodov vnútri zvoleného obdĺžnika, ktorého strany sú rovnobežné so súradnicovými osami. Pri algoritme je povolené predspracovanie tak, aby pri viacnásobných požiadavkách bola doba vyhľadania menšia ako $\mathcal{O}(n)$.*

CVIČENIE 5.3 (30 bodov). *V rovine je daný rovinný graf s n vrcholmi popíšte algoritmus, ktorý zistí pre zadaný bod, do ktorej z oblastí grafu patrí. Uveďte zložitosť predspracovania, zložitosť vyhľadania ako aj pamäťovú náročnosť algoritmu.*

CVIČENIE 5.4 (10 bodov). *Zistite, či je mnohouholník monotónny vzhľadom na daný smer.*

CVIČENIE 5.5 (30 bodov). *Opíšte algoritmus triangulácie konvexného mnohouholníka a hviezdicového mnohouholníka.*

CVIČENIE 5.6 (30 bodov). *Nájdite algoritmus triangulácie jednoduchého mnohouholníka.*

CVIČENIE 5.7 (35 bodov). *Nájdite algoritmus triangulácie mnohouholníka (nie nutne jednoduchého).*

CVIČENIE 5.8 (25 bodov). *Nájdite algoritmus rozkladu mnohouholníka na monotónne mnohouholníky vzhľadom na daný smer.*

CVIČENIE 5.9 (20 bodov). *Dokážte alebo vyvráťte tvrdenie: Duálny graf triangulácie monotónneho mnohouholníka je reťazec (t.j. graf, ktorého každý vrchol má stupeň nanajvýš 2).*

CVIČENIE 5.10 (25 bodov). *Opíšte algoritmus, ktorý nájde pre daný jednoduchý mnohouholník M uhlopriečku, ktorá ho rozdelí na mnohouholníky M_1 a M_2 s nanajvýš $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor + 2$ vrcholmi.*

CVIČENIE 5.11 (30 bodov). *Nech S je množina n úsečiek v euklidovskej rovine s jedným koncovými bodom na priamke $y = 1$ a druhým koncovým bodom na priamke $y = 0$. Tieto úsečky rozdeľujú pás*

$[-\infty,\infty]\times[0,1]$ *na* $n+1$ *oblastí. Opíšte algoritmus vybudovania binárneho vyhľadávacieho stromu na týchto úsečkách z* S *tak, že oblasť obsahujúca daný bod sa dá určiť v čase* $\mathcal{O}(\log n)$.

CVIČENIE 5.12 (30 bodov). *Nech* S *je teselácia roviny zložitosti* n *a nech* P *je množina obsahujúca* m *bodov. Navrhnite zametací algoritmus, ktorý pre každý bod z* P *nájde región z* S*, do ktorého tento bod patrí. Pokúste sa nájsť algoritmus s časovou zložitosťou* $\mathcal{O}((n+m)\log(n+m))$.

CVIČENIE 5.13 (40 bodov). *Máme* n *rovnobežných železničných tratí s* n *vlakmi, ktoré jazdia konštantnými rýchlosťami* $v_1,\ldots,v_n$. *V čase* $t=0$ *sú vlaky v pozíciách* $k_1,\ldots,k_n$. *Navrhnite dátovú štruktúru na nasledujúcu úlohu: Ktorý vlak je v danom čase* $t>0$ *na prvom mieste na trati? Analyzujte čas predspracovania, pamäťovú zložitosť a čas získania výsledku.*

CVIČENIE 5.14 (10 bodov). *Môže byť mnohouholník monotónny len vzhľadom na priamky s jedným smerom? Ilustrujte svoju odpoveď obrázkom.*

CVIČENIE 5.15 (15 bodov). *Opíšte algoritmus vkladania a vyberania prvku z* kD*-stromu.*

CVIČENIE 5.16 (10 bodov). *Nájdite spôsob reprezentácie axiálnych obdĺžnikov z* $\mathbb{E}^2$ *vo viacrozmernom priestore. Aký najmenší priestor (v zmysle dimenzie) treba na jednoznačnú reprezentáciu?*

CVIČENIE 5.17 (50 bodov). *Nech* S *je množina* n *axiálnych obdĺžnikov v rovine. Pre ľubovoľný obdĺžnik* $R=[a,b]\times[c,d]\subseteq\mathbb{E}^2$ *hľadáme množinu tých obdĺžnikov z* S*, ktoré sú v* R*. Nájdite a opíšte dátovú štruktúru, ktorá umožní vyriešiť túto úlohu v zložitosti* $M\colon\mathcal{O}(n\log^3 n)$ *a* $T\colon\mathcal{O}(\log^4 n+k)$*, kde* k *je počet obdĺžnikov v odpovedi.*

CVIČENIE 5.18 (50 bodov). *Nech* S *je množina* n *mnohouholníkov v rovine. Pre ľubovoľný obdĺžnik* $R=[a,b\times[c,d]\subseteq\mathbb{E}^2$ *hľadáme množinu tých mnohouholníkov z* S*, ktoré sú v* R*. Nájdite a opíšte dátovú štruktúru, ktorá umožní vyriešiť túto úlohu v zložitosti* $M\colon\mathcal{O}(n\log^3 n)$ *a* $T\colon\mathcal{O}(\log^4 n+k)$*, kde* k *je počet mnohouholníkov v odpovedi.*

CVIČENIE 5.19 (30 bodov). *Nech* $P\subset\mathbb{E}^2$ *je množina* n *bodov. Nájdite takú hodnotu* $k>0$*, že transformácia daná predpisom* $x'=x+ky, y'=y$ *nezmení poradie bodov* P *podľa súradnice* x*. Nájdite algoritmus so zložitosťou* $\mathcal{O}(n\log n)$.

CVIČENIE 5.20 (35 bodov). *Opíšte podrobne procedúru tvorby stromu v metóde reťazcov. Určte jeho zložitosť. Nájdite príklad, kde by bola pamäťová zložitosť bez optimalizácie uloženia hran kvadratická.*

CVIČENIE 5.21 (35 bodov). *Opíšte podrobne procedúru tvorby stromu v metóde lichobežníkových oblastí. Zamerajte sa najmä na časť získania oddeľujúcich hrán. Určte jeho zložitosť.*

Cvičenie 5.22 (40 bodov). *Nájdite príklad, v ktorom nadobúda metóda reťazcov svoju asymtotickú zložitosť. Svoje tvrdenie zdôvodnite.*

Cvičenie 5.23 (35 bodov). *Podrobne opíšte algoritmus regularizácie grafu spolu s príkladom typických situácií a pseudokódom.*

Cvičenie 5.24 (35 bodov). *Opíšte detailne procedúru vytvorenia dátovej štruktúry k metóde postupných triangulácií spolu s pseudokódom.*

Cvičenie 5.25 (35 bodov). *Opíšte detailne procedúru vytvorenia dátovej štruktúry k metóde reťazcov spolu s pseudokódom.*

Cvičenie 5.26 (35 bodov). *Ukážte, že pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ možno zostrojiť viacškálové vyhľadávanie prvkov fixnej množiny $P \subset \mathbb{E}^2$ v axiálnom obdĺžniku, ktorého pamäťová zložitosť je $\mathcal{O}(n^{1+\varepsilon})$ a časová zložitosť je $\mathcal{O}(m \log n + k)$, kde m je počet škál a k je mohutnosť výstupu.*

KAPITOLA 6

Prieniky

Cvičenie 6.1 (30 bodov). *Popíšte algoritmus na vyhľadanie prieniku dvoch konvexných n-uholníkov, nájdite jeho zložitosť a zistite, či je asymptoticky optimálny.*

Cvičenie 6.2 (30 bodov). *V rovine je daných n úsečiek. Nájdite algoritmus, ktorý zistí, či sú úsečky po dvoch disjunktné a určte jeho zložitosť.*

Cvičenie 6.3 (40 bodov). *V rovine je daných n úsečiek. Zostavte algoritmus, ktorý zistí, či existuje priamka pretínajúca všetky tieto úsečky a ak áno, nájdite ju.*

Cvičenie 6.4 (40 bodov). *Nech S je množina obsahujúca n kružníc v rovine. Opíšte zametací algoritmus na vyhľadanie všetkých prienikov medzi kružnicami. Odhadnite zložitosť zostaveného algoritmu. Pokúste sa upraviť algoritmus tak, aby jeho zložitosť bola $\mathcal{O}((n+k)\log n)$.*

Cvičenie 6.5 (50 bodov). *Nech S je množina obsahujúca n disjunktných trojuholníkov. Nájdite $n-1$ úsečiek s nasledujúcimi vlastnosťami:*

- *každá úsečka spája hraničné body dvoch rôznych trojuholníkov z S*
- *vnútra úsečiek sú po dvoch disjunktné a disjunktné aj s trojuholníkmi*
- *spolu spájajú navzájom všetky trojuholníky*

Zostavte zametací algoritmus, ktorý rieši tento problém v čase $\mathcal{O}(n\log n)$. Popíšte použité dátové štruktúry a invariant zametacej priamky(t. j. stav zametacej priamky).

Cvičenie 6.6 (40 bodov). *Nech P_1 je jednoduchý mnohouholník s m vrcholmi s danou trianguláciou. Nech P_2 je konvexný mnohouholník s n vrcholmi. Zistite, v akom čase sa dá vypočítať $P_1 \cap P_2$. V prípade, že ide o čas lepší ako prienik všeobecných mnohouholníkov, svoje tvrdenie aj zdôvodnite. Ak to nejde lepšie, nájdite príklad, kde sa dosahuje zložitosť všeobecného prípadu pre akýkoľvek algoritmus.*

Cvičenie 6.7 (20 bodov). *Dokážte, že prienik m polrovín je konvexný polygonálny región s najviac m vrcholmi a najviac m hranami.*

Cvičenie 6.8 (30 bodov). *Nech S je množina n úsečiek v rovine. Navrhnite dátovú štruktúru na získavanie nasledujúcej informácie: Je* *daná priamka l, koľko úsečiek pretína? Analyzujte zložitosť navrhnutého algoritmu.*

CVIČENIE 6.9 (30 bodov). *Zostavte algoritmus na výpočet vzdialenosti medzi mnohouholníkom P s n vrcholmi a ľubovolnou priamkou L. Pokúste sa dosiahnuť hranicu $\mathcal{O}(\log n)$ pri pevnom P.*

CVIČENIE 6.10 (25 bodov). *Nájdite optimálny algoritmus, ktorý otestuje, či sa nejaké dve kružnice z daných n kružníc pretínajú.*

CVIČENIE 6.11 (30 bodov). *Nech S je množina n disjunktných úsečiek v rovine a $\mathbf{p}$ je bod neležiaci na žiadnej z nich. Nájdite všetky úsečky viditeľné z $\mathbf{p}$ (t.j. všetky obsahujúce taký bod $\mathbf{q}$, že vnútro úsečky $\mathbf{pq}$ nepretína žiadnu úsečku z S). Nájdite algoritmus zložitosti $\mathcal{O}(n \log n)$.*

CVIČENIE 6.12 (50 bodov). *Nech $P, Q \subset \mathbb{E}^2$ sú jednoduché mnohouholníky také, že $\operatorname{int} P \cap \operatorname{int} Q = \emptyset$ a $Q \subset \operatorname{conv}(P)$. Nájdite kritérium, či existuje taký spojitý jednoparametrický systém $\phi : [0,1] \to \mathbb{E}^2$ zhodností mnohouholníka Q (pohyb mnohouholníka Q), že*

- $\phi(0) = \mathrm{id}_{\mathbb{E}^2}$,
- $\operatorname{int} \phi(t)(Q) \cap \operatorname{int} P = \emptyset$, $t \in [0,1]$,
- $\operatorname{int} \phi(1)(Q) \cap \operatorname{int} \operatorname{conv}(P) = \emptyset$.

Chceme zistiť, či sa dá mnohouholník Q „vyvliecť" z mnohouholníka P.

CVIČENIE 6.13 (25 bodov). *Opíšte algoritmus prieniku roviny a mnohostena v $\mathbb{E}^3$. Odhadnite zložitosť tohoto algoritmu.*

CVIČENIE 6.14 (20 bodov). *Napíšte algoritmus prieniku dvoch lichobežníkov, ktorých základne ležia na rovnakých (rovnobežných) priamkach. Ide o čiastkovú úlohu v jednom z algoritmov na počítanie prieniku dvoch konvexných mnohouholníkov.*

CVIČENIE 6.15 (15 bodov). *Podrobne opíšte spájanie čiastkových riešení – prienikov dvojíc lichobežníkov – do prieniku dvoch konvexných mnohouholníkov v zametacom algoritme prieniku konvexných mnohouholníkov.*

Literatúra

[BY98] Jean-Daniel Boissonnat and Mariette Yvinec. *Algorithmic geometry*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998. Translated from the 1995 French original by Hervé Brönnimann.

[dBvKOS00] Mark de Berg, Marc van Kreveld, Mark Overmars, and Otfried Schwarzkopf. *Computational geometry*. Springer-Verlag, Berlin, revised edition, 2000. Algorithms and applications.

[Eri] Jeff Erickson. Algorithms course materials. `http://compgeom.cs.uiuc.edu/~jeffe/`.

[PS85] Franco P. Preparata and Michael Ian Shamos. *Computational geometry*. Texts and Monographs in Computer Science. Springer-Verlag, New York, 1985. An introduction.