

KAPITOLA 2

Afinné zobrazenia

DEFINÍCIA 2.1. Nech $A, B \in \mathbb{A}(k)$, $A \neq B$. **Priamka** $\overleftrightarrow{AB}$ je množina

$$\{(1-t)A + tB \mid \forall t \in k\} = \{A + t(B-A) \mid \forall t \in k\}.$$

1. Definícia afinného zobrazenia

DEFINÍCIA 2.2. Nech $\mathbb{A}_1$ a $\mathbb{A}_2$ sú afinné priestory nad rovnakým poľom. Zobrazenie $f: \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$ nazývame **afinným**, ak zachováva afinné kombinácie bodov. T.j. ak pre ľubovoľné $P_0, \dots, P_r \in \mathbb{A}_1$ a $\lambda_0, \dots, \lambda_r \in k$ také, že $\sum_{i=0}^r \lambda_i = 1$, platí

$$(1) \quad f\left(\sum_{i=0}^r \lambda_i P_i\right) = \sum_{i=0}^r \lambda_i f(P_i).$$

PRÍKLAD 2.3. Stredová súmernosť v $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ so stredom v $(0,0)$ je afinné zobrazenie: bod $B_i = (b_{i1}, b_{i2})$ sa zobrazuje na bod $B'_i = (-b_{i1}, -b_{i2})$. Lahko sa presvedčíme, že

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=0}^r \lambda_i B_i\right) &= f\left(\left(\sum_{i=0}^r \lambda_i b_{i1}, \sum_{i=0}^r \lambda_i b_{i2}\right)\right) = \left(-\sum_{i=0}^r \lambda_i b_{i1}, -\sum_{i=0}^r \lambda_i b_{i2}\right) \\ &= \sum_{i=0}^r \lambda_i (-b_{i1}, -b_{i2}) = \sum_{i=0}^r \lambda_i f(B_i). \end{aligned}$$

PRÍKLAD 2.4. Nech $f: \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ je zobrazenie, ktoré bod so súradnicami (b_1, b_2) zobrazí na bod so súradnicami $(b_1, 3b_2)$. Podobne ako v predchádzajúcom príklade overíme, že ide o afinné zobrazenie.

PRÍKLAD 2.5. Zobrazenie $\mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, $(a, b) \mapsto (a, |b|)$ nie je afinným zobrazením: vieme nájsť body A, B, C tak, že $C = \lambda_1 A + \lambda_2 B$ pre nejaké λ_1, λ_2 ($\lambda_1 + \lambda_2 = 1$), ale $f(C) \neq \lambda_1 f(A) + \lambda_2 f(B)$.

PRÍKLAD 2.6. Premietanie na x -os:

$$\mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{A}^2(\mathbb{R}), \quad (a_1, a_2) \mapsto (a_1, 0)$$

je afinné zobrazenie.

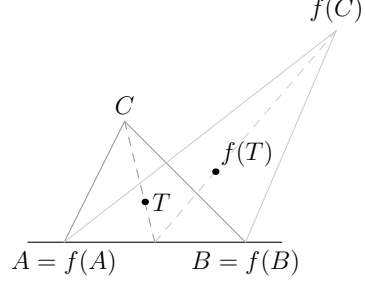
TVRDENIE 2.7. *Kolíneárne body sa afinným zobrazením zobrazia na kolíneárne body. Obrazom priamky v afinnom zobrazení je priamka alebo bod.*

Dôkaz. Nech P_1, P_2, P_3 sú kolíneárne. Ak $P_1 = P_2$, tvrdenie zjavne platí. Inak nech $P_1 \neq P_2$. Potom $P_3 = (1-\lambda)P_1 + \lambda P_2$, teda $f(P_3) = (1-\lambda)f(P_1) + \lambda f(P_2)$, teda $f(P_1), f(P_2), f(P_3)$ sú kolíneárne. Ak $f(P_1) = f(P_2)$, obrazom priamky $\overleftrightarrow{P_1 P_2}$ je bod. V opačnom prípade je ľubovoľný bod priamky $\overleftrightarrow{f(P_1) f(P_2)}$, t.j. bod $(1-\lambda')f(P_1) + \lambda'f(P_2)$ obrazom bodu $(1-\lambda')P_1 + \lambda'P_2$. $\square$

2. Pevné body afinity transformácie

PRÍKLAD 2.8.

Nech afinity zobrazenie $\mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ zobrazí dva rôzne body A, B na seba, t.j. $f(A) = A$, $f(B) = B$ (ide o tzv. **pevné** body). Bod $C \notin \overleftrightarrow{AB}$ sa zobrazí na $f(C)$. Potom sa napr. ťažisko $\triangle ABC$ zobrazí na ťažisko $\triangle f(A)f(B)f(C) = \triangle ABf(C)$. Overíme ešte, že všetky body na priamke $\overleftrightarrow{AB}$ sú pevné.



Nech $X \in \overleftrightarrow{AB}$, teda $X = (1 - \lambda)A + \lambda B$. Potom

$$f(X) = f((1 - \lambda)A + \lambda B) = (1 - \lambda)f(A) + \lambda f(B) = (1 - \lambda)A + \lambda B = X.$$

Poučenie z príkladu: nové pojmy:

DEFINÍCIA 2.9. Ak $f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ je afinity zobrazenie priestoru $\mathbb{A}$ do seba, potom f nazývame aj **afinnou transformáciou**. Bijektívna afinity transformácia priestoru $\mathbb{A}$ sa nazýva tiež **afinitou** priestoru $\mathbb{A}$.

Nech f je afinity transformácia $\mathbb{A}$ a nech $P \in \mathbb{A}$. Ak $f(P) = P$, potom P nazývame **pevným (samodružným, invariantným)** bodom zobrazenia f .

PRÍKLAD 2.10. Premietanie na x -os, posunutie aj stredová súmernosť sú afinity transformáciami $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$. Z nich posunutie a stredová súmernosť sú aj afinitami.

A ešte už dokázané (v Prípade 2.8)

TVRDENIE 2.11. Nech f je afinity transformácia a nech A, B ($A \neq B$) sú jej pevné body. Potom všetky body na priamke $\overleftrightarrow{AB}$ sú pevné.

3. Ďalšie vlastnosti afinity zobrazení

VETA 2.12. Zobrazenie $f: \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$ je afinity práve vtedy, keď pre každé $P, Q \in \mathbb{A}_1$ platí:

$$f((1 - \lambda)P + \lambda Q) = (1 - \lambda)f(P) + \lambda f(Q).$$

Dôkaz. Nech je zobrazenie afinity, potom z definície afinity zobrazenia zachováva afinity kombinácie ľubovoľných n -tíc bodov, teda špeciálne aj ľubovoľných dvojíc.

Nech naopak zobrazenie f zachováva afinity kombinácie dvojíc bodov. Indukciou vzhľadom na počet bodov v afinity kombinácii ukážeme, že toto zobrazenie potom zachováva afinity kombinácie ľubovoľného konečného počtu bodov. Pre dva body platí tvrdenie z predpokladu, môžeme teda hneď pristúpiť k indukčnému kroku.

Nech zobrazenie zachováva afinity kombináciu n bodov (indukčný predpoklad). Nech $\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$. Potom

$$\begin{aligned} f(\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n) &= f\left(\lambda_0 P_0 + (1 - \lambda_0) \left(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_0} P_1 + \dots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_0} P_n\right)\right) \\ &= \lambda_0 f(P_0) + (1 - \lambda_0) f\left(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_0} P_1 + \dots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_0} P_n\right) \\ &= \lambda_0 f(P_0) + \lambda_1 f(P_1) + \dots + \lambda_n f(P_n). \end{aligned}$$

Zobrazenie zachováva afinity kombinácie bodov a teda je afinity. □

POZNÁMKA 2.13. V geometrii sa často stretávame s tzv. **deliacim pomerom** trojice kolineárnych bodov: v reálnom priestore je číslo $(ABC) \in \mathbb{R}$ deliacim pomerom trojice bodov A, B, C (v tomto poradí a za predpokladu $C \neq B$), ak

$$C - A = (ABC)(C - B),$$

t.j. vektor $C - A$ je (ABC) -násobkom vektora $C - B$. Vtedy sa afinné zobrazenie často definuje aj ako zobrazenie afinných priestorov, ktoré zachováva kolinearitu a deliaci pomer bodov.

PRÍKLAD 2.14. Nech $p, q \subset \mathbb{A}^2$ sú rôznobežné priamky. Nech $f: \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ zobrazí bod $B = (b_1, b_2)$ na bod $B' = p \cap q^B$, kde q^B je priamka prechádzajúca bodom B a rovnobežná s q (**rovnobežné premietanie** na priamku p). Z podobnosti trojuholníkov pomocou predchádzajúcej vety vieme vyargumentovať, že rovnobežné premietanie je afinným zobrazením.

VETA 2.15. Nech $f: \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$ je afinné zobrazenie. Nech $B - A = D - C$, t.j. usporiadané dvojice bodov (A, B) a (C, D) sú umiestneniami toho istého vektora. Potom aj obrazy týchto dvojíc sú umiestneniami toho istého vektora: $f(B) - f(A) = f(D) - f(C)$.

Dôkaz. Ak $B - A = D - C$, potom stredy úsečiek AD a BC splývajú; označme tento spoločný bod S :

$$S = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}D = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C.$$

Keďže zobrazenie f je afinné, platí aj

$$f(S) = \frac{1}{2}f(A) + \frac{1}{2}f(D) = \frac{1}{2}f(B) + \frac{1}{2}f(C).$$

Z poslednej rovnosti tak dostávame

$$\frac{1}{2}f(A) - \frac{1}{2}f(B) = \frac{1}{2}f(C) - \frac{1}{2}f(D),$$

odkiaľ už dostaneme dokazovanú rovnosť. $\square$

DEFINÍCIA 2.16. Nech $f: \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$ je afinné zobrazenie. Zobrazenie $Df: V(\mathbb{A}_1) \rightarrow V(\mathbb{A}_2)$, ktoré vektoru $\mathbf{u} = B - A$ priradí vektor $Df(\mathbf{u}) = f(B) - f(A)$ sa nazýva **asociovaným** k zobrazeniu f alebo tiež **vektorovou**, **lineárnou** alebo **homogénnou** zložkou afinného zobrazenia f .

Keďže $\mathbf{u} = (B + \mathbf{u}) - B$ pre akýkoľvek vektor $\mathbf{u}$ a bod B , dostávame

$$Df(\mathbf{u}) = Df((B + \mathbf{u}) - B) = f(B + \mathbf{u}) - f(B),$$

teda z definície asociovaného zobrazenia Df k afinnému zobrazeniu f môžeme tiež písať

$$f(B + \mathbf{u}) = f(B) + Df(\mathbf{u}).$$

VETA 2.17. Vektorová zložka Df afinného zobrazenia $f: \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$ je lineárnym zobrazením vektorových priestorov $V(\mathbb{A}_1) \rightarrow V(\mathbb{A}_2)$.

Dôkaz. Potrebujeme ukázať, že

$$Df(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = Df(\mathbf{v}) + Df(\mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w},$$

$$Df(c\mathbf{v}) = cDf(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \forall c.$$

Zvoľme $P \in \mathbb{A}_1$ ľubovoľne. Nech $Q = P + \mathbf{v}$ a $R = Q + \mathbf{w}$. Potom

$$Df(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = Df(R - P) = f(R) - f(P) = f(R) - f(Q) + f(Q) - f(P) = Df(\mathbf{w}) + Df(\mathbf{v}).$$

Nech teraz $c \in k$ a nech $S = P + c\mathbf{v}$. Potom

$$\begin{aligned} Df(c\mathbf{v}) &= f(S) - f(P) = f((1-c)P + cQ) - f(P) = (1-c)f(P) + cf(Q) - f(P) \\ &= c(f(Q) - f(P)) = cDf(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

$\square$

PRÍKLAD 2.18.

- (i) Nech $f : \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ je stredová súmernosť. Zobrazenie $Df : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vektoru $\mathbf{u}$ priradí vektor $-\mathbf{u}$.
- (ii) Ak $t : \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ je posunutie, potom jeho vektorová zložka Dt je identita.

VETA 2.19. *Nech $(\mathbb{A}_1, V_1)$ a $(\mathbb{A}_2, V_2)$ sú afinné priestory. Pre každú dvojicu bodov $P_1 \in \mathbb{A}_1$, $P_2 \in \mathbb{A}_2$ a každé lineárne zobrazenie $g : V_1 \rightarrow V_2$ existuje práve jedno afinné zobrazenie $f : \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$ také, že $f(P_1) = P_2$ a $Df = g$.*

(Príjemnou ľudskou rečou: afinné zobrazenie f je jednoznačne determinované zobrazením Df a obrazom jedného bodu.)

Dôkaz. Existencia zobrazenia: Nech $f : \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$ je definované nasledovne:

$$f(X) = P_2 + g(X - P_1).$$

Lahko sa presvedčíme, že zobrazenie f má požadované vlastnosti:

- pre ľubovoľné $A, B \in \mathbb{A}_1$ platí

$$\begin{aligned} (1 - \lambda)f(A) + \lambda f(B) &= (1 - \lambda)(P_2 + g(A - P_1)) + \lambda(P_2 + g(B - P_1)) \\ &= (1 - \lambda)P_2 + \lambda P_2 + (1 - \lambda)g(A - P_1) + \lambda g(B - P_1) \\ &= P_2 + g((1 - \lambda)A + \lambda B - P_1) = f((1 - \lambda)A + \lambda B), \end{aligned}$$

- $f(P_1) = P_2 + g(P_1 - P_1) = P_2 - g(\mathbf{0}) = P_2$,
- znovu pre ľubovoľné $A, B \in \mathbb{A}_1$ platí

$$\begin{aligned} Df(B - A) &= f(B) - f(A) = P_2 + g(B - P_1) - (P_2 + g(A - P_1)) \\ &= g((B - P_1) - (A - P_1)) \\ &= g(B - A), \end{aligned}$$

Vidíme, že f je afinné zobrazenie a má požadované vlastnosti.

Jednoznačnosť: nech $h : \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$ je ďalšie zobrazenie vyhovujúce daným podmienkam, t.j. nech $h(P_1) = P_2$ a $Dh = g$. Potom pre ľubovoľné $X \in \mathbb{A}_1$ platí

$$h(X) = h(P_1) + Dh(X - P_1) = P_2 + g(X - P_1) = f(P_1) + Df(X - P_1) = f(X),$$

kde prvá rovnosť vyplýva z Vety 2.17 (ii), druhá z podmienok pre zobrazenie h , tretia z podmienok pre zobrazenie f a štvrtá znovu z Vety 2.17 (ii). $\square$

DÔSLEDOK. (Určenosť afinného zobrazenia) Nech $E_0, E_1, \dots, E_n$ je barycentrický súradnicový systém v $\mathbb{A}_1 = \mathbb{A}^n$ a nech $Q_0, Q_1, \dots, Q_n$ sú ľubovoľné body v $\mathbb{A}_2$. Potom existuje jediné afinné zobrazenie $f : \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$ také, že $f(E_i) = Q_i$ pre $i = 0, \dots, n$.

Dôkaz. Pre zobrazenie $f : \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$ musí platiť

- (1) $f(E_0) = Q_0$,
- (2) $Df(P_i - P_0) = Q_i - Q_0$ pre $i = 1, \dots, n$

Z lineárnej algebry vieme, že existuje práve jedno lineárne zobrazenie $g : V(\mathbb{A}_1) \rightarrow V(\mathbb{A}_2)$ spĺňajúce druhú podmienku, a z práve dokázanej vety potom máme, že existuje jediné zobrazenie f spĺňajúce dané podmienky. $\square$

Z tohto dôsledku napríklad vidíme, že afinné zobrazenie roviny je jednoznačne určené obrazmi troch nekolineárnych bodov.

TVRDENIE 2.20. *Afinné zobrazenie $f : \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$ je injektívne (surjektívne) práve vtedy, keď $Df : V(\mathbb{A}_1) \rightarrow V(\mathbb{A}_2)$ je injektívne (surjektívne).*

Dôkaz. Surjektívnosť: Nech Df je surjektívne a nech $Y \in \mathbb{A}_2$ je ľubovoľný bod. Nech ďalej A je ľubovoľný bod v $\mathbb{A}_1$. Označme $\mathbf{v} := Y - f(A)$. Keďže je Df surjektívne, má vektor $\mathbf{v}$ v zobrazení Df svoj vzor: $\mathbf{v} = Df(\mathbf{u})$. Potom

$$f(A + \mathbf{u}) = f(A) + Df(\mathbf{u}) = f(A) + \mathbf{v} = Y,$$

čiže bod Y má vzor $A + \mathbf{u}$.

Nech teraz naopak je zobrazenie f surjektívne a nech $\mathbf{v} \in V(\mathbb{A}_2)$, nájdeme vzor $\mathbf{v}$ v zobrazení Df . Uvažujme ľubovoľné umiestnenie $\mathbf{v} = Y - X$. Keďže f je surjektívne, existujú body $A, B \in \mathbb{A}_1$ také, že $f(A) = X$ a $f(B) = Y$. Potom $Df(B - A) = \mathbf{v}$, t.j. $B - A$ je vzorom $\mathbf{v}$.

Injektívnosť: dú. □

TVRDENIE 2.21. *Nech $f_1: \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$ a $f_2: \mathbb{A}_2 \rightarrow \mathbb{A}_3$ sú afinné zobrazenia. Potom aj zložené zobrazenie $f_2 \circ f_1: \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_3$ je afinné a pre jeho vektorovú zložku platí $D(f_2 \circ f_1) = Df_2 \circ Df_1$.*

Ak $f: \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$ je bijektívne afinné zobrazenie, potom aj $f^{-1}: \mathbb{A}_2 \rightarrow \mathbb{A}_1$ je afinné zobrazenie a $D(f^{-1}) = (Df)^{-1}$

Dôkaz. Vynechaný, je to únavné mechanické prepisovanie. □

DÔSLEDOK. *Afinity priestoru $\mathbb{A}^n$ tvoria grupu.*

4. Súradnicové (analytické) vyjadrenie afinného zobrazenia

Popis lineárneho zobrazenia vektorových priestorov maticou má analógiu v afinných zobrazeniach.

Majme v $\mathbb{A}^m$ resp. v $\mathbb{A}^n$ zvolený súradnicový systém $(O_1, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m)$ resp. $(O_2, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$.

Nech $f: \mathbb{A}^m \rightarrow \mathbb{A}^n$ je afinné zobrazenie, ktoré je popísané obrazom bodu O_1 a vektorovou zložkou Df (t.j. obrazmi básových vektorov $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$):

$$\begin{aligned} f(O_1) &= (a_{10}, \dots, a_{n0}) \quad (= O_2 + a_{10}\mathbf{f}_1 + \dots + a_{n0}\mathbf{f}_n) \\ Df(\mathbf{e}_1) &= (a_{11}, \dots, a_{n1}) \quad (= a_{11}\mathbf{f}_1 + \dots + a_{n1}\mathbf{f}_n) \\ &\dots \\ Df(\mathbf{e}_m) &= (a_{1m}, \dots, a_{nm}) \quad (= a_{1m}\mathbf{f}_1 + \dots + a_{nm}\mathbf{f}_n) \end{aligned}$$

Potom pre každý bod $P = (p_1, \dots, p_m) = O_1 + p_1\mathbf{e}_1 + \dots + p_m\mathbf{e}_m \in \mathbb{A}^m$ platí

$$f(P) = f(O_1) + p_1 Df(\mathbf{e}_1) + \dots + p_m Df(\mathbf{e}_m).$$

Označme $f(P) = Q = (q_1, \dots, q_n)$. Toto všetko môžeme zapísať maticovo

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ \dots \\ a_{n0} \end{pmatrix},$$

skrátene

$$\mathbf{Q} = \mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{A}_0.$$

Ak uvažujeme rozšírené súradnice (t.j. $f(O_1) = (a_{10}, \dots, a_{n0}, 1)$, $Df(\mathbf{e}_i) = (a_{1i}, \dots, a_{ni}, 0)$), máme zápis

$$(2) \quad \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & a_{20} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & a_{n0} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_m \\ 1 \end{pmatrix},$$

skátene

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{P}}.$$

PRÍKLAD 2.22. Preferujeme matice v rozšírených súradniciach oproti bežným afinným, lebo tak sa ľahko zobrazenia skladajú: skladanie zobrazení zodpovedá násobeniu matíc.

Nech $t_{\mathbf{u}}$ resp. $t_{\mathbf{v}}$ je posunutie v $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ pozdĺž vektora $\mathbf{u}$ resp. $\mathbf{v}$.

Ak $\mathbf{u}$ má súradnice (u_1, u_2) a $\mathbf{v}$ má súradnice (v_1, v_2) , potom maticu zloženého zobrazenia $t_{\mathbf{v}} \circ t_{\mathbf{u}}$ nájdeme ako súčin matíc pre $t_{\mathbf{v}}$ a $t_{\mathbf{u}}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_1 \\ 0 & 1 & u_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_1 + v_1 \\ 0 & 1 & u_2 + v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že ide o posunutie pozdĺž vektora $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, ako sme aj očakávali:

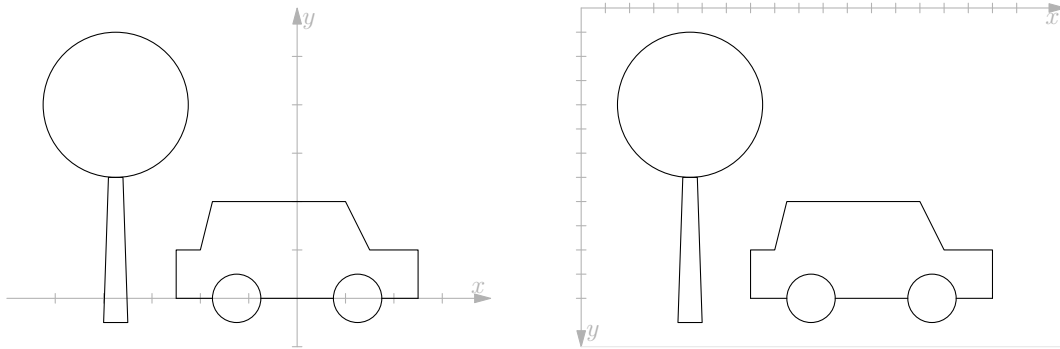
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & u_1 + v_1 \\ 0 & 1 & u_2 + v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + u_1 + v_1 \\ x_2 + u_2 + v_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

PRÍKLAD 2.23. Súvis medzi skladaním afinných zobrazení a násobením matíc býva užitočný pri hľadaní predpisu pre komplikovanejšie zobrazenia. Predpis pre stredovú súmernosť podľa $S = (s_1, s_2)$ vieme tak nájsť pomocou matíc pre posunutie a súmernosť podľa $(0, 0)$: najprv urobíme posunutie o $(-s_1, -s_2)$, potom stredovú súmernosť podľa $(0, 0)$ a nakoniec posunutie o (s_1, s_2) . Výslednú maticu dostaneme ako súčin jednotlivých matíc:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & s_1 \\ 0 & 1 & s_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -s_1 \\ 0 & 1 & -s_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2s_1 \\ 0 & -1 & 2s_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Zmena súradnicovej sústavy

PRÍKLAD 2.24. Namodelovali sme si scénu (napríklad pomocou lomených čiar a kružníc) v súradnicovej sústave, v ktorej sa nám pohodlne pracovalo (obrázok vľavo).



Ak ju chceme zobraziť na obrazovku, potrebujeme všetky súradnice (vrcholy lomených čiar, stredy kružníc) prepočítať: vyjadriť ich v súradnicovej sústave obrazovky (obrázok vpravo). V tejto podkapitolke si predvedieme, ako sa s takýmto problémom čo najefektívnejšie vysporiadať.

V $\mathbb{A}^n$ uvažujme dve afinné súradnicové sústavy:

$$\begin{aligned} E &= (O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) \quad (\text{„stará“ sústava}), \\ E' &= (O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_n) \quad (\text{„nová“ sústava}) \end{aligned}$$

Vyjadrime „nový“ začiatok sústavy a „nové“ bákové vektory pomocou „starých“:

$$\begin{aligned} O' &= O + t_{01}\mathbf{e}_1 + t_{02}\mathbf{e}_2 + \cdots + t_{0n}\mathbf{e}_n \\ \mathbf{e}'_1 &= t_{11}\mathbf{e}_1 + t_{12}\mathbf{e}_2 + \cdots + t_{1n}\mathbf{e}_n \\ \mathbf{e}'_2 &= t_{21}\mathbf{e}_1 + t_{22}\mathbf{e}_2 + \cdots + t_{2n}\mathbf{e}_n \\ &\vdots \\ \mathbf{e}'_n &= t_{n1}\mathbf{e}_1 + t_{n2}\mathbf{e}_2 + \cdots + t_{nn}\mathbf{e}_n, \end{aligned}$$

čo môžeme prehľadne zapísať pomocou matic

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 & \cdots & \mathbf{e}'_n & O' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_n & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11} & t_{21} & \cdots & t_{n1} & t_{01} \\ t_{12} & t_{22} & \cdots & t_{n2} & t_{02} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{1n} & t_{2n} & \cdots & t_{nn} & t_{0n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

skátene

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}\mathbf{T}.$$

Matica $\mathbf{T}$ sa nazýva **maticou prechodu** od súradnicovej sústavy $E = (O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ k súradnicovej sústave $E' = (O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_n)$. Niekedy sa pre spresnenie označuje aj ako $\mathbf{T}(E, E')$.

TVRDENIE 2.25. *Matica prechodu od jednej sústavy k druhej je regulárna.*

Dôkaz. $\mathbf{T}$ je tvaru

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_{11} & \mathbf{t}_0 \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{t}_0 = (t_{01} \ t_{02} \ \dots \ t_{0n})^T$ a $\mathbf{T}_{11}$ je matica typu $n \times n$. Pre determinant matice $\mathbf{T}$ teda platí $|\mathbf{T}| = |\mathbf{T}_{11}|$, čiže $\mathbf{T}$ je regulárna práve vtedy, keď $\mathbf{T}_{11}$ je regulárna. Všimnime si, že i -ty stĺpec matice $\mathbf{T}_{11}$ obsahuje súradnice vektora $\mathbf{e}'_i$ v báze $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$. Ak by stĺpce matice $\mathbf{T}_{11}$ boli lineárne závislé, teda existovali by $c_1, c_2, \dots, c_n \in k$ ($(c_1, \dots, c_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$) také, že

$$c_1\mathbf{e}'_1 + c_2\mathbf{e}'_2 + \cdots + c_n\mathbf{e}'_n = \mathbf{0},$$

potom by vektory $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_n$ netvorili bázu $V(\mathbb{A}^n)$. Matica $\mathbf{T}_{11}$ je teda regulárna, čiže aj matica $\mathbf{T}$ je regulárna. $\square$

Maticu $\mathbf{T}$ je možné využiť na prepočítanie súradníc bodov z jednej sústavy do druhej:

Nech $P = (p'_1, p'_2, \dots, p'_n)$ v „novej“ sústave, t.j.

$$P = O' + p'_1\mathbf{e}'_1 + p'_2\mathbf{e}'_2 + \cdots + p'_n\mathbf{e}'_n.$$

Potom

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 & \cdots & \mathbf{e}'_n & O' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ \cdots \\ p'_n \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}'\tilde{\mathbf{P}}' = \mathbf{E}\mathbf{T}\tilde{\mathbf{P}}',$$

teda

$$(3) \quad \tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{T}\tilde{\mathbf{P}}'$$

je stĺpcová matica obsahujúca rozšírené súradnice bodu P vzhľadom na „starú“ bázu. Pre prepočet „starých“ súradníc na „nové“ teda použijeme inverznú maticu (prenásobíme rovnosť (3) zľava maticou $\mathbf{T}^{-1}$):

$$\tilde{\mathbf{P}}' = \mathbf{T}^{-1}\tilde{\mathbf{P}}.$$

PRÍKLAD 2.26. S použitím matice prechodu vypočítame súradnice bodu $A = (1, 3)$ v súradnicovej sústave $(O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$, kde

$$O' = (2, 3), \quad \mathbf{e}'_1 = (0, -1), \quad \mathbf{e}'_2 = (1, 1).$$

Matica prechodu k súradnicovej sústave $(O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$ je

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Každý svojou obľúbenou metódou vypočíta maticu k nej inverznú:

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A potom (rozšírené) súradnice bodu A v novej súradnicovej sústave (t.j. vzhľadom na $(O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$) sú

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Teda $A = O' - \mathbf{e}'_1 - \mathbf{e}'_2 = (-1, -1)_{(O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)}$.

Prirodzene, metóda ilustrovaná týmto príkladom je naozaj dosť „overkill“, pokiaľ chceme získať súradnice jedného bodu v novej sústave. Avšak stáva sa veľmi užitočnou, ak potrebujeme napríklad prepočítat komplexnejšiu scénu.

POZNÁMKA 2.27. V rôznej literatúre sa môžete stretnúť s rôznymi maticami prechodu. Niekedy sa ňou nazýva matica transponovaná k našej, niekedy dokonca inverzná.

POZNÁMKA 2.28. Všimnime si, že súradnicová sústava a súradnice bodu sú navzájom duálne pojmy: matica $\mathbf{T}$ popisuje „novú“ súradnicovú sústavu pomocou „starej“, ale „nové“ súradnice bodu sa zo „starých“ počítajú pomocou $\mathbf{T}^{-1}$.

POZNÁMKA 2.29. A na záver si uvedomme, že zmena súradnicovej sústavy v $\mathbb{A}^n$ zodpovedá afinite priestoru $\mathbb{A}^n$ a naopak.

6. Orientácia afinného priestoru

V tejto časti budeme uvažovať afinný priestor nad reálnymi číslami.

V praxi sa pri dvoj- a trojrozmernom reálnom priestore stretávame s pojmom „pravotočivá“ alebo „ľavotočivá“ súradnicová sústava, prípadne tiež „kladne“ alebo „záporne orientovaná“ súradnicová sústava: napríklad v dvojrozmernom priestore sa za kladne orientovanú súradnicovú sústavu považuje taká sústava $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, že body $O, E_1 = O + \mathbf{e}_1, E_2 = O + \mathbf{e}_2$ sú v tomto poradí usporiadané proti smeru hodinových ručičiek. Cieľom tejto časti je popísať tento jav matematicky.

PRÍKLAD 2.30. Majme v $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ novú súradnicovú sústavu:

$$O' = O, \quad \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_2 = t_{21}\mathbf{e}_1 + t_{22}\mathbf{e}_2,$$

čiže matica prechodu k novej súradnicovej sústave je

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & t_{21} & 0 \\ 0 & t_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Predpokladajme, že pôvodná súradnicová sústava je kladne orientovaná (t.j. proti smeru hodinových ručičiek). Pre aké hodnoty t_{21} a t_{22} bude aj nová súradnicová sústava kladne orientovaná?

VETA 2.31. V afinnom priestore $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ ($n \geq 2$) uvažujme nasledovnú reláciu na množine všetkých súradnicových sústav: Pre $E = (O, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ a $E' = (O', \mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n)$ nech

$$E \sim E' \text{ práve vtedy, keď } |\mathbf{T}(E, E')| > 0.$$

Takto definovaná relácia $\sim$ je reláciou ekvivalencie a určuje rozklad množiny všetkých súradnicových sústav na dve triedy.

Dôkaz. Reflexívnosť: $|\mathbf{T}(E, E)| = |\mathbf{I}_{n+1}| = 1$ ($\mathbf{I}_{n+1}$ je jednotková matica stupňa $n + 1$), preto $E \sim E$.

Symetrickosť: nech $E_1 \sim E_2$, teda $|\mathbf{T}(E_1, E_2)| > 0$. Platí, že $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_1 \mathbf{T}(E_1, E_2)$, po vynásobení inverznou maticou k $\mathbf{T}(E_1, E_2)$ máme, že $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 \mathbf{T}(E_1, E_2)^{-1}$. Vidíme, že $\mathbf{T}(E_2, E_1) = \mathbf{T}(E_1, E_2)^{-1}$. Preto $|\mathbf{T}(E_2, E_1)| = |\mathbf{T}(E_1, E_2)^{-1}| = 1/|\mathbf{T}(E_1, E_2)| > 0$, čiže $E_2 \sim E_1$.

Tranzitívnosť: kľúčom k dôkazu je pozorovanie: ak $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_1 \mathbf{T}(E_1, E_2)$ a $\mathbf{E}_3 = \mathbf{E}_2 \mathbf{T}(E_2, E_3)$, potom $\mathbf{E}_3 = \mathbf{E}_1 \mathbf{T}(E_1, E_2) \mathbf{T}(E_2, E_3)$, teda $\mathbf{T}(E_1, E_3) = \mathbf{T}(E_1, E_2) \mathbf{T}(E_2, E_3)$. Nech teraz $E_1 \sim E_2$ a $E_2 \sim E_3$, čiže $|\mathbf{T}(E_1, E_2)| > 0$ a $|\mathbf{T}(E_2, E_3)| > 0$, odkiaľ potom $|\mathbf{T}(E_1, E_3)| > 0$, čiže $E_1 \sim E_3$.

Rozklad na dve triedy: zrejme existujú aspoň dve triedy rozkladu: pre danú súradnicovú sústavu E určite existuje sústava E' taká, že $\mathbf{T}(E, E') < 0$ (viete nájsť takú sústavu E' ?). Teda existujú aspoň dve triedy rozkladu. Nech teraz $E_1 \not\sim E_2$ a $E_2 \not\sim E_3$, čiže $|\mathbf{T}(E_1, E_2)| < 0$ a $|\mathbf{T}(E_2, E_3)| < 0$. Potom $|\mathbf{T}(E_1, E_3)| = |\mathbf{T}(E_1, E_2)| |\mathbf{T}(E_2, E_3)| > 0$, teda $E_1 \sim E_3$. Vidíme tak, že existujú len dve triedy ekvivalencie. $\square$

DEFINÍCIA 2.32. Nech E_1, E_2 sú súradnicové sústavy v $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$. Hovoríme, že sústavy E_1, E_2 sú **súhlasne orientované**, ak $E_1 \sim E_2$ (v zmysle predchádzajúcej vety). V opačnom prípade sú sústavy E_1, E_2 **nesúhlasne orientované**.

V danom reálnom afinnom priestore potom jednu dvoch tried ekvivalencie súradnicových sústav prehlásime za **kladnú**, a všetky sústavy v tejto triede budú **kladne orientované**. Druhá trieda bude **záporná** a bude pozostávať zo **záporne orientovaných** súradnicových sústav.

Orientovaný afinný priestor je afinný priestor spolu so zvolenou orientáciou, t.j. dvojica $(\mathbb{A}, [E])$, kde $[E]$ označuje triedu ekvivalencie súradnicovej sústavy E .

V orientovanej rovine môžeme potom hovoriť aj o orientácii trojuholníka: nekolineárne body A, B, C (v tomto poradí) určujú kladne orientovaný trojuholník $\triangle ABC$, ak je súradnicová sústava $(A, B - A, C - A)$ kladne orientovaná; v opačnom prípade ide o záporne orientovaný trojuholník. Podobne hovoríme v trojrozmernom orientovanom priestore o kladne alebo záporne orientovanom štvorstene, či v n -rozmernom orientovanom priestore o kladne alebo záporne orientovanom n -rozmernom simplexe.

PRÍKLAD 2.33. Nech $E_e = (O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ je štandardná súradnicová sústava (repér).

Nech $E_f = (O, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$, kde

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{f}_2 &= -\mathbf{e}_1. \end{aligned}$$

Platí, že $|\mathbf{T}(E_e, E_f)| = -1 < 0$, teda tieto súradnicové sústavy sú nesúhlasne orientované: Ak E_e bola kladne orientovaná, E_f je záporne orientovaná.

Nech $E_g = (O, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2)$, kde

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= -\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{g}_2 &= -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

Znovu máme $|\mathbf{T}(E_e, E_g)| = -1 < 0$, takže aj E_g je záporne orientovaná.

Ak si však zvolíme takú orientáciu priestoru, že E_f je kladne orientovaná, z determinantov matíc $T(E_f, E_e)$, $T(E_f, E_g)$ naozaj zistíme, že E_e je záporne a E_g kladne orientovaná, presne ako vidíme, keď si repéry zakreslíme do obrázka.