

KAPITOLA 1

Afinný priestor

1. Jemný historický úvod

- euklidovská rovina (zo strednej školy) (dvojmerný euklidovský priestor):
 - objekty štúdia v euklidovskej rovine: body (+ priamky, kružnice, ...)
 - s euklidovskými priestormi (dvoj- a trojmernými) pracoval a vynikajúco ich popísal už Euklides cca. 300 rokov pr.n.l.
- afinná rovina (dvojmerný afinný priestor): euklidovská rovina, v ktorej ešte nevieme merať (vzdialenosť, dĺžka, kolmosť, veľkosť uhla... neexistujú)

-300: Euklides: euklidovská rovina

1636: Descartes, Fermat: analytická geometria (súradnice)

1804: Bolzano: operácie s bodmi a priamkami, v ktorých je badateľný koncept vektora

1843: Hamilton: kvaternióny ako lineárne kombinácie

1844: Grassmann: prvýkrát prišiel s konceptom vektorového priestoru

1888: Peano: moderné poňatie vektorového priestoru

1920: Banach, Hilbert: axiomatická definícia vektorového priestoru

Dnes existujú vedľa seba dva prístupy ku geometrii: geometria

- syntetická
 - bez súradníc
 - názorná, konštrukčné dôkazy tvrdení
 - najprv máme afinný alebo euklidovský priestor, potom v ňom nájdeme vektorový
- analytická
 - so súradnicami, do hry vstupuje pole
 - ľahšie sa v nej pracuje, na pomoc si vieme pribrať aj počítače
 - viac príležitostí sklznúť k mechanickému počítaniu namiesto porozumenia geometrii problému
 - najprv skonštruujeme vektorový priestor a potom afinný

Spomíname na vektorový priestor:

- objekty: vektory
- štruktúra: vektory vieme sčítavať a násobiť skalármi
- významný vektor: $\mathbf{0}$:
 - v každom vektorovom priestore,
 - v každom podpriestore,
 - nemení sa pri zmene bázy
 - nenachádza sa v žiadnej lineárne nezávislej množine, ani nie je súčasťou žiadnej bázy
 - ...

Afinný priestor: podobný vektorovému, ale “neukotvený”, neexistuje nič ako nulový bod.

2. Analytická geometria, body euklidovskej roviny

*„Pre toho, kto sa chce vyznať problematike vecí,
je užitočné dostatočne sa ňou zaoberať.”*
Aristoteles

Nie hocijaká množina bodov je euklidovský priestor. Potrebujeme popísať štruktúru v množine bodov.

DEFINÍCIA 1.1. Stred úsečky AB (ozn. $\mathcal{S}(A, B)$) je taký bod na úsečke AB , ktorého vzdialenosť od A a od B sú rovnaké.

ÚLOHA 1. Pre dva body A a B nájsť stred úsečky AB , ak $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$. Pomocou obrázku (alebo si pamätáme zo SŠ) máme, že

$$\mathcal{S}(A, B) = \left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2} \right).$$

Treba ešte overiť, že tento bod je naozaj stredom úsečky AB podľa Definície 1.1 (dú).

POZOROVANIE. Sčítavanie bodov zmysel nemá, ale vypočítať $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ už, zdá sa, zmysel má.

DEFINÍCIA 1.2. Nech $S \in \mathbb{A}^2$ je pevne daný bod. **Stredová súmernosť** f so stredom S je zobrazenie množiny bodov roviny do seba, ktoré každý bod A zobrazí na bod $f(A) = A'$ taký, že $S = \mathcal{S}(A, A')$.

Je táto definícia korektná? Treba overiť, že stredová súmernosť f , ako sme ju popísali, je dobre definované zobrazenie, t.j. že pre každý bod A existuje práve jeden bod A' taký, že $f(A) = A'$, čiže taký, že $S = \mathcal{S}(A, A')$. (dú)

3. Štruktúra euklidovského priestoru: geometrický model vektorového priestoru

Uvažujme rovinu $\mathbb{R}^2$ (poznáte ju zrejme pod menom „euklidovská rovina”, ozn. $\mathbb{E}^2$).

DEFINÍCIA 1.3. Orientovaná úsečka AB je úsečka AB spolu s poradím bodov A, B , z ktorých jeden budeme nazývať **začiatočným bodom** a druhý **koncovým bodom** orientovanej úsečky. Ak $A = B$, potom AB je **nulová** (orientovaná) úsečka.

Pri popisovaní orientovanej úsečky budeme používať konvenciu, že prvý bod je začiatočný a druhý koncový, t.j. v orientovanej úsečke AB je bod A začiatočný a bod B koncový.

Každá orientovaná úsečka určuje vektor. Každý vektor má reprezentáciu medzi orientovanými úsečkami, táto reprezentácia ale nie je jednoznačná. Rôzne orientované úsečky môžu určovať ten istý vektor:

- Všetky nulové úsečky nech reprezentujú nulový vektor.
- Dve nenulové orientované úsečky AB a CD reprezentujú ten istý vektor, ak
 - sú zhodné ($|AB| = |CD|$),
 - majú rovnaký smer, teda $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$,
 - majú rovnakú orientáciu, čo v tomto prípade môžeme popísať tak, že
 - * koncové body B a D ležia na tej istej strane od priamky $\overleftrightarrow{AC}$, ak AB a CD neležia na tej istej priamke,
 - * $\overrightarrow{AB} \subset \overrightarrow{CD}$ alebo $\overrightarrow{CD} \subset \overrightarrow{AB}$, ak AB a CD ležia na tej istej priamke.

Alternatívne by sme fakt, že dve rôzne orientované úsečky reprezentujú ten istý vektor, mohli popísať aj tak, že stred úsečky AD splýva so stredom úsečky BC .

Matematicky: popísaná relácia na množine orientovaných úsečiek je reláciou ekvivalencie a vektor je trieda ekvivalencie orientovaných úsečiek.

Dokonca: pre ľubovoľný bod A má ľubovoľný vektor reprezentáciu orientovanou úsečkou AX pre nejaké X .

Súradnice vektora určeného orientovanou úsečkou AB , ak $A = (a_1, a_2)$ a $B = (b_1, b_2)$, sú $(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$. Máme tak ďalšiu zmysluplnú operáciu s bodmi: odčítavanie, pričom rozdielom dvoch bodov je vektor. Vektor určený orientovanou úsečkou AB tak budeme písať ako $B - A$.

Vektory v euklidovskej rovine tvoria vektorový priestor:

- vektory vieme sčítat: sčítavanie vektorov reprezentovaných orientovanými úsečkami AB a CD : priložíme začiatok orientovanej úsečky CD ku koncu orientovanej úsečky AB , t.j. nájdeme bod E taký, že $E - B = D - C$, potom súčet je reprezentovaný orientovanou úsečkou AE :

$$(B - A) + (D - C) = (B - A) + (E - B) = E - A.$$

- je to dobre definované? inak: nezávisí výsledok od voľby reprezentácie?
- je to asociatívne?
- je to komutatívne?
- existuje neutrálny prvok?
- existuje ku každému prvku opačný?
- vektory vieme násobiť skalárom: rozlíšime prípady $t = 0, t < 0, t > 0$:
 - ak $t = 0$, potom $t \cdot (B - A) = \mathbf{0}$,
 - ak $t > 0$, vieme že

$$\forall (B - A) \forall t \in \mathbb{R}^+ \exists ! C \in \overrightarrow{AB} : |AC| = t|AB|.$$

$$\text{a stanovíme } t \cdot (B - A) = C - A,$$

- ak $t < 0$, potom $t \cdot (B - A) = A - C$, kde $C - A = (-t) \cdot (B - A)$.

Znovu treba ešte overiť, že takéto násobenie je dobre definované, t.j. že výsledok operácie nezávisí od voľby reprezentácie vektora.

- platí distributívnosť násobenia vzhľadom na sčítanie (dôkaz sa rozpadá na spústu prípadov).

Pomocou euklidovského priestoru sme skonštruovali vektorový priestor $V(\mathbb{E})$. A s ním aj zobrazenie $\mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow V(\mathbb{E})$.

4. Posunutia

Skúmame ďalej súvis medzi $\mathbb{E}$ a $V(\mathbb{E})$.

ÚLOHA 2. Čo viete povedať o zobrazení, ktoré vznikne zložením dvoch stredových súmerností?

DEFINÍCIA 1.4. Nech $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ je pevne zvolený vektor. **Posunutie (translácia)** t v smere (pozdĺž) vektora $\mathbf{u}$ je zobrazenie $\mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$, ktoré každý bod $A = (a_1, a_2)$ zobrazí na bod $t(A) = A' = A + \mathbf{u} = (a_1 + u_1, a_2 + u_2)$.

POZOROVANIE. Súčet bodu A a vektora $\mathbf{u}$ je tiež zmysluplná operácia: výsledkom je bod, do ktorého sa zobrazí bod A pri translácii pozdĺž vektora $\mathbf{u}$.

Posunutie je jedno-jednoznačne dané vektorom posunutia:

- každý vektor jednoznačne určí posunutie (vyplýva z definície posunutia)

- rôzne vektory určujú rôzne posunutia (ľahko sa overí, stačí nájsť jeden bod, kde sa líšia)

Máme tak bijekciu medzi vektormi v $\mathbb{E}^2$ a posunutiami $\mathbb{E}^2$.

Vektory vieme sčítavať... posunutia vieme skladáť: ak t_1 je translácia pozdĺž $\mathbf{u}_1$ a t_2 je translácia pozdĺž $\mathbf{u}_2$, potom $t_2 \circ t_1 = t_1 \circ t_2$ je translácia pozdĺž $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$.

DEFINÍCIA 1.5. Dvojica $(G, \circ)$, kde $\circ: G \times G \rightarrow G$ je binárna operácia, tvorí **grupu**, ak

- pre všetky $g_1, g_2, g_3 \in G$ platí $(g_1 \circ g_2) \circ g_3 = g_1 \circ (g_2 \circ g_3)$ (operácia $\circ$ je **acosiatívna**),
- existuje $e \in G$ také, že $e \circ g = g \circ e = g$ pre všetky $g \in G$ (e je tzv. **neutrálny prvok** vzhľadom na operáciu $\circ$),
- pre každý prvok $g \in G$ existuje $g' \in G$ tak, že $g \circ g' = g' \circ g = e$ (g' je tzv. **opačný prvok** k prvku g vzhľadom na operáciu $\circ$).

Pokiaľ je operácia $\circ$ navyše komutatívna (t.j. platí $g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$ pre všetky $g_1, g_2 \in G$), potom horovíme, že $(G, \circ)$ (alebo jednoducho G) je **komutatívna grupa**.

POZOROVANIE. Posunutia tvoria komutatívnu grupu.

5. AFINNÝ PRIESTOR (konečne!)

Doteraz sme sa euklidovským priestorom zaoberali tak, ako sa jeho chápanie vyvíjalo historicky: začínali sme s rovinou ako s množinou bodov a až postupne sme v nej objavili vektory, ktoré tvorili vektorový priestor. Tento prístup má však jeden závažný problém: v skutočnosti nevieme poriadne, čo to je, tá bodová rovina.

Teraz si uvedieme moderný axiomatický prístup, keď euklidovský (presnejšie afinný) priestor vybudujeme pomocou vektorového, ktorý už dobre poznáme.

5.1. Definícia afinného priestoru.

- bod – poloha
- vektor – posunutie, pohyb, translácia
- $A + \mathbf{u}$ – bod A posunutý pozdĺž vektora $\mathbf{u}$

DEFINÍCIA 1.6. **Afinný priestor** nad poľom k je trojica $(\mathbb{A}, V, +)$, kde

- $\mathbb{A}$ je množina bodov
- V je vektorový priestor nad poľom k
- $+: \mathbb{A} \times V \rightarrow \mathbb{A}$ je binárna operácia s vlastnosťami:
 - (i) $\forall P \in \mathbb{A} \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V: (P + \mathbf{u}) + \mathbf{v} = P + (\mathbf{u} + \mathbf{v})$
(kompatibilita so sčítaním vo vektorovom priestore, môžeme teda písať $A + \mathbf{u} + \mathbf{v}$)
 - (ii) $\forall P \in \mathbb{A}: P + \mathbf{0} = P$
 - (iii) $\forall P, Q \in \mathbb{A} \exists! \mathbf{u} \in V$ taký, že $Q = P + \mathbf{u}$.

Afinný priestor $(\mathbb{A}, V, +)$ budeme tiež označovať $(\mathbb{A}, V)$ alebo jednoducho $\mathbb{A}$. Vtedy vektorový priestor prislúchajúci afinnému priestoru $\mathbb{A}$ budeme označovať ako $V(\mathbb{A})$.

DEFINÍCIA 1.7. **Dimenzia (rozmer) afinného priestoru** je dimenzia jeho vektorovej zložky: $\dim \mathbb{A} := \dim V(\mathbb{A})$. n -rozmerný afinný priestor sa tiež zvykne označovať ako $\mathbb{A}^n$.

Vektor $\mathbf{u}$ zo záveru definície afinného priestoru budeme označovať ako $Q - P$ a o usporiadanej dvojici bodov P, Q (inými slovami: o orientovanej úsečke PQ) budeme hovoriť, že je **umiestnením vektora $\mathbf{u}$** . Čiže máme

$$\mathbf{u} = Q - P \quad \text{práve vtedy, keď} \quad Q = P + \mathbf{u}.$$

Toto bude „naša známa“ operácia $-: \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow V(\mathbb{A})$.

TVRDENIE 1.8. Pre všetky $P, Q, R \in \mathbb{A}$ platí:

- (i) $Q = P + (Q - P)$,
- (ii) $-(Q - P) = P - Q$,
- (iii) $(Q - P) + (R - Q) = (R - P)$ (Chaslesov vzorec),

(t.j. vektory vnímané ako orientované úsečky v takomto afinnom priestore sa správajú presne tak, ako od nich očakávame v analógii s našou prvotnou naivnou predstavou „reálny svet”).

Dôkaz.

- (i) Len prepísaná definícia operácie $-$.
- (ii) $P + (Q - P) + (P - Q) = Q + (P - Q) = P$, čiže $(Q - P) + (P - Q) = \mathbf{0}$, teda $P - Q$ a $Q - P$ sú navzájom opačné vektory.
- (iii) $P + (Q - P) + (R - Q) = Q + (R - Q) = R$, teda $(Q - P) + (R - Q)$ je ten istý vektor ako $(R - P)$.

□

POZOROVANIE. Zdá sa, že aritmetické operácie s bodmi a vektormi prirodzene fungujú tak, ako sme zvyknutí u čísel.

5.2. Bodovo-vektorový kalkulus. Je odľahčením od prísnych pravidiel počítania s bodmi a vektormi.

Kedy má kombinácia bodov zmysel? Keď ju viem formálne korektnými úpravami prepísať na lineárnu kombináciu vektorov, poprípade na súčet bodu a lineárnej kombinácie vektorov.

PRÍKLAD 1.9.

- (a) $\frac{1}{2}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{6}C = A + \frac{1}{3}(B - A) + \frac{1}{6}(C - A)$. Zadaný výraz je korektný.
- (b) $\frac{1}{2}A - \frac{1}{3}B - \frac{1}{6}C = \frac{1}{3}(B - A) + \frac{1}{6}(C - A)$. Zadaný výraz je korektný.
- (c) $A + B = ?$ Zadaný výraz nie je korektný.

DEFINÍCIA 1.10. **Afinná (barycentrická, niekedy aj lineárna) kombinácia bodov.** Nech $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{A}$, nech $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in k$. Nech $P \in \mathbb{A}$.

- Ak $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$, tak súčtom $\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n$ rozumieme bod

$$P + \lambda_1(P_1 - P) + \dots + \lambda_n(P_n - P).$$

- Ak $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$, tak súčtom $\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n$ rozumieme vektor

$$\lambda_1(P_1 - P) + \dots + \lambda_n(P_n - P).$$

Dôkaz korektnosti definície. Treba ukázať, že výsledný bod/vektor nezávisí od voľby bodu P .

Nech $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ a nech $Q \in \mathbb{A}$ je ľubovoľný bod. Potom

$$\begin{aligned} Q + \lambda_1(P_1 - Q) + \dots + \lambda_n(P_n - Q) &= \\ &= P + (Q - P) + \lambda_1(Q - P) + \dots + \lambda_n(Q - P) = \\ &= P + (\lambda_1 + \dots + \lambda_n)(Q - P) + \lambda_1(P_1 - Q) + \dots + \lambda_n(P_n - Q) = \\ &= P + \lambda_1[(Q - P) + (P_1 - Q)] + \dots + \lambda_n[(Q - P) + (P_n - Q)] = \\ &= P + \lambda_1(P_1 - P) + \dots + \lambda_n(P_n - P), \end{aligned}$$

kde prvá a posledná rovnosť vyplývajú z Tvrdenia 1.8.

Dôkaz pre prípad, keď $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$: dú.

□

5.3. Súradnicová sústava. Súradnice v n -rozmernom vektorovom priestore: potrebujeme bázu. Súradnice v n -rozmernom afinnom priestore: okrem bázy potrebujeme aj začiatok súradnicovej sústavy, potrebujeme afinný priestor „ukotviť“ v nejakom bode.

Afinná súradnicová sústava (alebo tiež **afinný súradnicový systém**) v n -rozmernom afinnom priestore je určená usporiadanou $(n+1)$ -ticou

$$(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n),$$

kde $O \in \mathbb{A}$ a $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ tvoria bázu $V(\mathbb{A})$. Takúto $(n+1)$ -ticu tiež nazývame **repérom**. Každý bod P afinného priestoru $\mathbb{A}$ sa potom dá jednoznačne vyjadriť v tvare

$$P = O + p_1\mathbf{e}_1 + p_2\mathbf{e}_2 + \dots + p_n\mathbf{e}_n,$$

čo skrátene zapisujeme ako $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, a n -ticu $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ nazývame **súradnicami** bodu P . Existencia aj jednoznačnosť súradníc bodu vyplýva z

$$P - O = p_1\mathbf{e}_1 + p_2\mathbf{e}_2 + \dots + p_n\mathbf{e}_n$$

a lineárnej algebry ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ tvoria bázu $V(\mathbb{A})$).

$$\begin{array}{ll} O & - \text{začiatok súradnicovej sústavy} \\ E_i = O + \mathbf{e}_i & - \text{jednotkové body súradnicovej sústavy} \\ \overrightarrow{OE_i} & - \text{súradnicové osi} \end{array}$$

PRÍKLAD 1.11. Napíšte súradnice bodu $A = (2, 1)$ v súradnicovej sústave $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, keď

- (1) $O = (-1, 3), \mathbf{e}_1 = (1, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1),$
- (2) $O = (0, 0), \mathbf{e}_1 = (1, 0), \mathbf{e}_2 = (1, 1),$
- (3) $O = (2, 3), \mathbf{e}_1 = (0, -1), \mathbf{e}_2 = (1, 1).$

Nech $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ je afinná súradnicová sústava n -rozmerného afinného priestoru $\mathbb{A}$. Nech $P = (p_1, \dots, p_m) = O + p_1\mathbf{e}_1 + \dots + p_n\mathbf{e}_n$ je bod a $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) = v_1\mathbf{e}_1 + \dots + v_n\mathbf{e}_n$ je vektor. Potom **rozšírené súradnice bodu P resp. vektora $\mathbf{v}$** je $(n+1)$ -tica $(p_1, p_2, \dots, p_n, 1)$ resp. $(v_1, \dots, v_n, 0)$.

Alternatívne, body $E_0, E_1, \dots, E_n$ v n -rozmernom afinnom priestore tvoria **barycentrický súradnicový systém**, ak $(n+1)$ -tica

$$(E_0, E_1 - E_0, E_2 - E_0, \dots, E_n - E_0)$$

tvorí afinnú súradnicovú sústavu, t.j. každý bod A sa dá jednoznačne vyjadriť v tvare

$$P = p_0E_0 + p_1E_1 + \dots + p_nE_n, \quad \text{kde } p_0 + \dots + p_n = 1.$$

Číslam $p_0, \dots, p_n$ potom hovoríme, že ide o **barycentrické súradnice** bodu P vzhľadom na danú barycentrickú sústavu.

Existencia aj jednoznačnosť vyplýva z

$$P = p_0E_0 + p_1E_1 + \dots + p_nE_n = E_0 + p_1(E_1 - E_0) + \dots + p_n(E_n - E_0).$$