

1 Afinný priestor

*„Pre toho, kto sa chce vyznať problematike veci,
je užitočné dostatočne sa ňou zaoberať.“*

Aristoteles

1.1 Štruktúra množiny bodov euklidovskej roviny

Aby sme získali nejaké nástroje pre prácu a výpočty v euklidovskom priestore, je dobré hlbšie porozumieť štruktúre tohoto priestoru. Euklidovský priestor pozostáva z bodov, ale nie hocijakú množinu bodov chceme nazvať euklidovským priestorom.

Pod pojmom „euklidovská rovina“ poznáte zrejme rovinu $\mathbb{R}^2$ (možno ste ju označovali aj ako $\mathbb{E}^2$), v ktorej vieme každému bodu priradiť jeho súradnice, dvojicu reálnych čísel. Budeme teda pracovať s touto predstavou a pokúsime sa popísať vlastnosti tejto roviny, ktoré nám neskôr môžu pomôcť pri riešení komplikovanejších úloh.

Definícia 1.1. **Stred úsečky** AB je taký bod S na úsečke AB , ktorého vzdialenosť od A a od B sú rovnaké:

- $S \in AB$,
- $|SA| = |SB|$.

Ak sa pozrieme na súradnice bodov $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, potom súradnice stredu S úsečky AB vypočítame

$$S = \left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2} \right). \quad (1)$$

Pozorovanie. Aj keď čiastková operácia, výpočet „polovice bodu“, žiaden geometrický zmysel nemá, výpočet aritmetického priemeru dvojice bodov $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ má zjavný geometrický význam: ide o binárnu operáciu $\mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$, ktorá dvom bodom priradí stred úsečky, ktorú určujú.

Úloha 1. Nájdite súradnice ťažiska $\triangle ABC$ pre $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ a $C = (c_1, c_2)$.

Definícia 1.2. Nech $S \in \mathbb{A}^2$ je pevne daný bod. **Stredová súmernosť** f so stredom S je zobrazenie množiny bodov roviny do seba, ktoré každý bod A zobrazí na bod $f(A) = A'$ taký, že S je stredom AA' .

Obraz bodu v stredovej súmernosti je definovaný ako bod s určenými vlastnosťami. Pre úplnosť treba ukázať, že pre každý bod A naozaj existuje taký bod A' , že S je stredom AA' , a navyše je taký bod jediný. Tým overíme, že stredová súmernosť f , ako sme ju popísali, je dobre definované zobrazenie.

odkaz do transformácií roviny (konštrukčné úlohy) na stredovú súmernosť

Definícia 1.3. Orientovaná úsečka AB je úsečka AB spolu s poradím bodov A, B , z ktorých jeden budeme nazývať **začiatočným bodom** a druhý **koncovým bodom** orientovanej úsečky. Ak $A = B$, potom AB je **nulová** (orientovaná) úsečka.

Pri popisovaní orientovanej úsečky budeme používať konvenciu, že prvý bod je začiatočný a druhý koncový, t.j. v orientovanej úsečke AB je bod A začiatočný a bod B koncový.

Každá orientovaná úsečka určuje vektor. Každý vektor má reprezentáciu medzi orientovanými úsečkami, táto reprezentácia ale nie je jednoznačná. Rôzne orientované úsečky môžu určovať ten istý vektor. Popíšme si to presnejšie.

- Všetky nulové úsečky nech reprezentujú nulový vektor.
- Dve nenulové orientované úsečky AB a CD reprezentujú ten istý vektor, ak
 - sú zhodné ($|AB| = |CD|$),
 - majú rovnaký smer, teda $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$,
 - majú rovnakú orientáciu, čo v tomto prípade môžeme popísať tak, že
 - * koncové body B a D ležia na tej istej strane od priamky $\overleftrightarrow{AC}$, ak AB a CD neležia na tej istej priamke,
 - * $\overrightarrow{AB} \subset \overrightarrow{CD}$ alebo $\overrightarrow{CD} \subset \overrightarrow{AB}$, ak AB a CD ležia na tej istej priamke.

Uvedený popis síce dáva dobrú geometrickú predstavu o tom, kedy dvojica orientovaných úsečiek reprezentuje ten istý vektor, no pre praktické výpočty je pomerne ťažkopádny. Preto sa nezriedka používa alternatívny popis:

- dve rôzne orientované úsečky AB a CD reprezentujú ten istý vektor práve vtedy, keď stred úsečky AD splýva so stredom úsečky BC .

Pomocou bodov v euklidovskej rovine sme popísali vektory. Zhrňme si celú konštrukciu teraz v definícii:

Tvrdenie-Definícia 1.4. Na množine všetkých orientovaných úsečiek v rovine uvažujeme binárnu reláciu: pre orientované úsečky AB a CD nech $AB \sim CD$ práve vtedy, keď stred úsečky AD a stred úsečky BC sú jeden a ten istý bod. Potom relácia $\sim$ je reláciou ekvivalencie a **vektorom** nazveme triedu ekvivalencie orientovaných úsečiek vzhľadom na reláciu $\sim$.

relácia ekvivalencie?

Ak je nejaký vektor reprezentovaný orientovanou úsečkou AB , hovoríme, že AB je **umiestnením vektora**, alebo tiež, že vektor je umiestnený do bodu A (začiatočného bodu orientovanej úsečky). Zjavne platí, že pre ľubovoľný bod A má ľubovoľný vektor reprezentáciu orientovanou úsečkou AX pre nejaké X , inak: každý vektor vieme umiestniť do ľubovoľného bodu roviny.

Pri bodoch vieme pomocou súradníc okamžite rozhodnúť, či sú dva body rôzne, alebo ide o ten istý bod: ich súradnice sa buď líšia alebo sú rovnaké. Analogicky ako body si aj vektory budeme reprezentovať pomocou súradníc, ktoré budú mať tú istú vlastnosť: dva vektory sú totožné, ak majú rovnaké súradnice. Súradnice vektora určeného orientovanou úsečkou AB , ak $A = (a_1, a_2)$ a $B = (b_1, b_2)$, nech sú $(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$.

Úloha 2. Overte, že usporiadaná dvojica čísel (t.j. súradnice) jednoznačne určuje vektor v rovine a naopak. Potrebujete pre body $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$ a $D = (d_1, d_2)$ ukázať, že

- ak orientované úsečky AB a CD reprezentujú ten istý vektor, potom $(b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (d_1 - c_1, d_2 - c_2)$ a
- ak $(b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (d_1 - c_1, d_2 - c_2)$, potom orientované úsečky AB a CD reprezentujú ten istý vektor.

Prirodzene budeme preto odteraz vektor určený orientovanou úsečkou AB zapisovať ako $B - A$.

Pozorovanie. Máme tak ďalšiu zmysluplnú operáciu s bodmi: odčítavanie, pričom rozdielom dvoch bodov je vektor.

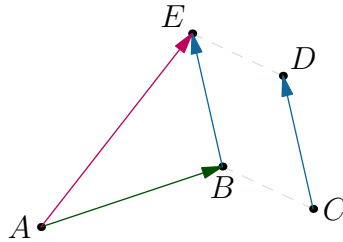
Na záver sa ešte zamyslíme, že množine vektorov v euklidovskej rovine vieme dať štruktúru vektorového priestoru (dôkladné dokazovanie tu vynecháme, dôkaz iba načrtneme): odkaz do lineárnej algebry

- sčítavanie vektorov reprezentovaných orientovanými úsečkami AB a CD : vektor $D - C$ umiestnime do bodu B , t.j. nájdeme bod E taký, že

$E - B = D - C$ (orientované úsečky BE a CD reprezentujú ten istý vektor), potom súčet je reprezentovaný orientovanou úsečkou AE :

$$(B - A) + (D - C) = (B - A) + (E - B) = E - A.$$

Potrebuje o tejto operácii zodpovedať niekoľko otázok



Obr. 1: Sčítanie vektorov $B - A$ a $D - C$.

- je takéto sčítanie dobre definované? inak: nezávisí výsledok od voľby reprezentácie vektorov $B - A$ a $D - C$?
- je asociatívne?
- je komutatívne?
- existuje neutrálny prvok vzhľadom na toto sčítanie?
- existuje ku každému prvku opačný?
- vektory vieme násobiť skalárom: rozlíšime prípady $t = 0, t < 0, t > 0$:
 - ak $t = 0$, potom $t \cdot (B - A) = \mathbf{0}$,
 - ak $t > 0$, vieme že

$$\forall (B - A) \forall t \in \mathbb{R}^+ \exists ! C \in \overrightarrow{AB} : |AC| = t|AB|.$$

a stanovíme $t \cdot (B - A) = C - A$,

- ak $t < 0$, potom $t \cdot (B - A) = A - C$, kde $C - A = (-t) \cdot (B - A)$.

Znovu treba ešte overiť, že

- takéto násobenie je dobre definované, t.j. že výsledok operácie nezávisí od voľby reprezentácie vektora.
- platí distributívnosť násobenia vzhľadom na sčítanie (dôkaz sa rozpadá na spústu prípadov).

Pomocou euklidovského priestoru sme skonštruovali vektorový priestor $V(\mathbb{E})$. Binárna operácia, ktorá orientovanej úsečke AB priradí vektor, ktorý je ňou určený, je zobrazením $\mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow V(\mathbb{E})$, $(A, B) \mapsto B - A$.

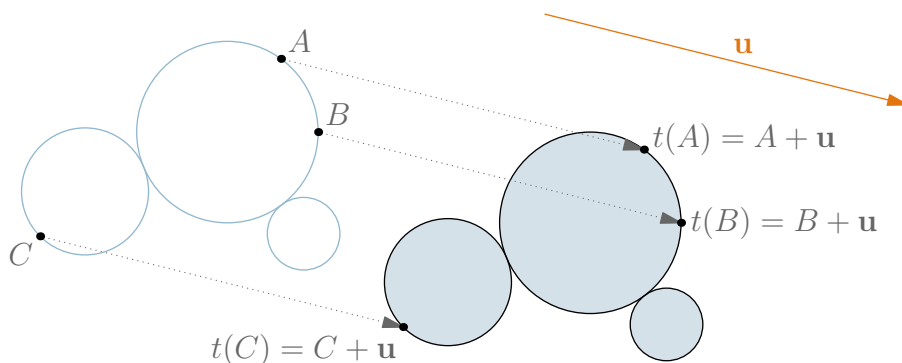
1.2 Posunutie

prepojiť s transformáciami roviny (konštrukčné úlohy?)

Skúmame ďalej súvis medzi $\mathbb{E}$ a $V(\mathbb{E})$.

Úloha 3. Čo viete povedať o zobrazení, ktoré vznikne zložením dvoch stredových súmerností?

Definícia 1.5. Nech $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ je pevne zvolený vektor. **Posunutie (translácia)** t v smere (pozdĺž) vektora $\mathbf{u}$ je zobrazenie $\mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$, ktoré každý bod $A = (a_1, a_2)$ zobrazí na bod $t(A) = A' = A + \mathbf{u} = (a_1 + u_1, a_2 + u_2)$.



Obr. 2: Posunutie v smere vektora $\mathbf{u}$.

Pozorovanie. Súčet bodu A a vektora $\mathbf{u}$ je tiež zmysluplná operácia: výsledkom je bod, do ktorého sa zobrazí bod A transláciou pozdĺž vektora $\mathbf{u}$.

Poznámka 1.6. Je veľmi výhodné mať v rovine zavedené súradnice alebo mať aspoň nejaký rozumný kalkulus s bodmi a vektormi, keď chceme popísať posunutie. Charakterizovať posunutie synteticky (prostriedkami končtrukčnej geometrie) je náročnejšie, napríklad:

- Izometria (zobrazenie zachovávajúce dĺžky) f je posunutím, ak zachováva orientáciu a je buď identitou alebo nemá žiaden samodružný (pevný) bod. Alebo:
- Izometria f je posunutím, ak pre všetky dvojice bodov X, Y platí, že úsečky $Xf(Y)$ a $Yf(X)$ majú spoločný stred.

Posunutie je jedno-jednoznačne dané vektorom posunutia:

- každý vektor jednoznačne určí posunutie (vyplýva z definície posunutia)
- rôzne vektory určujú rôzne posunutia (overí sa ľahko, stačí nájsť jeden bod, v ktorom sa posunutia líšia)

Máme tak bijekciu medzi vektormi v $\mathbb{E}^2$ a posunutiami $\mathbb{E}^2$.

Poznámka 1.7. Platí aj opačná implikácia k tej v Úlohe 3: Každé posunutie sa dá napísať ako zloženie dvoch stredových súmerností. Vedeli by ste to ukázať?

Vektory vieme sčítavať... posunutia vieme skladať: ak t_1 je translácia pozdĺž $\mathbf{u}_1$ a t_2 je translácia pozdĺž $\mathbf{u}_2$, potom $t_2 \circ t_1 = t_1 \circ t_2$ je translácia pozdĺž $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$.

Definícia 1.8. Dvojica $(G, \circ)$, kde $\circ: G \times G \rightarrow G$ je binárna operácia, tvorí grupu, ak

- pre všetky $g_1, g_2, g_3 \in G$ platí $(g_1 \circ g_2) \circ g_3 = g_1 \circ (g_2 \circ g_3)$ (operácia $\circ$ je **acosiatívna**),
- existuje $e \in G$ také, že $e \circ g = g \circ e = g$ pre všetky $g \in G$ (e je tzv. **neutrálny prvok** vzhľadom na operáciu $\circ$),
- pre každý prvok $g \in G$ existuje $g' \in G$ tak, že $g \circ g' = g' \circ g = e$ (g' je tzv. **opačný prvok** k prvku g vzhľadom na operáciu $\circ$).

Pokiaľ je operácia $\circ$ navyše komutatívna (t.j. platí $g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$ pre všetky $g_1, g_2 \in G$), potom hovoríme, že $(G, \circ)$ (alebo jednoducho G) je **komutatívna grupa**.

Pozorovanie. Posunutia tvoria komutatívnu grupu.

1.3 Afinný priestor (konečne!)

Doteraz sme sa euklidovským priestorom zaoberali tak, ako sa jeho chápanie vyvíjalo historicky: začínali sme s rovinou ako s množinou bodov a až postupne sme v nej objavili vektory, ktoré tvorili vektorový priestor. Tento prístup má však jeden závažný problém: v skutočnosti nevieme poriadne, čo to je, tá bodová rovina.

Teraz si uvedieme moderný axiomatický prístup, keď afinný a následne euklidovský priestor vybudujeme pomocou vektorového, ktorý už dobre poznáme z lineárnej algebry.

1.3.1 Definícia afinného priestoru

Keď si veľmi stručne zhrnieme naše doterajšie znalosti o bodoch a vektoroch, máme zhruba takúto predstavu:

- bod – poloha
- vektor – posunutie, pohyb, translácia
- $A + \mathbf{u}$ – bod A posunutý pozdĺž vektora $\mathbf{u}$

Teraz budeme dôraz klásť na presnosť a dôslednosť popisu priestoru bodov. Vektory aj body môžu byť ľubovoľné objekty, ktoré svojimi vlastnosťami vyhovujú definícii. Preto vlastnosti, ktoré nám z našej geometrickej predstavy boli akosi jasné, bude treba dokázať (Tvrdenie 1.11): potrebujeme sa presvedčiť, že platia aj pri abstraktnej axiomatickej konštrukcii vektorového a afinného priestoru.

Definícia 1.9. **Afinný priestor** nad poľom k je trojica $(\mathbb{A}, V, +)$, kde

- $\mathbb{A}$ je množina bodov
- V je vektorový priestor nad poľom k
- $+: \mathbb{A} \times V \rightarrow \mathbb{A}$ je binárna operácia s vlastnosťami:
 - (i) $\forall P \in \mathbb{A} \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V : (P + \mathbf{u}) + \mathbf{v} = P + (\mathbf{u} + \mathbf{v})$
(kompatibilita so sčítaním vo vektorovom priestore, môžeme teda písať $A + \mathbf{u} + \mathbf{v}$)
 - (ii) $\forall P \in \mathbb{A} : P + \mathbf{0} = P$
 - (iii) $\forall P, Q \in \mathbb{A} \exists! \mathbf{u} \in V$ taký, že $Q = P + \mathbf{u}$.

Afinný priestor $(\mathbb{A}, V, +)$ budeme tiež označovať $(\mathbb{A}, V)$ alebo jednoducho $\mathbb{A}$. Vtedy vektorový priestor prislúchajúci afinnému priestoru $\mathbb{A}$ budeme označovať ako $V(\mathbb{A})$.

Definícia 1.10. **Dimenzia (rozmer) afinného priestoru** je dimenzia jeho vektorovej zložky: $\dim \mathbb{A} := \dim V(\mathbb{A})$. n -rozmerný afinný priestor sa tiež zvykne označovať ako $\mathbb{A}^n$.

Vektor $\mathbf{u}$ zo záveru definície afinného priestoru budeme označovať ako $Q - P$ a o usporiadanej dvojici bodov P, Q (inými slovami: o orientovanej úsečke PQ) budeme hovoriť, že je **umiestnením vektora $\mathbf{u}$** . Čiže máme

$$\mathbf{u} = Q - P \quad \text{práve vtedy, keď} \quad Q = P + \mathbf{u}.$$

Toto bude „naša známa“ operácia $-: \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow V(\mathbb{A})$.

Tvrdenie 1.11. Pre všetky $P, Q, R \in \mathbb{A}$ platí:

- (i) $Q = P + (Q - P)$,
- (ii) $-(Q - P) = P - Q$,
- (iii) $(Q - P) + (R - Q) = (R - P)$ (Chaslesov vzorec),

(t.j. vektory, ak ich interpretujeme ako orientované úsečky v takomto afinnom priestore podľa Definície 1.9 sa správajú presne tak, ako od nich očakávame v analógii s našou prvotnou naivnou predstavou „reálny svet”).

Dôkaz.

- (i) Len prepísaná definícia operácie $-$.
- (ii) $P + (Q - P) + (P - Q) = Q + (P - Q) = P$, čiže $(Q - P) + (P - Q) = \mathbf{0}$, teda $P - Q$ a $Q - P$ sú navzájom opačné vektory.
- (iii) $P + (Q - P) + (R - Q) = Q + (R - Q) = R$, teda $(Q - P) + (R - Q)$ je ten istý vektor ako $(R - P)$.

□

Pozorovanie. Zdá sa, že aritmetické operácie s bodmi a vektormi prirodzene fungujú tak, ako sme zvyknutí u čísel.

1.3.2 Bodovo-vektorový kalkulus

Je odľahčením od prísnych pravidiel počítania s bodmi a vektormi.

Kedy má kombinácia bodov zmysel? Keď ju viem formálne korektnými úpravami prepísať na lineárnu kombináciu vektorov, poprípade na súčet bodu a lineárnej kombinácie vektorov.

Príklad 1.12.

- (a) $\frac{1}{2}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{6}C = A + \frac{1}{3}(B - A) + \frac{1}{6}(C - A)$. Zadaný výraz je korektný.
- (b) $\frac{1}{2}A - \frac{1}{3}B - \frac{1}{6}C = \frac{1}{3}(B - A) + \frac{1}{6}(C - A)$. Zadaný výraz je korektný.
- (c) $A + B = ?$ Zadaný výraz nie je korektný.

Definícia 1.13. **Afinná (barycentrická, niekedy aj lineárna) kombinácia bodov.**

Nech $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{A}$, nech $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in k$. Nech $P \in \mathbb{A}$.

- Ak $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$, tak súčtom $\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n$ rozumieme bod

$$P + \lambda_1(P_1 - P) + \dots + \lambda_n(P_n - P).$$
- Ak $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$, tak súčtom $\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n$ rozumieme vektor

$$\lambda_1(P_1 - P) + \dots + \lambda_n(P_n - P).$$

Dôkaz korektnosti definície. Treba ukázať, že výsledný bod/vektor nezávisí od voľby bodu P .

Nech $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ a nech $Q \in \mathbb{A}$ je ľubovoľný bod. Potom

$$\begin{aligned} Q + \lambda_1(P_1 - Q) + \dots + \lambda_n(P_n - Q) &= \\ &= P + (Q - P) + \lambda_1(P_1 - Q) + \dots + \lambda_n(P_n - Q) = \\ &= P + (\lambda_1 + \dots + \lambda_n)(Q - P) + \lambda_1(P_1 - Q) + \dots + \lambda_n(P_n - Q) = \\ &= P + \lambda_1[(Q - P) + (P_1 - Q)] + \dots + \lambda_n[(Q - P) + (P_n - Q)] = \\ &= P + \lambda_1(P_1 - P) + \dots + \lambda_n(P_n - P), \end{aligned}$$

kde prvá a posledná rovnosť vyplývajú z Tvrdenia 1.11.

Dôkaz pre prípad, keď $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$ je analogický. $\square$

1.3.3 Súradnicová sústava

Súradnice v n -rozmernom vektorovom priestore: potrebujeme bázu. Súradnice v n -rozmernom afinnom priestore: okrem bázy potrebujeme aj začiatok súradnicovej sústavy, potrebujeme afinný priestor „ukotviť“ v nejakom bode.

Afinná súradnicová sústava (alebo tiež **afinný súradnicový systém**) v n -rozmernom afinnom priestore je určená usporiadanou $(n + 1)$ -ticou

$$(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n),$$

kde $O \in \mathbb{A}$ a $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ tvoria bázu $V(\mathbb{A})$. Takúto $(n + 1)$ -ticu tiež nazývame **repérom**. Každý bod P afinného priestoru $\mathbb{A}$ sa potom dá jednoznačne vyjadriť v tvare

$$P = O + p_1 \mathbf{e}_1 + p_2 \mathbf{e}_2 + \dots + p_n \mathbf{e}_n,$$

čo skrátene zapisujeme ako $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, a n -ticu $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ nazývame **súradnicami** bodu P . Existencia aj jednoznačnosť súradníc bodu vyplýva z

$$P - O = p_1 \mathbf{e}_1 + p_2 \mathbf{e}_2 + \dots + p_n \mathbf{e}_n$$

a lineárnej algebry ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ tvoria bázu $V(\mathbb{A})$).

$$\begin{array}{ll} O & - \text{začiatok súradnicovej sústavy} \\ E_i = O + \mathbf{e}_i & - \text{jednotkové body súradnicovej sústavy} \\ \overrightarrow{OE_i} & - \text{súradnicové osi} \end{array}$$

Príklad 1.14. Napíšte súradnice bodu $A = (2, 1)$ v súradnicovej sústave $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, keď

1. $O = (-1, 3), \mathbf{e}_1 = (1, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1),$
2. $O = (0, 0), \mathbf{e}_1 = (1, 0), \mathbf{e}_2 = (1, 1),$
3. $O = (2, 3), \mathbf{e}_1 = (0, -1), \mathbf{e}_2 = (1, 1).$

Nech $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ je afinná súradnicová sústava n -rozmerného afinného priestoru $\mathbb{A}$. Nech $P = (p_1, \dots, p_m) = O + p_1\mathbf{e}_1 + \dots + p_n\mathbf{e}_n$ je bod a $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) = v_1\mathbf{e}_1 + \dots + v_n\mathbf{e}_n$ je vektor. Potom **rozšírené súradnice bodu P resp. vektora $\mathbf{v}$** je $(n+1)$ -tica $(p_1, p_2, \dots, p_n, 1)$ resp. $(v_1, \dots, v_n, 0)$.

Alternatívne, body $E_0, E_1, \dots, E_n$ v n -rozmernom afinnom priestore tvoria **barycentrický súradnicový systém**, ak $(n+1)$ -tica

$$(E_0, E_1 - E_0, E_2 - E_0, \dots, E_n - E_0)$$

tvorí afinnú súradnicovú sústavu, t.j. každý bod A sa dá jednoznačne vyjadriť v tvare

$$P = p_0E_0 + p_1E_1 + \dots + p_nE_n, \quad \text{kde} \quad p_0 + \dots + p_n = 1.$$

Číslam $p_0, \dots, p_n$ potom hovoríme, že ide o **barycentrické súradnice** bodu P vzhľadom na danú barycentrickú sústavu.

Existencia aj jednoznačnosť vyplýva z

$$P = p_0E_0 + p_1E_1 + \dots + p_nE_n = E_0 + p_1(E_1 - E_0) + \dots + p_n(E_n - E_0).$$

2 Afinné zobrazenia

Definícia 2.1. Nech $A, B \in \mathbb{A}(k)$, $A \neq B$. **Priamka** $\overleftrightarrow{AB}$ je množina

$$\{(1-t)A + tB \mid \forall t \in k\} = \{A + t(B - A) \mid \forall t \in k\}.$$

2.1 Definícia afinného zobrazenia

Definícia 2.2. Nech $\mathbb{A}_1$ a $\mathbb{A}_2$ sú afinné priestory nad rovnakým poľom. Zobrazenie $f: \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$ nazývame **afinným**, ak zachováva afinné kombinácie bodov. T.j. ak pre ľubovoľné $P_0, \dots, P_r \in \mathbb{A}_1$ a $\lambda_0, \dots, \lambda_r \in k$ také, že $\sum_{i=0}^r \lambda_i = 1$, platí

$$f\left(\sum_{i=0}^r \lambda_i P_i\right) = \sum_{i=0}^r \lambda_i f(P_i). \quad (2)$$

Príklad 2.3. Stredová súmernosť v $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ so stredom v $(0, 0)$ je afinné zobrazenie: bod $B_i = (b_{i1}, b_{i2})$ sa zobrazuje na bod $B'_i = (-b_{i1}, -b_{i2})$ a odtiaľ ľahko odvodíme, že

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=0}^r \lambda_i B_i\right) &= f\left(\left(\sum_{i=0}^r \lambda_i b_{i1}, \sum_{i=0}^r \lambda_i b_{i2}\right)\right) = \left(-\sum_{i=0}^r \lambda_i b_{i1}, -\sum_{i=0}^r \lambda_i b_{i2}\right) \\ &= \sum_{i=0}^r \lambda_i (-b_{i1}, -b_{i2}) = \sum_{i=0}^r \lambda_i f(B_i). \end{aligned}$$

Príklad 2.4. Nech $f: \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ je zobrazenie, ktoré bod so súradnicami (b_1, b_2) zobrazí na bod so súradnicami $(b_1, 3b_2)$. Podobne ako v predchádzajúcom príklade overíme, že ide o afinné zobrazenie.

Príklad 2.5. Zobrazenie $\mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, $(a, b) \mapsto (a, |b|)$ nie je afinným zobrazením: vieme nájsť body A, B, C tak, že $C = \lambda_1 A + \lambda_2 B$ pre nejaké λ_1, λ_2 ($\lambda_1 + \lambda_2 = 1$), ale $f(C) \neq \lambda_1 f(A) + \lambda_2 f(B)$.

Príklad 2.6. Premietanie na x -os:

$$\mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{A}^2(\mathbb{R}), \quad (a_1, a_2) \mapsto (a_1, 0)$$

je afinné zobrazenie.

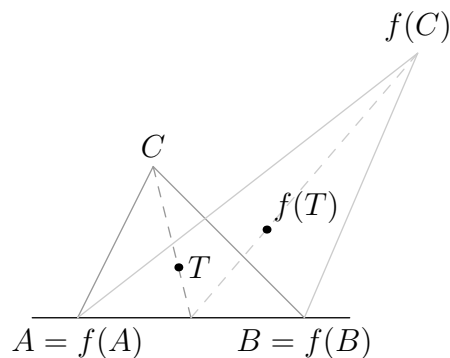
Tvrdenie 2.7. Kolineárne body sa afinným zobrazením zobrazia na kolineárne body. Obrazom priamky v afinnom zobrazení je priamka alebo bod.

Dôkaz. Nech P_1, P_2, P_3 sú kolineárne. Ak $P_1 = P_2$, tvrdenie zjavne platí. Inak nech $P_1 \neq P_2$. Potom $P_3 = (1 - \lambda)P_1 + \lambda P_2$, teda $f(P_3) = (1 - \lambda)f(P_1) + \lambda f(P_2)$, teda $\overleftrightarrow{f(P_1)f(P_2)}, f(P_3)$ sú kolineárne. Ak $f(P_1) = f(P_2)$, obrazom priamky $\overleftrightarrow{P_1 P_2}$ je bod. V opačnom prípade je ľubovoľný bod priamky $\overleftrightarrow{f(P_1)f(P_2)}$, t.j. bod $(1 - \lambda')f(P_1) + \lambda'f(P_2)$ obrazom bodu $(1 - \lambda')P_1 + \lambda'P_2$. $\square$

2.2 Pevné body afinnej transformácie

Príklad 2.8. Nech afinné zobrazenie $\mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ zobrazí dva rôzne body A, B na seba, t.j. $f(A) = A$, $f(B) = B$ (ide o tzv. **pevné** body). Bod $C \notin \overleftrightarrow{AB}$ sa zobrazí na $f(C)$. Potom sa napr. ťažisko $\triangle ABC$ zobrazí na ťažisko $\triangle f(A)f(B)f(C) = \triangle ABf(C)$. Overíme ešte, že všetky body na priamke $\overleftrightarrow{AB}$ sú pevné. Nech $X \in \overleftrightarrow{AB}$, teda $X = (1 - \lambda)A + \lambda B$. Potom

$$f(X) = f((1 - \lambda)A + \lambda B) = (1 - \lambda)f(A) + \lambda f(B) = (1 - \lambda)A + \lambda B = X.$$



Obr. 3: Afinita roviny

Príklad ilustroval dôležité pojmy:

Definícia 2.9. Ak $f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ je afinné zobrazenie priestoru $\mathbb{A}$ do seba, potom f nazývame aj **afinnou transformáciou**. Bijektívna afinná transformácia priestoru $\mathbb{A}$ sa nazýva tiež **afinitou** priestoru $\mathbb{A}$.

Nech f je afinná transformácia $\mathbb{A}$ a nech $P \in \mathbb{A}$. Ak $f(P) = P$, potom P nazývame **pevným (samodružným, invariantným)** bodom zobrazenia f .

Príklad 2.10. Premietanie na x -os, posunutie aj stredová súmernosť sú afinnými transformáciami $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$. Z nich posunutie a stredová súmernosť sú aj afinitami.

A ešte už dokázané (v Príklade 2.8)

Tvrdenie 2.11. Nech f je afinná transformácia a nech A, B ($A \neq B$) sú jej pevné body. Potom všetky body na priamke $\overleftrightarrow{AB}$ sú pevné.

2.3 Ďalšie vlastnosti afinných zobrazení

Veta 2.12. Zobrazenie $f: \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$ je afinné práve vtedy, keď pre každé $P, Q \in \mathbb{A}_1$ platí:

$$f((1 - \lambda)P + \lambda Q) = (1 - \lambda)f(P) + \lambda f(Q).$$

Dôkaz. Nech je zobrazenie afinné, potom z definície afinného zobrazenia zachováva afinné kombinácie ľubovoľných n -tíc bodov, teda špeciálne aj ľubovoľných dvojíc.

Nech naopak zobrazenie f zachováva afinné kombinácie dvojíc bodov. Indukciou vzhlľadom na počet bodov v afinnej kombinácii ukážeme, že toto zobrazenie potom zachováva afinné kombinácie ľubovoľného konečného počtu bodov. Pre dva body platí tvrdenie z predpokladu, môžeme teda hneď pristúpiť k indukčnému kroku.

Nech zobrazenie zachováva afinnú kombináciu n bodov (indukčný predpoklad). Nech $\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$. Potom

$$\begin{aligned} f(\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n) \\ &= f\left(\lambda_0 P_0 + (1 - \lambda_0) \left(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_0} P_1 + \dots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_0} P_n\right)\right) \\ &= \lambda_0 f(P_0) + (1 - \lambda_0) f\left(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_0} P_1 + \dots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_0} P_n\right) \\ &= \lambda_0 f(P_0) + \lambda_1 f(P_1) + \dots + \lambda_n f(P_n). \end{aligned}$$

Zobrazenie zachováva afinné kombinácie bodov a teda je afinné. $\square$

Poznámka 2.13. V geometrii sa často stretávame s tzv. **deliacim pomerom** trojice kolineárnych bodov: v reálnom priestore je číslo $(ABC) \in \mathbb{R}$ deliacim pomerom trojice bodov A, B, C (v tomto poradí a za predpokladu $C \neq B$), ak

$$C - A = (ABC)(C - B),$$

t.j. vektor $C - A$ je (ABC) -násobkom vektora $C - B$. Vtedy sa afinné zobrazenie často definuje aj ako zobrazenie afinných priestorov, ktoré zachováva kolinearitu a deliaci pomer bodov.

Príklad 2.14. Nech $p, q \subset \mathbb{A}^2$ sú rôznobežné priamky. Nech $f: \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ zobrazí bod $B = (b_1, b_2)$ na bod $B' = p \cap q^B$, kde q^B je priamka prechádzajúca bodom B a rovnobežná s q (**rovnobežné premietanie** na priamku p). Z podobnosti trojuholníkov pomocou predchádzajúcej vety vieme vyargumentovať, že rovnobežné premietanie je afinným zobrazením.

Veta 2.15. Nech $f: \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$ je afinné zobrazenie. Nech $B - A = D - C$, t.j. usporiadané dvojice bodov (A, B) a (C, D) sú umiestneniami toho istého vektora. Potom aj obrazy týchto dvojíc sú umiestneniami toho istého vektora: $f(B) - f(A) = f(D) - f(C)$.

Dôkaz. Ak $B - A = D - C$, potom stredy úsečiek AD a BC splývajú; označme tento spoločný bod S :

$$S = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}D = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C.$$

Kedže zobrazenie f je afinné, platí aj

$$f(S) = \frac{1}{2}f(A) + \frac{1}{2}f(D) = \frac{1}{2}f(B) + \frac{1}{2}f(C).$$

Z poslednej rovnosti tak dostávame

$$\frac{1}{2}f(A) - \frac{1}{2}f(B) = \frac{1}{2}f(C) - \frac{1}{2}f(D),$$

odkiaľ už dostaneme dokazovanú rovnosť. $\square$

Definícia 2.16. Nech $f: \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$ je afinné zobrazenie. Zobrazenie

$$Df: V(\mathbb{A}_1) \rightarrow V(\mathbb{A}_2),$$

ktoré vektoru $\mathbf{u} = B - A$ priradí vektor $Df(\mathbf{u}) = f(B) - f(A)$ sa nazýva **asociovaným** k zobrazeniu f alebo tiež **vektorovou**, **lineárnou** alebo **homogénnou** zložkou afinného zobrazenia f .

Kedže $\mathbf{u} = (B + \mathbf{u}) - B$ pre akýkoľvek vektor $\mathbf{u}$ a bod B , dostávame

$$Df(\mathbf{u}) = Df((B + \mathbf{u}) - B) = f(B + \mathbf{u}) - f(B),$$

teda z definície asociovaného zobrazenia Df k afinnému zobrazeniu f môžeme tiež písať

$$f(B + \mathbf{u}) = f(B) + Df(\mathbf{u}).$$

Veta 2.17. Vektorová zložka Df afinného zobrazenia $f: \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$ je lineárnym zobrazením vektorových priestorov $V(\mathbb{A}_1) \rightarrow V(\mathbb{A}_2)$.

Dôkaz. Potrebujeme ukázať, že

$$\begin{aligned} Df(\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= Df(\mathbf{v}) + Df(\mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w}, \\ Df(c\mathbf{v}) &= cDf(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \quad \forall c. \end{aligned}$$

Zvoľme $P \in \mathbb{A}_1$ ľubovoľne. Nech $Q = P + \mathbf{v}$ a $R = Q + \mathbf{w}$. Potom

$$\begin{aligned} Df(\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= Df(R - P) = f(R) - f(P) = f(R) - f(Q) + f(Q) - f(P) \\ &= Df(\mathbf{w}) + Df(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

Nech teraz $c \in k$ a nech $S = P + c\mathbf{v}$. Potom

$$\begin{aligned} Df(c\mathbf{v}) &= f(S) - f(P) = f((1 - c)P + cQ) - f(P) \\ &= (1 - c)f(P) + cf(Q) - f(P) = c(f(Q) - f(P)) \\ &= cDf(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

$\square$

Príklad 2.18.

- (i) Nech $f : \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ je stredová súmernosť. Zobrazenie $Df : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vektoru $\mathbf{u}$ priradí vektor $-\mathbf{u}$.
- (ii) Ak $t : \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ je posunutie, potom jeho vektorová zložka Dt je identita.

Veta 2.19. Nech $(\mathbb{A}_1, V_1)$ a $(\mathbb{A}_2, V_2)$ sú afinné priestory. Pre každú dvojicu bodov $P_1 \in \mathbb{A}_1$, $P_2 \in \mathbb{A}_2$ a každé lineárne zobrazenie $g : V_1 \rightarrow V_2$ existuje práve jedno afinné zobrazenie $f : \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$ také, že $f(P_1) = P_2$ a $Df = g$.

(Príjemnou ľudskou rečou: afinné zobrazenie f je jednoznačne determinované zobrazením Df a obrazom jedného bodu.)

Dôkaz. Existencia zobrazenia: Nech $f : \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$ je definované nasledovne:

$$f(X) = P_2 + g(X - P_1).$$

Lahko sa presvedčíme, že zobrazenie f má požadované vlastnosti:

- pre ľubovoľné $A, B \in \mathbb{A}_1$ platí

$$\begin{aligned} (1 - \lambda)f(A) + \lambda f(B) &= (1 - \lambda)(P_2 + g(A - P_1)) + \lambda(P_2 + g(B - P_1)) \\ &= (1 - \lambda)P_2 + \lambda P_2 + (1 - \lambda)g(A - P_1) + \lambda g(B - P_1) \\ &= P_2 + g((1 - \lambda)A + \lambda B - P_1) = f((1 - \lambda)A + \lambda B), \end{aligned}$$

- $f(P_1) = P_2 + g(P_1 - P_1) = P_2 - g(\mathbf{0}) = P_2$,
- znovu pre ľubovoľné $A, B \in \mathbb{A}_1$ platí

$$\begin{aligned} Df(B - A) &= f(B) - f(A) = P_2 + g(B - P_1) - (P_2 + g(A - P_1)) \\ &= g((B - P_1) - (A - P_1)) \\ &= g(B - A), \end{aligned}$$

Vidíme, že f je afinné zobrazenie a má požadované vlastnosti.

Jednoznačnosť: nech $h : \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$ je ďalšie zobrazenie vyhovujúce daným podmienkam, t.j. nech $h(P_1) = P_2$ a $Dh = g$. Potom pre ľubovoľné $X \in \mathbb{A}_1$ platí

$$h(X) = h(P_1) + Dh(X - P_1) = P_2 + g(X - P_1) = f(P_1) + Df(X - P_1) = f(X),$$

kde prvá rovnosť vyplýva z Vety 2.17 (ii), druhá z podmienok pre zobrazenie h , tretia z podmienok pre zobrazenie f a štvrtá znovu z Vety 2.17 (ii). $\square$

Dôsledok 2.20. (*Určenosť afinného zobrazenia*) Nech $E_0, E_1, \dots, E_n$ je barycentrický súradnicový systém v $\mathbb{A}_1 = \mathbb{A}^n$ a nech $Q_0, Q_1, \dots, Q_n$ sú ľubovoľné body v $\mathbb{A}_2$. Potom existuje jediné afinné zobrazenie $f: \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$ také, že $f(E_i) = Q_i$ pre $i = 0, \dots, n$.

Dôkaz. Pre zobrazenie $f: \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$ musí platiť

1. $f(E_0) = Q_0$,
2. $Df(P_i - P_0) = Q_i - Q_0$ pre $i = 1, \dots, n$

Z lineárnej algebry vieme, že existuje práve jedno lineárne zobrazenie

$$g: V(\mathbb{A}_1) \rightarrow V(\mathbb{A}_2)$$

spĺňajúce druhú podmienku, a z práve dokázanej vety potom máme, že existuje jediné zobrazenie f spĺňajúce dané podmienky. $\square$

Z tohto dôsledku napríklad vidíme, že afinné zobrazenie roviny je jednoznačne určené obrazmi troch nekolineárnych bodov.

Tvrdenie 2.21. Afinné zobrazenie $f: \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$ je injektívne (surjektívne) práve vtedy, keď $Df: V(\mathbb{A}_1) \rightarrow V(\mathbb{A}_2)$ je injektívne (surjektívne).

Dôkaz. Surjektívnosť: Nech Df je surjektívne a nech $Y \in \mathbb{A}_2$ je ľubovoľný bod. Nech ďalej A je ľubovoľný bod v $\mathbb{A}_1$. Označme $\mathbf{v} := Y - f(A)$. Keďže je Df surjektívne, má vektor $\mathbf{v}$ v zobrazení Df svoj vzor: $\mathbf{v} = Df(\mathbf{u})$. Potom

$$f(A + \mathbf{u}) = f(A) + Df(\mathbf{u}) = f(A) + \mathbf{v} = Y,$$

čiže bod Y má vzor $A + \mathbf{u}$.

Nech teraz naopak je zobrazenie f surjektívne a nech $\mathbf{v} \in V(\mathbb{A}_2)$, nájdeme vzor $\mathbf{v}$ v zobrazení Df . Uvažujme ľubovoľné umiestnenie $\mathbf{v} = Y - X$. Keďže f je surjektívne, existujú body $A, B \in \mathbb{A}_1$ také, že $f(A) = X$ a $f(B) = Y$. Potom $Df(B - A) = \mathbf{v}$, t.j. $B - A$ je vzorom $\mathbf{v}$.

Injektívnosť: dú. $\square$

Tvrdenie 2.22. Nech $f_1: \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$ a $f_2: \mathbb{A}_2 \rightarrow \mathbb{A}_3$ sú afinné zobrazenia. Potom aj zložené zobrazenie $f_2 \circ f_1: \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_3$ je afinné a pre jeho vektorovú zložku platí $D(f_2 \circ f_1) = Df_2 \circ Df_1$.

Ak $f: \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$ je bijektívne afinné zobrazenie, potom aj $f^{-1}: \mathbb{A}_2 \rightarrow \mathbb{A}_1$ je afinné zobrazenie a $D(f^{-1}) = (Df)^{-1}$

Dôkaz. Vynechaný, je to únavné mechanické prepisovanie. $\square$

Dôsledok 2.23. Afinita priestoru $\mathbb{A}^n$ tvoria grupu.

2.4 Súradnicové (analytické) vyjadrenie afinného zobrazenia

Popis lineárneho zobrazenia vektorových priestorov maticou má analógiu v afinných zobrazeniach.

Majme v $\mathbb{A}^m$ resp. v $\mathbb{A}^n$ zvolený súradnicový systém $(O_1, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m)$ resp. $(O_2, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$.

Nech $f: \mathbb{A}^m \rightarrow \mathbb{A}^n$ je afinné zobrazenie, ktoré je popísané obrazom bodu O_1 a vektorovou zložkou Df (t.j. obrazmi básových vektorov $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$):

$$\begin{aligned} f(O_1) &= (a_{10}, \dots, a_{n0}) \quad (= O_2 + a_{10}\mathbf{f}_1 + \dots + a_{n0}\mathbf{f}_n) \\ Df(\mathbf{e}_1) &= (a_{11}, \dots, a_{n1}) \quad (= a_{11}\mathbf{f}_1 + \dots + a_{n1}\mathbf{f}_n) \\ &\dots \\ Df(\mathbf{e}_m) &= (a_{1m}, \dots, a_{nm}) \quad (= a_{1m}\mathbf{f}_1 + \dots + a_{nm}\mathbf{f}_n) \end{aligned}$$

Potom pre každý bod $P = (p_1, \dots, p_m) = O_1 + p_1\mathbf{e}_1 + \dots + p_m\mathbf{e}_m \in \mathbb{A}^m$ platí

$$f(P) = f(O_1) + p_1 Df(\mathbf{e}_1) + \dots + p_m Df(\mathbf{e}_m).$$

Označme $f(P) = Q = (q_1, \dots, q_n)$. Toto všetko môžeme zapísať maticovo

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ \dots \\ a_{n0} \end{pmatrix}.$$

Ak uvažujeme rozšírené súradnice (t.j. $f(O_1) = (a_{10}, \dots, a_{n0}, 1)$, $Df(\mathbf{e}_i) = (a_{1i}, \dots, a_{ni}, 0)$), máme zápis

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & a_{20} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & a_{n0} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_m \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

skátene

$$Q = A_f P.$$

Na maticu A_f sa budeme odkazovať ako na **maticu afinného zobrazenia** f .

Namiesto stĺpcovej matice pozostávajúcej z rozšírených súradníc bodu P vynásobme teraz maticu A_f stĺpcovou maticou obsahujúcou rozšírené súradnice i -teho štandardného bázo­vého vektora:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & a_{20} \\ \dots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & a_{n0} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \dots \\ a_{ni} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Vidíme, že ako výsledok sme dostali obraz vektora $\mathbf{e}_i$ v zobrazení Df . Takže podmatica, ktorú z A_f získame vynechaním posledného riadku a posledného stĺpca, je maticou vektorovej zložky zobrazenia Df :

$$A_f = \begin{pmatrix} A_{Df} & \mathbf{a} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix},$$

kde

$$A_{Df} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ \dots \\ a_{n0} \end{pmatrix}.$$

Príklad 2.24. Preferujeme matice v rozšírených súradniciach oproti bežným afinným, lebo tak sa ľahko zobrazenia skladajú: skladanie zobrazení zodpovedá násobeniu matíc.

Nech $t_{\mathbf{u}}$ resp. $t_{\mathbf{v}}$ je posunutie v $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ pozdĺž vektora $\mathbf{u}$ resp. $\mathbf{v}$.

Ak $\mathbf{u}$ má súradnice (u_1, u_2) a $\mathbf{v}$ má súradnice (v_1, v_2) , potom maticu zloženého zobrazenia $t_{\mathbf{v}} \circ t_{\mathbf{u}}$ nájdeme ako súčin matíc pre $t_{\mathbf{v}}$ a $t_{\mathbf{u}}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_1 \\ 0 & 1 & u_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_1 + v_1 \\ 0 & 1 & u_2 + v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že ide o posunutie pozdĺž vektora $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, ako sme aj očakávali:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & u_1 + v_1 \\ 0 & 1 & u_2 + v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + u_1 + v_1 \\ x_2 + u_2 + v_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

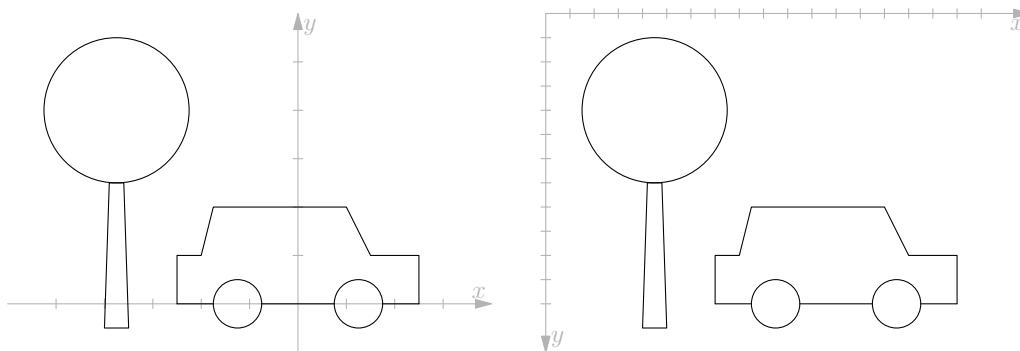
Všimnite si tiež, že priamo z matice je okamžite zjavné, že vektorovou zložkou posunutia je identita.

Príklad 2.25. Súvis medzi skladaním afinných zobrazení a násobením matíc býva užitočný pri hľadaní predpisu pre komplikovanejšie zobrazenia. Predpis pre stredovú súmernosť podľa $S = (s_1, s_2)$ vieme tak nájsť pomocou matíc pre posunutie a súmernosť podľa $(0, 0)$: najprv urobíme posunutie o $(-s_1, -s_2)$, potom stredovú súmernosť podľa $(0, 0)$ a nakoniec posunutie o (s_1, s_2) . Výslednú maticu dostaneme ako súčin jednotlivých matíc:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & s_1 \\ 0 & 1 & s_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -s_1 \\ 0 & 1 & -s_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2s_1 \\ 0 & -1 & 2s_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.5 Zmena súradnicovej sústavy

Príklad 2.26. Namodelovali sme si scénu (napríklad pomocou lomených čiar a kružníc) v súradnicovej sústave, v ktorej sa nám pohodlne pracovalo (obrázok vľavo).



Ak ju chceme zobraziť na obrazovku, potrebujeme všetky súradnice (vrcholy lomených čiar, stredy kružníc) prepočítať: vyjadriť ich v súradnicovej sústave obrazovky (obrázok vpravo). V tejto podkapitolke si predvedieme, ako sa s takýmto problémom čo najefektívnejšie vysporiadať.

V $\mathbb{A}^n$ uvažujme dve afinné súradnicové sústavy:

$$\begin{aligned} E &= (O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) \quad (\text{„stará“ sústava}), \\ E' &= (O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_n) \quad (\text{„nová“ sústava}) \end{aligned}$$

Vyjadríme „nový“ začiatok sústavy a „nové“ bázové vektory pomocou

„starých“:

$$\begin{aligned} O' &= O + t_{01}\mathbf{e}_1 + t_{02}\mathbf{e}_2 + \cdots + t_{0n}\mathbf{e}_n \\ \mathbf{e}'_1 &= t_{11}\mathbf{e}_1 + t_{12}\mathbf{e}_2 + \cdots + t_{1n}\mathbf{e}_n \\ \mathbf{e}'_2 &= t_{21}\mathbf{e}_1 + t_{22}\mathbf{e}_2 + \cdots + t_{2n}\mathbf{e}_n \\ &\vdots \\ \mathbf{e}'_n &= t_{n1}\mathbf{e}_1 + t_{n2}\mathbf{e}_2 + \cdots + t_{nn}\mathbf{e}_n, \end{aligned}$$

čo môžeme prehľadne zapísať pomocou matíc

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 & \cdots & \mathbf{e}'_n & O' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_n & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11} & t_{21} & \cdots & t_{n1} & t_{01} \\ t_{12} & t_{22} & \cdots & t_{n2} & t_{02} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{1n} & t_{2n} & \cdots & t_{nn} & t_{0n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

skátene

$$E' = ET_{E \rightarrow E'}. \quad (5)$$

Matica $T_{E \rightarrow E'}$ sa nazýva **maticou prechodu** od súradnicovej sústavy $E = (O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ k súradnicovej sústave $E' = (O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_n)$.

Tvrdenie 2.27. Matica prechodu od jednej sústavy k druhej je regulárna.

Dôkaz. $T_{E \rightarrow E'}$ je tvaru

$$T_{E \rightarrow E'} = \begin{pmatrix} \hat{T} & \mathbf{t}_0 \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{t}_0 = (t_{01} \ t_{02} \ \dots \ t_{0n})^T$ a $\hat{T}$ je matica typu $n \times n$. Pre determinant matice $T_{E \rightarrow E'}$ teda platí

$$|T_{E \rightarrow E'}| = |\hat{T}|,$$

čiže $T_{E \rightarrow E'}$ je regulárna práve vtedy, keď $\hat{T}$ je regulárna. Všimnime si, že i -ty stĺpec matice $\hat{T}$ obsahuje súradnice vektora $\mathbf{e}'_i$ v báze $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$. Ak by stĺpce matice $\hat{T}$ boli lineárne závislé, potom by vektory $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_n$ netvorili bázu $V(\mathbb{A}^n)$. Matica $\hat{T}$ je teda regulárna, čiže aj matica $T_{E \rightarrow E'}$ je regulárna. $\square$

Maticu $T_{E \rightarrow E'}$ je teda možné invertovať. Z (5) máme

$$E = E' T_{E \rightarrow E'}^{-1},$$

takže inverzná matica je maticou prechodu opačným smerom – od súradnicovej sústavy E' k súradnicovej sústave E :

$$T_{E \rightarrow E'}^{-1} = T_{E' \rightarrow E}. \quad (6)$$

Nakoniec si ukážeme, ako môžeme maticu prechodu využiť na prepočítanie súradníc bodov z jednej súradnicovej sústavy do druhej.

Majme bod P , ktorý má v súradnicovej sústave $E = (O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ súradnice $(p_1, p_2, \dots, p_n)$. Stĺpcovú maticu obsahujúcu rozšírené súradnice bodu P v sústave E budeme označovať P_E , t.j.

$$P_E = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Potom pre bod P môžeme písať

$$P = O + p_1 \mathbf{e}_1 + p_2 \mathbf{e}_2 + \dots + p_n \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \dots & \mathbf{e}_n & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \\ 1 \end{pmatrix} = E P_E.$$

Nech $(p'_1, p'_2, \dots, p'_n)$ sú súradnice toho istého bodu P v „novej“ súradnicovej sústave:

$$P = O' + p'_1 \mathbf{e}'_1 + p'_2 \mathbf{e}'_2 + \dots + p'_n \mathbf{e}'_n.$$

Ak stĺpcovú maticu rozšírených súradníc bodu P v sústave E' označíme $P_{E'}$, potom spolu s (5)

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 & \dots & \mathbf{e}'_n & O' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ \vdots \\ p'_n \\ 1 \end{pmatrix} = E' P_{E'} = E T_{E \rightarrow E'} P_{E'}.$$

Keďže zároveň

$$P = E P_E,$$

vidíme, že

$$P_E = T_{E \rightarrow E'} P_{E'}. \quad (7)$$

je stĺpcová matica obsahujúca rozšírené súradnice bodu P vzhľadom na „starú“ bázu. Pre prepočet „starých“ súradníc na „nové“ teda použijeme inverznú maticu (prenásobíme rovnosť (7) zľava maticou $T_{E \rightarrow E'}^{-1}$ a využijeme (6)):

$$P_{E'} = T_{E \rightarrow E'}^{-1} P_E = T_{E' \rightarrow E} P_E.$$

Príklad 2.28. S použitím matice prechodu vypočítame súradnice bodu $A = (1, 3)$ v súradnicovej sústave $E' = (O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$, kde

$$O' = (2, 3), \quad \mathbf{e}'_1 = (0, -1), \quad \mathbf{e}'_2 = (1, 1).$$

Matica prechodu k súradnicovej sústave E' je

$$T_{E \rightarrow E'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Každý svojou obľúbenou metódou vypočíta maticu k nej inverznú:

$$T_{E \rightarrow E'}^{-1} = T_{E' \rightarrow E} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A potom (rozšírené) súradnice bodu A v novej súradnicovej sústave (t.j. vzhľadom na $(O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$) sú

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Teda $A = O' - \mathbf{e}'_1 - \mathbf{e}'_2 = (-1, -1)_{(O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)}$.

Prirodzene, metóda ilustrovaná týmto príkladom je naozaj dosť „overkill“, pokiaľ chceme získať súradnice jedného bodu v novej sústave. Avšak stáva sa veľmi užitočnou, ak potrebujeme napríklad prepočítať komplexnejšiu scénu.

Poznámka 2.29. Všimnime si, že súradnicová sústava a súradnice bodu sú navzájom duálne pojmy: matica $T_{E \rightarrow E'}$ popisuje „novú“ súradnicovú sústavu pomocou „starej“, ale „nové“ súradnice bodu sa zo „starých“ počítajú pomocou $T_{E \rightarrow E'}^{-1}$.

Poznámka 2.30. A na záver si uvedomme, že zmena súradnicovej sústavy v $\mathbb{A}^n$ zodpovedá afinite priestoru $\mathbb{A}^n$ a naopak.

2.6 Orientácia afinného priestoru

V tejto časti budeme uvažovať afinný priestor nad reálnymi číslami.

V praxi sa pri dvoj- a trojrozmernom reálnom priestore stretávame s pojmom „pravotočivá“ alebo „ľavotočivá“ súradnicová sústava, prípadne tiež

„kladne“ alebo „záporne orientovaná“ súradnicová sústava: napríklad v dvojrozmernom priestore sa za kladne orientovanú súradnicovú sústavu považuje taká sústava $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, že body $O, E_1 = O + \mathbf{e}_1, E_2 = O + \mathbf{e}_2$ sú v tomto poradí usporiadané proti smeru hodinových ručičiek. Cieľom tejto časti je popísať tento jav matematicky.

Príklad 2.31. Majme v $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ novú súradnicovú sústavu $E' = (O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$:

$$O' = O, \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1, \mathbf{e}'_2 = t_{21}\mathbf{e}_1 + t_{22}\mathbf{e}_2,$$

čiže matica prechodu k novej súradnicovej sústave je

$$T_{E \rightarrow E'} = \begin{pmatrix} 1 & t_{21} & 0 \\ 0 & t_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Predpokladajme, že pôvodná súradnicová sústava je kladne orientovaná (t.j. proti smeru hodinových ručičiek). Pre aké hodnoty t_{21} a t_{22} bude aj nová súradnicová sústava kladne orientovaná?

Veta 2.32. V afinnom priestore $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ ($n \geq 2$) uvažujme nasledovnú reláciu na množine všetkých súradnicových sústav: Pre $E = (O, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ a $E' = (O', \mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n)$ nech

$$E \sim E' \text{ práve vtedy, keď } |T_{E \rightarrow E'}| > 0.$$

Takto definovaná relácia $\sim$ je reláciou ekvivalencie a určuje rozklad množiny všetkých súradnicových sústav na dve triedy.

Dôkaz. Reflexívnosť:

$$|T_{E \rightarrow E}| = |\mathbf{I}_{n+1}| = 1$$

($\mathbf{I}_{n+1}$ je jednotková matica stupňa $n+1$), preto $E \sim E$.

Symetrickosť: nech $E_1 \sim E_2$, teda $|T_{E_1 \rightarrow E_2}| > 0$. Z $T_{E_2 \rightarrow E_1} = T_{E_1 \rightarrow E_2}^{-1}$ (viď (6)), máme

$$|T_{E_2 \rightarrow E_1}| = |T_{E_1 \rightarrow E_2}^{-1}| = \frac{1}{|T_{E_1 \rightarrow E_2}|} > 0,$$

čiže $E_2 \sim E_1$.

Tranzitívnosť: nech $E_2 = E_1 T_{E_1 \rightarrow E_2}$ a $E_3 = E_2 T_{E_2 \rightarrow E_3}$, potom dostávame $E_3 = E_1 T_{E_1 \rightarrow E_2} T_{E_2 \rightarrow E_3}$, teda

$$T_{E_1 \rightarrow E_3} = T_{E_1 \rightarrow E_2} T_{E_2 \rightarrow E_3}.$$

Ak $E_1 \sim E_2$ a $E_2 \sim E_3$, čiže $|T_{E_1 \rightarrow E_2}| > 0$ a $|T_{E_2 \rightarrow E_3}| > 0$, potom $|T_{E_1 \rightarrow E_3}| > 0$, čiže $E_1 \sim E_3$.

Rozklad na dve triedy: zrejme existujú aspoň dve triedy rozkladu: pre danú súradnicovú sústavu E určite existuje sústava E' taká, že $T_{E \rightarrow E'} < 0$ (viete nájsť takú sústavu E' ?). Nech teraz $E_1 \not\sim E_2$ a $E_2 \not\sim E_3$, čiže $|T_{E_1 \rightarrow E_2}| < 0$ a $|T_{E_2 \rightarrow E_3}| < 0$. Potom $|T_{E_1 \rightarrow E_3}| = |T_{E_1 \rightarrow E_2}| |T_{E_2 \rightarrow E_3}| > 0$, teda $E_1 \sim E_3$. Vidíme tak, že existujú len dve triedy ekvivalencie. $\square$

Definícia 2.33. Nech E_1, E_2 sú súradnicové sústavy v $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$. Hovoríme, že sústavy E_1, E_2 sú **súhlasne orientované**, ak $E_1 \sim E_2$ (v zmysle predchádzajúcej vety). V opačnom prípade sú sústavy E_1, E_2 **nesúhlasne orientované**.

V danom reálnom afinnom priestore potom jednu dvoch tried ekvivalencie súradnicových sústav prehlásime za **kladnú**, a všetky sústavy v tejto triede budú **kladne orientované**. Druhá trieda bude **záporná** a bude pozostávať zo **záporne orientovaných** súradnicových sústav.

Orientovaný afinný priestor je afinný priestor spolu so zvolenou orientáciou, t.j. dvojica $(\mathbb{A}, [E])$, kde $[E]$ označuje triedu ekvivalencie súradnicovej sústavy E .

V orientovanej rovine môžeme potom hovoriť aj o orientácii trojuholníka: nekolineárne body A, B, C (v tomto poradí) určujú kladne orientovaný trojuholník $\triangle ABC$, ak je súradnicová sústava $(A, B - A, C - A)$ kladne orientovaná; v opačnom prípade ide o záporne orientovaný trojuholník. Podobne hovoríme v trojrozmernom orientovanom priestore o kladne alebo záporne orientovanom štvorstene, či v n -rozmernom orientovanom priestore o kladne alebo záporne orientovanom n -rozmernom simplexe.

Príklad 2.34. Nech $E_e = (O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ je štandardná súradnicová sústava (repér).

Nech $E_f = (O, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$, kde

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_1 &= \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{f}_2 &= -\mathbf{e}_1.\end{aligned}$$

Platí, že $|T_{E_e \rightarrow E_f}| = -1 < 0$, teda tieto súradnicové sústavy sú nesúhlasne orientované: Ak E_e bola kladne orientovaná, E_f je záporne orientovaná.

Nech $E_g = (O, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2)$, kde

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_1 &= -\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{g}_2 &= -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\end{aligned}$$

Znovu máme $|T_{E_e \rightarrow E_g}| = -1 < 0$, takže aj E_g je záporne orientovaná.

Ak si však zvolíme takú orientáciu priestoru, že E_f je kladne orientovaná, z determinantov matíc $T_{E_f \rightarrow E_e}$, $T_{E_f \rightarrow E_g}$ naozaj zistíme, že E_e je záporne a E_g kladne orientovaná, presne ako vidíme, keď si repéry zakreslíme do obrázka. obrázky doplniť?

3 Podpriestory afinného priestoru

Obmedzíme sa na euklidovské priestory. Mnohé úvahy a konštrukcie sú však platné v afinnom priestore nad ľubovoľným bodom.

3.1 Priamka

Definícia 3.1. Nech $A, B \in \mathbb{E}$, $A \neq B$. **Priamka** $\overleftrightarrow{AB}$ je množina

$$\begin{aligned}\overleftrightarrow{AB} &= \{\lambda_1 A + \lambda_2 B \mid \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 + \lambda_2 = 1\} \\ &= \{(1-t)A + tB \mid \forall t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{A + t(B - A) \mid \forall t \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Ak $X, Y \in \overleftrightarrow{AB}$, vektor $Y - X$ sa nazýva **smerovým vektorom** priamky $\overleftrightarrow{AB}$. Teda smerové vektory priamky sú tie vektory, ktoré majú na priamke umiestnenie.

Definícia 3.2. Body ležiace na spoločnej priamke nazývame **kolineárne**. ($A_1, A_2, \dots$ sú kolineárne, ak existuje priamka p taká, že $A_1 \in p$, $A_2 \in p, \dots$)

Pozorovanie. O smerovom vektore priamky:

- (a) Smerový vektor priamky nie je jednoznačný.
- (b) Nulový vektor je smerovým vektorom každej priamky.
- (c) Ak $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sú dva nenulové smerové vektory priamky $\overleftrightarrow{AB}$, potom $\mathbf{v} = c\mathbf{u}$ pre nejaké $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$.
- (d) Ak $\mathbf{u}$ je smerovým vektorom priamky $\overleftrightarrow{AB}$ a bod $C \in \overleftrightarrow{AB}$, tak aj bod $C + \mathbf{u} \in \overleftrightarrow{AB}$.
- (e) Všetky smerové vektory priamky tvoria spolu jednorozmerný vektorový priestor, ktorý nazývame **smer** alebo **smerový priestor** priamky $\overleftrightarrow{AB}$. Smer priamky $\overleftrightarrow{AB}$ budeme tiež označovať $V(\overleftrightarrow{AB})$.

Dôkaz. (a),(b) Zrejmé.

(c) $\mathbf{u} = D - C$, $\mathbf{v} = F - E$. Nech $C = A + t_C(B - A)$, podobne pre ostatné body, potom $\mathbf{u} = (t_D - t_C)(B - A)$, $\mathbf{v} = (t_F - t_E)(B - A)$, $t_C \neq t_D$, $t_E \neq t_F$, keďže $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sú nenulové, a odtiaľ vyplýva tvrdenie.

(d) Nech $C = A + t_C(B - A)$. Ďalej keďže $\mathbf{u}$ je smerovým vektorom priamky $\overleftrightarrow{AB}$, tak $\mathbf{u} = Y - X$ a podľa pozorovania v dôkaze časti (c) máme $\mathbf{u} = (t_Y - t_X)(B - A)$. Pre bod $C + \mathbf{u}$ potom platí:

$$C + \mathbf{u} = A + t_C(B - A) + (t_Y - t_X)(B - A) = A + (t_C + t_Y - t_X)(B - A),$$

teda ide o bod na $\overleftrightarrow{AB}$.

(e) Potrebujeme overiť, že ak $\mathbf{u}$ je smerový vektor priamky, tak aj každý jeho násobok je smerový vektor priamky, a tiež ak $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sú smerové vektory priamky, tak aj ich súčet $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ je smerový vektor priamky. Ide o analogické výpočty k tým v predchádzajúcich tvrdeniach. Jednorozmernosť vyplýva z (c) (každý smerový vektor je násobkom pevne zvoleného nenulového smerového vektora priamky). $\square$

Tvrdenie 3.3. Priamka je jednorozmerným afinným priestorom.

Dôkaz. $V(\overleftrightarrow{AB})$ je jednorozmerný vektorový priestor (pozorovanie (e)).

Operácia $+$: $\overleftrightarrow{AB} \times V(\overleftrightarrow{AB}) \rightarrow \overleftrightarrow{AB}$

- je dobre definovaná (pozorovanie (d)),
- vlastnosti (i) a (ii) Definície 1.9 afinného priestoru platia na $\overleftrightarrow{AB}$, lebo platia v celom afinnom priestore,
- vlastnosť (iii) v definícii afinného priestoru tiež platí (pozorovanie (c)).

$\square$

Zhrnutie: Keď si na priamke p pevne zvolíme bod A a nenulový smerový vektor $\mathbf{u}$, tak máme bijekciu medzi hodnotami parametra t a bodmi priamky p :

- pre každé $t \in \mathbb{R}$ je bod $A + t\mathbf{u}$ bodom priamky p ,
- $B \in p$ je ľubovoľný iný bod priamky p , tak existuje jediné $t \in \mathbb{R}$ také, že $B = A + t\mathbf{u}$.

Máme tak parametrické vyjadrenie priamky, ktorá je daná bodom A a vektorom $\mathbf{u}$: každý bod X tejto priamky má jednoznačné vyjadrenie ako $X = A + t\mathbf{u}$.

3.2 Priamka v afinnej rovine

3.2.1 Vyjadrenie priamky v rovine

Počnúc definíciou boli všetky úvahy o priamke, jej bodoch a smerových vektorech nezávislé od dimenzie afinného priestoru, v ktorom pracujeme. Až teraz, keď ideme parametrické vyjadrenie priamky rozpísať do súradníc, sa obmedzíme na konkrétny priestor, v tejto časti to bude rovina.

Rozpísané do súradníc: ak $A = (a_1, a_2)$ a $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, potom **parametrické vyjadrenie (parametrické rovnice)** priamky je

$$x = a_1 + u_1 t$$

$$y = a_2 + u_2 t$$

Parametrické vyjadrenie priamky nie je jednoznačné, závisí od voľby bodu A a smerového vektora $\mathbf{u}$.

Veta 3.4. Pre neznáme x, y tvorí množina všetkých riešení rovnice

$$ax + by + c = 0, \quad \text{kde } a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0 \text{ alebo } b \neq 0 \quad (8)$$

priamku v afinnej rovine. Množina riešení asociovanej homogénnej rovnice

$$ax + by = 0$$

tvorí smerový priestor tejto priamky.

Dôkaz. Rovnica (8) je riešiteľná a má aspoň dve rôzne riešenia: ak $a \neq 0$, ľubovoľne zvolíme y a dopočítame x .

Nech $P = (p_1, p_2)$, $Q = (q_1, q_2)$ sú dve rôzne riešenia, t.j. platí

$$ap_1 + bp_2 + c = 0$$

$$aq_1 + bq_2 + c = 0.$$

Odčítaním týchto dvoch rovníc zistíme, že pre smerový vektor $\mathbf{u} = Q - P$ priamky $\overleftrightarrow{PQ}$ platí

$$au_1 + bu_2 = 0,$$

t.j. je riešením príslušnej homogénnej rovnice. Z lineárnej algebry vieme, že riešenia homogénnej rovnice $ax + by = 0$ tvoria jednorozmerný lineárny priestor generovaný vektorom $\mathbf{u}$, ide teda o smerový priestor priamky $\overleftrightarrow{PQ}$.

Každý bod tvaru $P + t\mathbf{u}$ (t.j. každý bod na priamke $\overleftrightarrow{PQ}$) je riešením pôvodnej (nehomogénnej) rovnice. Ukázali sme tak, že ak bod leží na priamke $\overleftrightarrow{PQ}$, tak patrí do množiny riešení rovnice (8).

Pre opačnú inklúziu nech $R = (r_1, r_2)$ vyhovuje rovnici, t.j. $ar_1 + br_2 + c = 0$. Potom $R - P$ vyhovuje príslušnej homogénnej rovnici, a preto $R - P = cu$, lebo riešenia homogénnej rovnice tvoria jednorozmerný vektorový priestor. Preto $R = P + cu \in \overleftrightarrow{PQ}$. $\square$

Veta-Definícia 3.1. Ak $\overleftrightarrow{PQ} \subset \mathbb{E}^2$ je priamka, potom existuje rovnica

$$ax + by + c = 0, \quad (a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \text{ alebo } b \neq 0)$$

taká, že množina jej riešení sú presne body priamky $\overleftrightarrow{PQ}$. Táto lineárna rovnica sa nazýva **všeobecnou rovnicou priamky**.

Dôkaz. Nech $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ je riešenie rovnice $(q_1 - p_1)x + (q_2 - p_2)y = 0$, napríklad $\mathbf{n} = (q_2 - p_2, p_1 - q_1)$. Potom $n_1x + n_2y - (n_1p_1 + n_2p_2) = 0$ je hľadaná rovnica. $\square$

Definícia 3.5. V $\mathbb{E}^2$ **normálovým vektorom priamky** nazývame nenulový vektor kolmý na smer priamky.

Ak má priamka p všeobecnú rovnicu $ax + by + c = 0$, potom $\mathbf{n} = (a, b)$ je jej normálový vektor.

Ako sa dopracovať k všeobecnej rovnici priamky? Postupov je niekoľko:

1. Z parametrických rovníc eliminujeme parameter t .
2. Ak p je daná parametricky ako $A + \mathbf{u}t$, potom p je množina všetkých takých bodov X , pre ktoré je $X - A$ kolmé na $\mathbf{n} = \mathbf{u}^\perp$.
3. Ak p je daná parametricky ako $A + \mathbf{u}t$, potom $n_1x + n_2y + c = 0$ je všeobecná rovnica, kde $\mathbf{n} = (n_1, n_2) = (u_2, -u_1)$ je normálový vektor priamky, a člen c dopočítame dosadením bodu A .
4. Ak $(0, q)$ leží na priamke so smerom $(1, k)$, tak

$$y = kx + q$$

je všeobecná rovnica priamky. Ide o tzv. **smernicový tvar** rovnice priamky. Priamky rovnobežné s y -osou (t.j. so smerom $(0, 1)$) smernicový tvar nemajú.

5. Ak $(e, 0)$ a $(0, f)$ ležia na priamke p , potom

$$\frac{x}{e} + \frac{y}{f} = 1$$

je všeobecná rovnica priamky. Ide o tzv. **úsekový tvar** rovnice priamky. Tento postup funguje v prípade, že priamka p pretína obe súradnicové osi, t.j. nie je so žiadnou z nich rovnobežná.

6. Ak p je daná parametricky ako $A + \mathbf{u}t$, kde $A = (a_1, a_2)$ a $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, tak

$$\frac{x - a_1}{u_1} = \frac{y - a_2}{u_2}$$

je tzv. **kanonická rovnica priamky**. Ide o veľmi výhodné vyjadrenie priamky: obsahuje parametrické vyjadrenie aj všeobecnú rovnicu. Z tohto dôvodu sa výnimočne pripúšťa 0 v menovateli, teda kanonickú rovnicu má aj priamka rovnobežná s niektorou súradnicovou osou.

Naopak, nájsť parametrické vyjadrenie priamky je ekvivalentné nájdeniu jedného bodu priamky a jedného nenulového smerového vektora. Tak napríklad ak

$$p: ax + by + c = 0.$$

je všeobecná rovnica priamky, nájsť parametrické vyjadrenie znamená

- (a) pomocou parametra zapísať všetky riešenia rovnice alebo
- (b) nájsť jedno riešenie rovnice (bod priamky) a jedno nenulové riešenie asociovanej homogénnej rovnice (smerový vektor priamky).

Pozorovanie. Parametrické vyjadrenie priamky (t.j. vyjadrenie priamky pomocou bodu, ktorý na nej leží a smerového vektora) je výhodné, keď chceme generovať body, ktoré ležia na priamke. Vďaka parametrickému vyjadreniu ľahko priamku načrtneme.

Všeobecná rovnica je výhodná, keď pre daný bod chceme overiť, či patrí danej priamke. Ľahko tiež vidíme, či dve rovnice popisujú tú istú priamku: napriek tomu, že máme veľa tvarov rovnice priamky (úsekový, smernicový, kanonický), jedná sa stále o tú istú všeobecnú rovnicu (modulo násobenie nenulovým reálnym číslom).

3.2.2 Kolmé premietanie v rovine a vzdialenosť bodu od priamky

Nech je daná priamka v reálnej rovine a bod, ktorý na nej neleží. Aká je vzdialenosť bodu od priamky?

Definícia 3.6. Vzdialenosť neprázdnych množín $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ je

$$|\mathcal{M}\mathcal{N}| = \inf\{|XY| \mid X \in \mathcal{M}, Y \in \mathcal{N}\}.$$

Poznámka 3.7. Všimnime si, že definícia vzdialenosti množín je korektná: pre ľubovoľné Y, X je $|XY|$ nezáporné číslo, takže množina $\{|XY| \mid X \in \mathcal{M}, Y \in \mathcal{N}\}$ je zdola ohraničená a preto má infimum. V skutočnosti pre všetky množiny $\mathcal{M}, \mathcal{N}$, ktorých vzdialenosť budeme v tomto predmete skúmať, bude existovať aj minimum množiny $\{|XY| \mid X \in \mathcal{M}, Y \in \mathcal{N}\}$ a tento fakt budeme pri výpočte využívať. Avšak vo všeobecnosti toto minimum existovať nemusí. Napríklad ak $\mathcal{M}$ je interval $(0, 1)$ na reálnej osi a $\mathcal{N} = \{2\}$, potom

$$\min\{|X2| \mid X \in \mathcal{M}\}$$

síce neexistuje, no naša definícia nám umožňuje priradiť týmto množinám vzdialenosť 1.

V $\mathbb{E}^2$ nech Q je bod neležiaci na priamke p .

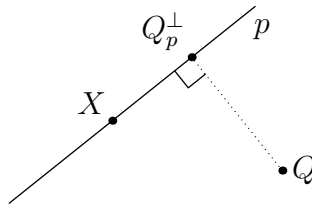
1. $p_Q^\perp$ je priamka prechádzajúca bodom Q a kolmá na p , **kolmopremietacia priamka** bodu Q na priamku p ,
2. $Q_p^\perp = p \cap p_Q^\perp$ je **kolmý priemet** bodu Q na priamku p ,

Veta 3.8. V $\mathbb{E}^2$ pre vzdialenosť bodu Q od priamky p platí $|Qp| = |QQ_p^\perp|$, t.j. je rovná vzdialenosti bodu Q od jeho kolmého priemetu na priamku p .

Dôkaz. Overíme, že pre každý bod $X \in p$, $X \neq Q_p^\perp$ platí

$$|QX| > |QQ_p^\perp|.$$

Nech X ľubovoľný bod priamky p rôznej od $Q_p^\perp$. Potom $X - Q = (X - Q_p^\perp) +$



Obr. 4: Kolmý priemet bodu na priamku

$(Q_p^\perp - Q)$. Z konštrukcie bodu $Q_p^\perp$ vyplýva, že vektory $(X - Q_p^\perp)$ a $(Q_p^\perp - Q)$ sú na seba kolmé, preto

$$|X - Q|^2 = \dots = |X - Q_p^\perp|^2 + |Q_p^\perp - Q|^2,$$

čiže $|QX| > |QQ_p^\perp|$. □

Výpočítame teraz vzdialenosti bodu $Q = (q_1, q_2)$ od priamky $p: ax + by + c = 0$. Kolmopremietacia priamka (bod Q na priamku p) je

$$\begin{aligned} p_Q^\perp : x &= q_1 + at \\ y &= q_2 + bt \end{aligned}$$

Priesečník $Q_p^\perp = p \cap p_Q^\perp$ je bod zodpovedajúci na priamke $p_Q^\perp$ parametru

$$t_0 = -\frac{aq_1 + bq_2 + c}{a^2 + b^2},$$

t.j. $Q_p^\perp = (q_1 + at_0, q_2 + bt_0)$. Potom

$$|QQ_p^\perp| = |(at_0, bt_0)| = \sqrt{a^2 t_0^2 + b^2 t_0^2} = \frac{|aq_1 + bq_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Príklad 3.9. Zobrazenie $\pi: \mathbb{E}^2 \rightarrow p = \mathbb{E}^1$, $Q \mapsto Q_p^\perp$, ktoré každému bodu roviny priradí jeho kolmý priemet do priamky p je **kolmé premietanie** na priamku p . Overte, že π je afiné zobrazenie. doplňte?

3.2.3 Uhol dvoch priamok

Pri definícii aj výpočte uhla dvoch priamok sa oprieme o uhol ich smerových vektorov odkaz do LA, uhol vektorov. Nech $\mathbf{u}$ je nenulový smerový vektor priamky p a $\mathbf{v}$ je nenulový smerový vektor priamky q . Potom aj $-\mathbf{v}$ je smerový vektor priamky q , no uhly $\angle \mathbf{u}\mathbf{v}$ a $\angle \mathbf{u}(-\mathbf{v})$ spravidla zhodné nebudú. Pod **uhlom priamok** budeme rozumieť menší z týchto dvoch uhlov, teda

$$\cos \angle pq = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}.$$

Dôkaz korektnosti definície. Ak $\mathbf{u}$ resp. $\mathbf{v}$ je nenulový smerový vektor priamky p resp. q a nech $c, d \in \mathbb{R}^*$. Potom

$$\frac{|c\mathbf{u} \cdot d\mathbf{v}|}{\|c\mathbf{u}\| \|d\mathbf{v}\|} = \frac{|cd| |(\mathbf{u}) \cdot (\mathbf{v})|}{|c| \|\mathbf{u}\| |d| \|\mathbf{v}\|} = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}.$$

Tiež platí, že

$$0 \leq \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \leq 1$$

a že rovnica

$$\cos x = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$$

má na intervale $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ práve jedno riešenie. □

Poznámka 3.10. Pod uhlom dvoch priamok rozumieme reálne číslo v intervale $[0, \frac{\pi}{2}]$, nie časť roviny.

3.3 Priamka a rovina v $\mathbb{E}^3$

3.3.1 Priamka parametricky

Parametrické vyjadrenie priamky, ktorá je daná bodom A a vektorom $\mathbf{u}$ môžeme priamočiario rozpísať do súradníc aj v trojrozmernom priestore (a vlastne v ľubovoľnorozmernom): pre ľubovoľný bod X priamky existuje jednoznačné $t \in \mathbb{R}$ také, že $X = A + t\mathbf{u}$. Ak $A = (a_1, a_2, a_3)$ a $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, potom

$$\begin{aligned}x &= a_1 + u_1 t \\y &= a_2 + u_2 t \\z &= a_3 + u_3 t.\end{aligned}\tag{9}$$

Príklad 3.11. Ak chceme overiť, či bod P leží na priamke prechádzajúcej bodmi A, B , máme možnosti napríklad:

- (a) V parametrickom vyjadrení priamky zistíme, či existuje parameter, ktorému by bol B zodpovedal: vyjadrenie (9) dáva sústavu troch rovníc s jednou neznámou t .
- (b) Bod P leží na priamke $\overleftrightarrow{AB}$ presne vtedy, keď sú vektory $B - A$, $P - A$ lineárne závislé.

3.3.2 Rovina

Na druhej strane skúmame štruktúru riešení lineárnej rovnice o troch neznámych

$$ax + by + cz + d = 0,\tag{10}$$

kde aspoň jeden z lineárnych koeficientov je nenulový. Nech P a Q sú riešeniami (10). Potom vektor $Q - P$ je riešením homogénnej rovnice

$$ax + by + cz = 0.$$

Ak P je riešením nehomogénnej rovnice (10) a $\mathbf{u}$ je riešením príslušnej homogénnej rovnice, potom bod $Q = P + \mathbf{u}$ je tiež riešením rovnice (10).

Z uvedeného už vyplýva, že ak P je jedno riešenie (10) a vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ generujú priestor riešení príslušnej homogénnej rovnice, potom množina $P + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ je množinou všetkých riešení rovnice (10).

Množina $P + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, kde $P \in \mathbb{E}$ a $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sú lineárne nezávislé vektory, je **rovina**. Podpriestor generovaný vektormi $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sa nazýva **smerovým priestorom roviny** alebo tiež **smerom**, jeho vektory sú **smerovými vektormi roviny**.

Definícia 3.12. Body ležiace v spoločnej rovine nazývame **koplanárne**. (Formálnejšie: $A_1, A_2, \dots$ sú koplanárne, ak existuje rovina α taká, že $A_1 \in \alpha$, $A_2 \in \alpha, \dots$)

Rovinu si môžeme definovať aj podobne, ako sme si definovali priamku: Nech $P, Q, R \in \mathbb{E}$ sú nekolineárne body. **Rovina** určená bodmi P, Q, R je množina

$$\overleftrightarrow{PQR} = \{\lambda_0 P + \lambda_1 Q + \lambda_2 R \mid \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}.$$

Táto množina je totožná s množinou

$$\{P + \lambda_1(Q - P) + \lambda_2(R - P) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} = P + \langle Q - P, R - P \rangle,$$

a teda naše dve definície roviny sú ekvivalentné.

Zápis roviny ako množiny

$$\{P + s\mathbf{u} + t\mathbf{v} \mid s, t \in \mathbb{R}\}$$

je už jej parametrickým vyjadrením:

$$x = p_1 + u_1 s + v_1 t$$

$$y = p_2 + u_2 s + v_2 t$$

$$z = p_3 + u_3 s + v_3 t.$$

Rovnica $ax + by + cz + d = 0$ taká, že rovina $P + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ je presne množinou jej riešení, sa nazýva jej **všeobecnou rovnicou**.

Zo všeobecnej rovnice získame jej parametrické vyjadrenie rovnako, ako sme túto úlohu riešili v prípade priamky:

1. nájdeme jedno (ľubovoľné) riešenie P všeobecnej rovnice,
2. nájdeme všetky riešenia zodpovedajúcej homogénnej rovnice, t.j. nájdeme dva lineárne nezávislé vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$, ktoré generujú priestor riešení homogénnej rovnice.

Parametrické vyjadrenie roviny je potom $P + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$.

Opačne, pre nájdanie všeobecnej rovnice roviny máme možnosti:

1. Eliminujeme parametre z parametrického vyjadrenia. Funguje vždy, no nemusí to byť najefektívnejšia metóda.

2. Ak je rovina daná $P + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$, pre lineárne koeficienty hľadanej všeobecnej rovnice musí platiť:

$$\begin{aligned} au_1 + bu_2 + cu_3 &= 0 & \text{kde } (u_1, u_2, u_3) &= \mathbf{u} \\ av_1 + bv_2 + cv_3 &= 0 & \text{kde } (v_1, v_2, v_3) &= \mathbf{v}, \end{aligned}$$

teda (a, b, c) je vektor kolmý na $\mathbf{u}$ aj $\mathbf{v}$ a nájdeme ho ako ortogonálny doplnok $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ alebo ako vektorový súčin $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ (každý si nájde svoj obľúbený spôsob). Vektor (a, b, c) sa nazýva **normálovým vektorom** roviny. Je to vektor kolmý na smer roviny, i.e. vektor generujúci ortogonálny doplnok smeru roviny. Na záver absolútny koeficient d dopočítame dosadením P do všeobecnej rovnice.

3. Ak $(p, 0, 0)$, $(0, q, 0)$, $(0, 0, r)$ ležia v rovine, potom jej rovnica je

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1.$$

Ide o tzv. **úsekový tvar** rovnice roviny.

Až na násobenie konštantou je všeobecná rovnica roviny jednoznačná, keďže normálový vektor je určený jednoznačne až na násobenie konštantou.

3.3.3 Priamka všeobecnými rovnicami

Priamka je priesečnica dvoch rovín, preto pre jej popísanie potrebujeme dve rovnice:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 &= 0 \end{aligned}$$

kde (a_1, b_1, c_1) a (a_2, b_2, c_2) sú lineárne nezávislé vektory. Tieto rovnice nie sú jednoznačné.

- Algebraický pohľad: ak množina bodov je riešením dvoch rovníc, je riešením aj ľubovoľnej inej rovnice, ktorú dostaneme ako kombináciu pôvodných dvoch rovníc. Každá nezávislá dvojica takýchto rovníc má tú istú množinu riešení.
- Geometrický pohľad: existuje nekonečne veľa rovín prechádzajúcich danou priamkou. Stačí z nich vybrať ľubovoľné dve, a tie už túto priamku jednoznačne určujú. Ich rovnice spolu tvoria sústavu všeobecných rovníc priamky.

Parametrické vyjadrenie priamky v priestore, keď je táto zadaná všeobecnými rovnicami, nájdeme presne ako v predchádzajúcich prípadoch: nájdeme jedno riešenie sústavy všeobecných rovníc (bod priamky) a tiež nenulové riešenie asociovanej sústavy homogénnych rovníc (smerový vektor priamky).

Ak máme priamku danú parametricky (resp. bodov a smerovým vektorom, resp. dvojicou rôznych bodov), všeobecné rovnice môžeme nájsť napríklad týmito postupmi:

- Geometricky hľadáme dve roviny prechádzajúce danou priamkou. Ak $\mathbf{u}$ je smerový vektor priamky, tak normálové vektory hľadaných rovín sú kolmé na $\mathbf{u}$. Treba teda nájsť ortogonálny doplnok $\langle \mathbf{u} \rangle^\perp = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ a vtedy $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ určujú lineárne koeficienty hľadaných rovníc. Absolútne členy dopočítame dosadením bodu priamky.
- Výpočtovo najjednoduchšie: v jednej z parametrických rovníc (dokopy sú tri, pre každú súradnicu jedna) si vyjadríme parameter a dosadíme do zvyšných dvoch.
- Špeciálny tvar všeobecných rovníc: kanonické rovnice:

$$\frac{x - a_1}{u_1} = \frac{y - a_2}{u_2} = \frac{z - a_3}{u_3},$$

kde $A = (a_1, a_2, a_3)$ je bod na priamke a $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ je jej smerový vektor. Znovu sa výnimočne pripúšťa nula v menovateli.

Príklad 3.13. Ukážte, že body $M = (-3, -3, 7)$, $N = (-5, 2, 2)$ ležia v rovine určenej bodmi $A = (2, 1, 3)$, $B = (2, 4, 0)$, $C = (-3, 0, 4)$ a nájdite všeobecnú rovnicu priamky MN v afinnej súradnicovej sústave $(A, B-A, C-A)$.

3.3.4 Premietanie do roviny, vzdialenosť bodu od roviny

Podobne ako pri premietaní na priamku v rovine chceme teraz premietnuť v $\mathbb{E}^3$ bod do roviny a tento priemet použiť na výpočet vzdialenosti pôvodného bodu od danej roviny. Podobne znovu bude platiť, že pre daný bod P je jeho priemet do roviny najbližším bodom k P zo všetkých bodov v tejto rovine.

Daná je rovina α v reálnom trojrozmernom priestore $\mathbb{E}^3$ a daný je bod P , ktorý v nej neleží.

- $a_P^\perp$ je priamka prechádzajúca bodom P a kolmá na α , **kolmopremietacia priamka** bodu P do roviny α ,

- $P_\alpha^\perp = \alpha \cap a_P^\perp$ je **kolmý priemet** bodu P do roviny α ,

Zobrazenie $\pi: \mathbb{E}^3 \rightarrow \alpha \cong \mathbb{E}^2$, $P \mapsto P_\alpha^\perp$, ktoré každému bodu roviny priradí jeho kolmý priemet do roviny α , je **kolmé premietanie** na rovinu α . Podobne ako pri kolmom premietaní na priamku v $\mathbb{E}^2$ platí, že ide o afinné zobrazenie.

Veta 3.14. Pre vzdialenosť bodu P od roviny α v $\mathbb{E}^3$ platí

$$|P\alpha| = |PP_\alpha^\perp|,$$

t.j. je rovná vzdialenosti bodu P od jeho kolmého priemetu do roviny α .

Dôkaz. Dokazuje sa presne tak isto, ako v prípade premietania bodu na priamku: treba overiť, že pre ľubovoľný bod $X \in \alpha$, $X \neq P_\alpha^\perp$ platí, že $|PX| > |PP_\alpha^\perp|$. $\square$

Tvrdenie 3.15. Nech $P = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{E}^3$ je bod a $\alpha \subset \mathbb{E}^3$ je rovina so všeobecnou rovnicou

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Potom

$$|PP_\alpha^\perp| = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Dôkaz. Dokazuje sa presne tak isto, ako analogické tvrdenie pre vzdialenosť bodu od priamky v $\mathbb{E}^2$. dú. $\square$

3.3.5 Vzdialenosť bodu od priamky v $\mathbb{E}^3$

Veta 3.16. Nech p je priamka a A je bod v $\mathbb{E}^3$, ktorý na tejto priamke neleží. Nech ďalej A' je taký bod na priamke p , že $A - A' \perp p$. Potom $|Ap| = |AA'|$.

Dôkaz. Dokazuje sa presne tak isto, ako analogické tvrdenie pre vzdialenosť bodu od priamky v $\mathbb{E}^2$. $\square$

Aby sme vzdialenosť bodu A od priamky p vypočítali, potrebujeme nájsť na priamke p bod A' z predchádzajúcej vety. Postupujeme podobne ako pri premietaní A do p v $\mathbb{E}^2$, či pri premietaní A do α v $\mathbb{E}^3$. V tomto prípade ale premietacím útvarom nebude priamka, ale rovina:

- $\alpha_A^\perp$ je rovina prechádzajúca bodom A a kolmá na p , **kolmopremietacia rovina** bodu P do priamky p ,
- $P_p^\perp = p \cap \alpha_P^\perp$ je **kolmý priemet** bodu P do priamky p ,

Analogicky, zobrazenie $\pi: \mathbb{E}^3 \rightarrow \alpha \cong \mathbb{E}^2$, $P \mapsto P_p^\perp$ je **kolmé premietanie** na priamku p a ide o afinné zobrazenie.

3.3.6 Vzdialenosť mimobežných priamok

Viaceré ďalšie prípady vzdialeností bodov, priamok a rovín v $\mathbb{E}^3$ majú pomerne priamočiaru odpoveď. Sami si premyslite, ako by ste počítali vzdialenosť

- priamky a roviny, ktoré sú rôznobežné/rovnobežné,
- dvoch rovín, ktoré sú rôznobežné/rovnobežné,
- dvoch priamok, ktoré sú rôznobežné/rovnobežné.

Posledným zaujímavým prípadom, ktorý ostal nevyšetrený, je vzdialenosť dvoch mimobežiek.

Veta 3.17. Nech $p, q \subset \mathbb{E}^3$ sú mimobežné priamky. Ak $P \in p$ a $Q \in q$ sú také body, že $Q - P \perp p$ a $Q - P \perp q$, potom Potom $|pq| = |PQ|$.

Dôkaz. Dôkaz je veľmi podobný ako v predchádzajúcich prípadoch, uvedieme si ho aspoň stručne.

Nech $X \in p$ a $Y \in q$ sú ľubovoľné body na priamkach. Vektor $Y - X$ vieme napísať ako súčet

$$Y - X = (Y - Q) + (Q - P) + (P - X).$$

Vektor $Y - Q$ je smerovým vektorom priamky p , preto $Q - P \perp Y - Q$. Podobne $P - X$ je smerovým vektorom priamky q , preto $Q - P \perp P - X$. Pre vzdialenosť $|XY|$ tak máme

$$\begin{aligned} |XY|^2 &= \|Y - X\|^2 = (Y - X)(Y - X) \\ &= ((Y - Q) + (Q - P) + (P - X))((Y - Q) + (Q - P) + (P - X)) \\ &= \|Q - P\|^2 + \|(Y - Q) + (P - X)\|^2 \\ &\geq \|Q - P\|^2 = |PQ|^2. \end{aligned}$$

Teda $|XY| \geq |PQ|$, pričom rovnosť nastáva iba v prípade, keď $X = P$ a $Y = Q$. $\square$

Pre nájdenie vzdialenosti mimobežiek p, q ostáva overiť, že body P, Q z tvrdenia vety naozaj existujú.

K terminológii: **priečka mimobežiek** p, q je akákoľvek priamka r , ktorá pretína priamku p , aj priamku q . Ak je priamka r navyše na obe priamky p a q kolmá, hovoríme, že je **kolmou priečkou** alebo **osou** mimobežiek p a q .

Ukážeme si teraz konštrukciu kolmej priečky mimobežných priamok, čiže nahliadneme, že body P, Q z Vety 3.17 naozaj existujú.

Nech $p = A + \langle \mathbf{u} \rangle$ a $q = B + \langle \mathbf{v} \rangle$.

1. $\mathbf{w}$; $\mathbf{w} \perp \mathbf{u}$ a $\mathbf{w} \perp \mathbf{v}$ (vektor $\mathbf{w}$ generuje ortogonálny doplnok priestoru $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$),
2. α ; $\alpha = A + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$,
3. Q ; $Q \in \alpha \cap q$,
4. r ; $r = Q + \langle \mathbf{w} \rangle$,
5. P ; $P \in p \cap r$.

Bod P v poslednom kroku skutočne existuje: Priamky p aj r z konštrukcie α a následne z konštrukcie r obe ležia v rovine α . Pre ich vzájomnú polohu máme tak len dve možnosti: rovnobežnosť alebo rôznobežnosť. Keďže $\mathbf{u}$ (smer r) a $\mathbf{w}$ (smer p) sú nenulové navzájom kolmé vektory, sú priamky p , r na seba kolmé, a tým rôznobežné.

Pokiaľ nie je cieľom naozaj skonštruovať priečku mimobežiek, dá sa postupovať aj jednoduchšie, ak si uvedomíme nasledovné:

Tvrdenie 3.18. Nech $p, q \subset \mathbb{E}$ sú mimobežné priamky. Ak β je rovina taká, že $\beta \supset q$ a $\beta \parallel p$, potom $|pq| = |p\beta|$.

Dôkaz. Nech $P \in p$ a $Q \in q$ sú body, pre ktoré $Q - P \perp p$ a $Q - P \perp q$. Potom bod Q je kolmým priemetom bodu P do roviny β . Odtiaľ plynie naše tvrdenie. $\square$

3.4 Podpriestory afinného priestoru

3.4.1 Definícia a parametrické vyjadrenie

Podpriestor afinného priestoru je zovšeobecnením pojmu priamky a roviny v $\mathbb{E}^2$ alebo $\mathbb{E}^3$.

Poznámka 3.19. Mnohé z nasledovných konštrukcií sa dajú vykonať aj v ľubovoľnom afinnom priestore. Euklidovský priestor začína byť nutný, keď potrebujeme kolmosť, vzdialenosť bodov a podobne.

Definícia 3.20. Nech $P \in \mathbb{E}^n$ a nech $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$ sú lineárne nezávislé vektory z $V(\mathbb{E}^n) = \mathbb{R}^n$. Potom

$$\alpha = \{P + t_1 \mathbf{u}_1 + \dots + t_m \mathbf{u}_m \mid t_1, \dots, t_m \in \mathbb{R}\} = P + \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m \rangle \subset \mathbb{E}^n$$

je **afinný podpriestor** (niekedy tiež **lineárna varieta**) priestoru $\mathbb{E}^n$.

Priestor $\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m \rangle$ sa nazýva **smerom (smerovým priestorom)** podpriestoru α , označujeme ho tiež $V(\alpha)$. Vektory priestoru $V(\alpha)$ voláme **smerovými vektormi** podpriestoru α .

Dimenzia (rozmer) podpriestoru α je $\dim \alpha := \dim V(\alpha)$.

Vieme už, že jednorozmerný afinný priestor sa nazýva priamka, dvojrozmerný zas rovina.

Zrejme každý afinný podpriestor je neprázdny, lebo v označení z definície máme, že $P \in \alpha$. Afinný podpriestor môžeme vnímať ako umiestnenie podpriestoru vektorového priestoru $\mathbb{R}^n$ do bodu P v priestore $\mathbb{E}^n$.

Z definície (afinného) podpriestoru hneď dostávame aj jeho parametrické vyjadrenie

$$\begin{aligned}x_1 &= p_1 + u_{11}t_1 + \dots u_{m1}t_m \\x_2 &= p_2 + u_{12}t_1 + \dots u_{m2}t_m \\&\dots \\x_n &= p_n + u_{1n}t_1 + \dots u_{mn}t_m.\end{aligned}$$

Definícia 3.21. Body $P_0, P_1, \dots, P_m$ sú **afinne nezávislé**, ak vektory $P_1 - P_0, \dots, P_m - P_0$ sú lineárne nezávislé.

Pre $m = n$ to znamená, že body $P_0, P_1, \dots, P_n$ sú afinne nezávislé práve vtedy, keď tvoria barycentrický súradnicový systém.

Príklad 3.22.

- P_0, P_1 sú afinne nezávislé, keď sú rôzne.
- P_0, P_1, P_2 sú afinne nezávislé, keď nie sú kolineárne.
- P_0, P_1, P_2, P_3 sú afinne nezávislé, keď nie sú koplanárne.

Podobne, ako sme mali v prípade priamky a roviny, môžeme afinný podpriestor charakterizovať ako množinu všetkých afinných kombinácií daných afinne nezávislých bodov:

Tvrdenie 3.23. Nech $P_0, P_1, \dots, P_m \in \mathbb{E}^n$.

- $\langle P_0, P_1, \dots, P_m \rangle = \{ \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_m P_m \mid \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1 \}$ je afinný podpriestor $\mathbb{E}^n$.
- $\dim \langle P_0, P_1, \dots, P_m \rangle = m$ práve vtedy, keď $P_0, P_1, \dots, P_m$ sú afinne nezávislé.

Dôkaz. Označme lineárny obal vektorov

$$U = \langle P_1 - P_0, P_2 - P_0, \dots, P_m - P_0 \rangle.$$

Overíme, že

$$\langle P_0, P_1, \dots, P_m \rangle = P_0 + U.$$

Nech $Q \in P_0 + U$, teda

$$\begin{aligned} Q &= P_0 + \lambda_1(P_1 - P_0) + \dots + \lambda_m(P_m - P_0) \\ &= (1 - \lambda_1 - \dots - \lambda_m)P_0 + \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_m P_m, \end{aligned}$$

teda $Q \in \langle P_0, P_1, \dots, P_m \rangle$. Presne tak isto ukážeme aj druhú inklúziu.

Nech teraz d je dimenzia vektorového podpriestoru $U = \langle P_0, P_1, \dots, P_m \rangle$, teda $P_0 + U$ je d -rozmerná lineárna varieta. Tvrdenie (ii) vyplýva z faktu, že $m = d$ práve vtedy, keď vektory $P_1 - P_0, P_2 - P_0, \dots, P_m - P_0$ sú lineárne nezávislé. $\square$

Dôsledok 3.24. Body $p_0, P_1, \dots, P_m$ sú afinne nezávislé práve vtedy, neležia v podpriestore dimenzie menšej ako m .

Tvrdenie 3.25. Nech $\alpha = P + U$.

- (i) Ak $Q \in \alpha$, potom $\alpha = Q + U$, t.j. bod P nie je nijak výnimočný.
- (ii) $U = \{R - Q \mid Q, R \in \alpha\}$, t.j. $\mathbf{u}$ je smerový vektor α práve vtedy, keď $\mathbf{u} = R - Q$ pre nejaké $Q, R \in \alpha$.
- (iii) α je afinným priestorom.

Dôkaz. (i) Nech $Q = P + \mathbf{u}$. Potom $Q + U = P + \mathbf{u} + U = P + U$. Komu to nie je zjavné, môže si detailne dokázať dve inklúzie.

(ii) Treba overiť dve implikácie:

- ak $\mathbf{u} \in U$, potom $\mathbf{u}$ má v podpriestore α umiestnenie, t.j. existujú body $Q, R \in \alpha$, že $\mathbf{u} = R - Q$,
- ak $\mathbf{u} = R - Q$ pre nejaké body $Q, R \in \alpha$, potom $\mathbf{u} \in U$,

čo je len triviálne prepisovanie definície afinného podpriestoru.

(iii) Treba si spomenúť na definíciu afinného priestoru, potom tvrdenie hneď vyplynie z už dokázaného. $\square$

Tvrdenie 3.26. Neprázdna množina $\alpha \subset \mathbb{E}^n$ je podpriestor $\mathbb{E}^n$ práve vtedy, keď s každými dvoma rôznymi bodmi obsahuje celú priamku nimi určenú.

Dôkaz. Nech α je afinný podpriestor $\mathbb{E}^n$. Nech $A, B \in \alpha = P + U$, t.j. $A = P + \mathbf{u}$ a $B = P + \mathbf{v}$, kde $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$. Potom pre $C \in \overleftrightarrow{AB}$, $C = A + t(B - A)$ máme

$$C = P + ((1 - t)\mathbf{u} + t\mathbf{v})$$

a tento bod zrejme leží v α .

Nech teraz naopak neprázdna množina α má vlastnosť, že s každými dvoma rôznymi bodmi obsahuje celú priamku. Nech P je pevne zvolený bod v α . Uvažujme množinu vektorov

$$U = \{Q - P \mid Q \in \alpha\}.$$

Ukážeme, že U je vektorový podpriestor $\mathbb{R}^n = V(\mathbb{E}^n)$, čo potom bude znamenať, že $\alpha = P + U$, teda že α je podpriestor $\mathbb{E}^n$.

- Je zrejmé, že $U \neq \emptyset$, lebo $\mathbf{0} = P - P \in U$.
- Nech $\mathbf{u} \in U$, To znamená, že existuje $Q \in \alpha$ taký, že $Q = P + \mathbf{u}$. Na priamke $\overleftrightarrow{PQ}$ zoberme bod $R = P + \lambda(Q - P)$. Potom $R - P = \lambda\mathbf{u}$, čiže $\lambda\mathbf{u} \in U$.
- Nech $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$, teda v α existujú body Q, R také, že $Q = P + \mathbf{u}$ a $R = P + \mathbf{v}$. Na priamke $\overleftrightarrow{QR}$ máme bod $\frac{1}{2}(Q + R) \in \alpha$ a teda vektor $\frac{1}{2}(Q + R) - P = \frac{1}{2}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \in U$. Z už ukázaného potom máme, že $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in U$

□

3.4.2 Všeobecné rovnice afinného podpriestoru

Uvažujme sústavu

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

pre neznáme $x_1, \dots, x_n$. Skrátené budeme sústavu zapisovať $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Tvrdenie 3.27. Nech sústava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ má riešenie. Potom všetky jej riešenia tvoria podpriestor v $\mathbb{E}^n$.

Dôkaz. Nech P je riešenie sústavy. Homogénna sústava $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ je riešiteľná, jej riešením je vektorový priestor U . Presne tak ako v prípade priamky a roviny sa presvedčíme, že riešenia nehomogénnej sústavy tvoria množinu $P + U$, ktorá je podpriestorom $\mathbb{E}^n$. $\square$

Veta 3.28. Nech $\alpha \subset \mathbb{E}^n$ je podpriestor. Potom existuje sústava rovníc, ktorej riešením je presne α .

Dôkaz. Nech $\alpha = P + \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r \rangle$. Ortogonálny doplnok priestoru $V(\alpha)$ nájdeme ako riešenie sústavy ($\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ je neznáma)

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{y} = 0$$

$$\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{y} = 0$$

$$\dots$$

$$\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{y} = 0$$

Nech $V(\alpha)^\perp = \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m \rangle$. Potom $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ je sústava, ktorej riešením je $V(\alpha) = \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r \rangle$. Pravú stranu sústavy dopočítame dosadením súradníc bodu P . $\square$

Definícia 3.29. Sústavou všeobecných rovníc podpriestoru α budeme rozumieť každú lineárne nezávislú sústavu rovníc $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, ktorú spĺňajú presne všetky body α .

Z dôkazu vyplýva vzťah medzi počtom rovníc a dimenziou podpriestoru: ak sústava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ o n neznámych $x_1, \dots, x_n$ pozostáva z m nezávislých rovníc a je riešiteľná, tak riešením je $(n - m)$ -rozmerný afinný podpriestor.

Definícia 3.30. Ak dimenzia $\alpha \subset \mathbb{E}^n$ je $n - 1$, tak α sa nazýva **nadrovina**. Je určená jednou všeobecnou rovnicou

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b, \quad (\text{kde } (a_1, a_2, \dots, a_n) \neq (0, 0, \dots, 0))$$

a vtedy vektor $(a_1, \dots, a_n)$ sa nazýva **normálovým vektorom** nadroviny α , ide o vektor kolmý na smer nadroviny α .

Každý podpriestor v $\mathbb{E}^n$ je prienikom nadrovín.

Definícia 3.31. Kanonickými rovnicami priamky $p : P + \langle \mathbf{u} \rangle \subset \mathbb{E}^n$ nazývame vyjadrenie

$$\frac{x_1 - p_1}{u_1} = \frac{x_2 - p_2}{u_2} = \dots = \frac{x_n - p_n}{u_n},$$

kde $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ a $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$.

3.4.3 Prienik a vzájomná poloha afinných podpriestorov

Tvrdenie 3.32. Nech $V(\alpha) \subset V(\beta)$. Ak $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$, potom $\alpha \subset \beta$.

Dôkaz. Ak $P \in \alpha \cap \beta$, potom $\alpha = P + V(\alpha)$ a $\beta = P + V(\beta)$. Odtiaľ je už tá inklúzia jasná. $\square$

Definícia 3.33. Podpriestory α a β sú **rovnobežné** ($\alpha \parallel \beta$), ak $V(\alpha) \subseteq V(\beta)$ alebo $V(\beta) \subseteq V(\alpha)$.

Ak $\alpha \cap \beta = \emptyset$, hovoríme o **pravej rovnobežnosti**. V opačnom, prípade ide o inklúziu (t.j. $\alpha \subset \beta$ alebo $\beta \subset \alpha$).

Tvrdenie 3.34. Nech $\alpha, \beta \subset \mathbb{E}^n$ sú podpriestory. Ak $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$, potom je $\alpha \cap \beta$ tiež podpriestorom $\mathbb{E}^n$ a platí

$$V(\alpha \cap \beta) = V(\alpha) \cap V(\beta).$$

Dôkaz. Potrebujeme ukázať dve inklúzie v rovnosti $\alpha \cap \beta = P + (V(\alpha) \cap V(\beta))$, kde $P \in \alpha \cap \beta$.

Zapíšeme $\alpha = P + V(\alpha)$ a $\beta = P + V(\beta)$. Ak $Q \in \alpha \cap \beta$, tak $Q = P + \mathbf{u}$, kde $\mathbf{u} \in V(\alpha)$, a tiež $Q = P + \mathbf{v}$, kde $\mathbf{v} \in V(\beta)$. Teda $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Odtiaľ vyplýva, že $Q \in P + (V(\alpha) \cap V(\beta))$.

Opačná inklúzia je zrejmá. $\square$

Tvrdenie 3.35. Nech $\alpha, \beta \subset \mathbb{E}^n$ sú podpriestory a nech $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$. Potom

$$\dim(\alpha \cap \beta) \geq \dim \alpha + \dim \beta - n.$$

Dôkaz. Podľa predchádzajúceho tvrdenia máme

$$\dim \alpha \cap \beta = \dim(V(\alpha) \cap V(\beta)).$$

Z lineárnej algebry o dimenzii súčtu vektorových podpriestorov vieme, že

$$\dim(V + W) + \dim(V \cap W) = \dim V + \dim W.$$

(Pre vektorové podpriestory V, W vektorového priestoru. Súčet $V + W$ vektorových podpriestorov V, W vektorového priestoru je najmenší podpriestor obsahujúci V aj W .)

Položíme $V = V(\alpha)$, $W = V(\beta)$ a spolu s faktom, že $\dim(V(\alpha) + V(\beta)) < n$ dostaneme dokazovanú nerovnosť. $\square$

Dôsledok 3.36. Dve roviny v $\mathbb{E}^3$ sa nemôžu pretínať len v jednom bode. V $\mathbb{E}^4$ sa to už môže stať, napríklad: $\alpha = P + \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$, $\beta = P + \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 \rangle$.

Tvrdenie 3.37. Nech α, β sú afinné podpriestory $\mathbb{E}^n$ a nech $A \in \alpha$ a $B \in \beta$. Potom $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$ práve vtedy, keď $B - A \in V(\alpha) + V(\beta)$

Dôkaz. Zapišme $\alpha = A + V(\alpha)$, $\beta = B + V(\beta)$.

Nech $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$ a $P \in \alpha \cap \beta$. Potom $P = A + \mathbf{u}$ pre nejaký vektor $\mathbf{u} \in V(\alpha)$ a tiež $P = B + \mathbf{v}$ pre nejaký vektor $\mathbf{v} \in V(\beta)$. Odtiaľ

$$B - A = (P - \mathbf{v}) - (P - \mathbf{u}) = \mathbf{u} + \mathbf{v},$$

čiže $B - A \in V(\alpha) + V(\beta)$.

Nech teraz $B - A \in V(\alpha) + V(\beta)$, teda $B - A = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ pre nejaký $\mathbf{u} \in V(\alpha)$ a $\mathbf{v} \in V(\beta)$. Odtiaľ

$$B - \mathbf{v} = A + \mathbf{u},$$

pričom bod na ľavej strane patrí podpriestoru β a bod na pravej strane patrí podpriestoru α – ide tak o spoločný bod oboch lineárnych variet. $\square$

Príklad 3.38. Či sú priamky mimobežné, vieme na základe predchádzajúceho tvrdenia rozhodnúť aj bez toho, aby sme sa snažili nájsť ich priesečník: ak $p = P + \langle \mathbf{u} \rangle$ a $q = Q + \langle \mathbf{v} \rangle$, sú tieto priamky mimobežné, ak sú vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, Q - P$ lineárne nezávislé.

Vidíme, že pre vyšetrowanie vzájomnej polohy podpriestorov α a β je užitočné uvažovať dve kritériá:

1. inklúziu smerov $V(\alpha)$ a $V(\beta)$,
2. disjunktnosť lineárnych variet α a β : podpriestory α a β sa **pretínajú**, ak $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$, v opačnom prípade hovoríme, že α a β sa **nepretínajú**.

Dostaneme tak štyri možnosti pre vzájomnú polohu podpriestorov α a β :

- **inklúzia** ($\alpha \subset \beta$ alebo $\alpha \supset \beta$),
- **pravá rovnobežnosť** ($V(\alpha) \subset V(\beta)$ alebo $V(\alpha) \supset V(\beta)$ a $\alpha \cap \beta = \emptyset$),
- **rôznobežnosť**
($\alpha \cap \beta \neq \emptyset$ a $\dim(V(\alpha) \cap V(\beta)) < \min\{\dim V(\alpha), \dim V(\beta)\}$),
- **mimobežnosť**
($\alpha \cap \beta = \emptyset$ a $\dim(V(\alpha) \cap V(\beta)) < \min\{\dim V(\alpha), \dim V(\beta)\}$).

Príklad 3.39. Aké prípady vzájomných polôh môžu nastať pre dve priamky v $\mathbb{E}^n$? Pre dve nadroviny? Pre priamku a nadrovinu?

4 Zhodnosti

4.1 Niektoré invarianty afinných transformácií

V odseku 1.2 o posunutíach sme videli, že posunutia s operáciou skladania zobrazení tvoria grupu:

- zložením posunutí je posunutie,
- skladanie posunutí (všeobecne akýchkoľvek zobrazení) je asociatívne,
- neutrálnym prvkom je identita, čo je posunutie pozdĺž nulového vektora,
- inverzným zobrazením k posunutiu pozdĺž vektora $\mathbf{u}$ je posunutie pozdĺž vektora $-\mathbf{u}$.

Napríklad posunutia v euklidovskej rovine tak tvoria tú istú grupu ako vektory v $\mathbb{R}^2$ s operáciou sčítania vektorov.

Definícia 4.1. Nech $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ je afinná transformácia. Ak pre podpriestor $\alpha \subset \mathbb{E}^n$ platí, že $f(\alpha) \subset \alpha$, potom α nazývame **(invariantným (samodružným) podpriestorom)**. Ak navyše pre každý bod A podpriestoru α platí, že $f(A) = A$, potom hovoríme, že α je **bodovo samodružný podpriestor**.

Definícia 4.2. Nech $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ je afinná transformácia. Ak pre nenulový vektor $\mathbf{u} \in V(\mathbb{E}^n) = \mathbb{R}^n$ platí, že $Df(\mathbf{u}) = \lambda \mathbf{u}$ pre nejaké $\lambda \in \mathbb{R}$, potom $\langle \mathbf{u} \rangle$ (t.j. vektorový podpriestor generovaný vektorom $\mathbf{u}$) nazývame **invariantným (samodružným) smerom**. Číslo λ vtedy nazývame **vlastným číslom (vlastnou hodnotou)** zobrazenia f prislúchajúcim samodružnému smeru $\langle \mathbf{u} \rangle$. Vektor $\mathbf{u}$ tiež voláme **vlastným vektorom** zobrazenia.

Príklad 4.3. Posunutie v $\mathbb{E}^2$ dané vektorom $\mathbf{u}$:

- samodružné body: žiadne,
- samodružné priamky: všetky priamky so smerovým vektorom $\mathbf{u}$,
- samodružné smery: všetky smery

4.1.1 Hľadanie invariantných bodov, smerov, podpriestorov

Pre skúmanie invariantov afinných zobrazení všeobecne je užitočné pozrieť sa bližšie na maticu afinnej transformácie (viď odsek 2.4). Ak f je afinná transformácia $\mathbb{E}^2$, jej matica A_f má tvar

$$A_f = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Obraz bodu so súradnicami (p_1, p_2) nájdeme násobením matíc:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{10} \\ a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + a_{20} \\ 1 \end{pmatrix},$$

čiže

$$f(p_1, p_2) = (a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{10}, a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + a_{20}).$$

Hľadanie invariantných bodov je ľahké. Pre transformáciu $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ s maticou A_f hľadáme také body $X = (x_1, \dots, x_n)$, že $f(X) = X$. Maticovo:

$$A_f \mathbf{x} = \mathbf{x},$$

kde $\mathbf{x}$ je stĺpcová matica $(x_1 \dots x_n 1)^T$. Toto je sústava n lineárnych rovníc o n neznámych $x_1, \dots, x_n$ (v poslednom riadku je rovnosť $1 = 1$, preto je rovníc naozaj len n).

Hľadanie invariantných smerov je trošička komplikovanejšie. Z matice A_f si zoberieme podmaticu A_{Df} popisujúcu asociované zobrazenie vektorových priestorov. Chceme teraz nájsť také vektory $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, pre ktoré platí, že $Df(\mathbf{u}) = \lambda \mathbf{u}$ pre nejaké $\lambda \in \mathbb{R}$. Maticovo:

$$A_{Df} \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$$

(tu $\mathbf{u}$ je stĺpcová matica obsahujúca súradnice vektora $\mathbf{u}$). Poslednú rovnosť upravíme ($\mathbf{I}_n$ je jednotková $n \times n$ matica):

$$(A_{Df} - \lambda \mathbf{I}_n) \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Tu $\mathbf{u}$ je nenulový vektor a $A_{Df} - \lambda \mathbf{I}_n$ je štvorcová matica. Ak ju vnímame ako maticu zobrazenia, tak obrazom nenulového vektora môže byť nulový vektor práve vtedy, keď toto zobrazenie nie je injektívne, čo je ekvivalentné podmienke, že

$$|A_{Df} - \lambda \mathbf{I}_n| = 0. \quad (11)$$

Toto je rovnica s neznámou λ , ktorú nazývame **charakteristickou rovnicou** lineárneho zobrazenia Df , tiež matice A_{Df} . Polynóm na ľavej strane rovnosti (11) tiež nazývame **charakteristickým polynómom** lineárneho zobrazenia Df aj matice A_{Df} .

Pomocou rovnice (11) tak vypočítame vlastné hodnoty zobrazenia f , budú to korene $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ charakteristickej rovnice. Pre každú vlastnú hodnotu λ_i potom vypočítame zodpovedajúci samodružný vektor ako netriviálne riešenie sústavy lineárnych rovníc

$$(A_{Df} - \lambda_i \mathbf{I}_n) \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

s neznámymi $u_1, \dots, u_n$.

Hľadanie invariantných (afinných) podpriestorov je trochu náročnejšie. Obmedzíme sa preto len na hľadanie invariantných priamok v rovine.

Ak je priamka p invariantná vzhľadom na transformáciu f , potom pre body $A, B \in p$, $A \neq B$ platí, že $f(A), f(B) \in p$ a preto $f(B) - f(A) \in \langle B - A \rangle$. Teda smer priamky p musí byť tiež samodružný. Takže najprv nájdeme samodružné smery transformácie a potom sa ku každému smeru snažíme nájsť priamku, ktorá by bola samodružná. K tomu nám pomôže si uvedomiť (tak ako v príklade o posunutí na začiatku kapitoly), že ak priamka p je samodružná, tak pre každý bod $X \in p$ platí, že $f(X) - X$ je nejaký smerový vektor priamky (ktorý zároveň určuje samodružný smer zobrazenia), a teda je kolmý na normálový vektor priamky. Čiže ak $\langle \mathbf{u} \rangle$ ($\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$) je samodružný smer, tak riešime rovnu

$$(f(X) - X) \cdot \mathbf{n} = 0,$$

kde $\mathbf{n}$ je vektor kolmý na smer $\mathbf{u}$, teda je normálovým vektorom hľadanej samodružnej priamky.

4.2 Afinity $\mathbb{E}^n$ tvoria grupu

Afinné transformácie $\mathbb{E}^2$ netvoria grupu, napríklad premietanie na x -os

$$(a, b) \mapsto (a, 0)$$

nemá inverzný prvok. Ak by sme sa však obmedzili len na bijektívne transformácie (tzv. afinity), tie už grupu tvoria, o čom sa hneď presvedčíme.

Nech f je afinita $\mathbb{E}^n$, t.j. bijektívne zobrazenie. Presvedčili sme sa (Tvrdenie 2.21 v časti o afinných zobrazeniach), že toto je ekvivalentné faktu, že asociované zobrazenie vektorového priestoru do seba $Df: V(\mathbb{E}^n) \rightarrow V(\mathbb{E}^n)$ je bijektívne.

Lineárne zobrazenie vektorových priestorov je bijektívne práve vtedy, keď jeho matica je regulárna. V tomto prípade teda máme, že $|A_{Df}| \neq 0$. Lahko sa presvedčíme, že $|A_f| = |A_{Df}|$. Našli sme tak kritérium, kedy je afinná transformácia afinitou:

Tvrdenie 4.4. Nech $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ je afinná transformácia a nech je A_f jej matica. Potom je f afinitou práve vtedy, keď je matica A_f regulárna.

Dá sa samozrejme skúmať štruktúra grupy všetkých afínit. My sa ale obmedzíme na menšiu, veľmi dôležitú podgrupu.

4.3 Zhodnosti tvoria podgrupu afínit

Samodružné body, priamky, vlastné vektory atď. sú invariantami, ktoré študujeme, keď sa snažíme pochopiť jednu konkrétnu transformáciu daného priestoru. Okrem týchto sa ale môžeme baviť aj o iných typoch invariantov zobrazení, a to takých, ktoré sa netýkajú jedného konkrétneho zobrazenia ale celej triedy. Invariantom triedy tak môže byť útvar, veličina či koncept, ktorý zachovávajú všetky uvažované transformácie.

Tak napríklad afinné transformácie zachovávajú afinné kombinácie bodov a presne toto je charakteristika, ktorá afinity odlišuje od ostatných transformácií. V geometrii afinity tradične popisujeme ako bijektívne transformácie afinného priestoru zachovávajúce deliaci pomer bodov (Veta 2.12, Poznámka 2.13), či inak, že deliaci pomer je základným invariantom afínit, alebo všeobecnejšie afinných zobrazení.

Tak v tejto časti sa zameriame na nový invariant triedy zobrazení: vzdialenosť bodov.

Definícia 4.5. Zobrazenie $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ sa nazýva **zhodnosť (izometria)**, ak pre ľubovoľné body $X, Y \in \mathbb{E}^n$ platí, že $|f(X)f(Y)| = |XY|$

Veta 4.6. Každá zhodnosť euklidovského priestoru je jeho afinitou.

Dôkaz. Zobrazenie $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ je afinné, keď zachováva afinné kombinácie bodov, t.j. keď pre ľubovoľné $P_0, \dots, P_r \in \mathbb{E}^n$ a $\lambda_0, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ také, že $\sum_{i=0}^r \lambda_i = 1$, platí

$$f\left(\sum_{i=0}^r \lambda_i P_i\right) = \sum_{i=0}^r \lambda_i f(P_i). \quad (12)$$

Podľa Vety 2.12 stačí ukázať, že zobrazenie zachováva afinné kombinácie dvojíc bodov, t.j. že pre ľubovoľné rôzne $P_0, P_1 \in \mathbb{E}^n$ platí

$$f((1 - \lambda)P_0 + \lambda P_1) = (1 - \lambda)f(P_0) + \lambda f(P_1).$$

Pre nasledovné úvahy bude užitočné preskúmať bližšie vzťah medzi vzdialenosťami v trojici kolineárnych bodov na jednej strane a barycentrickou kombináciou na druhej strane.

Nech A, B, C sú navzájom rôzne kolineárne body. Existuje tak jediné $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$C = (1 - \lambda)A + \lambda B. \quad (13)$$

Nech bod C leží medzi bodmi A a B , teda $0 < \lambda < 1$. Potom elementárnymi úpravami z (13) dostaneme

$$|AC| = \lambda|AB| \quad \text{a tiež} \quad |BC| = (1 - \lambda)|AB|. \quad (14)$$

Naopak, nech pre body A, B, C platí

$$|AC| = a|AB| \quad \text{a tiež} \quad |BC| = b|AB|,$$

kde

$$a, b \in \mathbb{R}, \quad a, b > 0, \quad a + b = 1.$$

Potom

$$|AB| = |AC| + |BC|,$$

odkiaľ usúdime, že A, B, C sú kolineárne, pričom bod C leží medzi bodmi A a B , a $C - A = a(B - A)$, teda $C = (1 - a)A + aB$.

Označme $X = (1 - \lambda)P_0 + \lambda P_1$. Nech $X \neq P_0$, $X \neq P_1$ (ak by nastala niektorá z rovností, niet čo dokazovať, kombinácia bodov je triviálne zachovaná). Body P_0, P_1, X sú kolineárne a tak určite nastane jedna z možností

- $|P_0P_1| = |P_0X| + |XP_1|$,
- $|P_0X| = |P_0P_1| + |P_1X|$,
- $|P_1X| = |P_1P_0| + |P_0X|$.

Keďže f je zhodnosť, ten istý vzťah bude platiť aj pre $f(P_0), f(P_1), f(X)$ a teda sú aj tieto body kolineárne. Z hore uvedenej analýzy v prvom prípade hneď vidíme, že $f(X) = (1 - \lambda)f(P_0) + \lambda f(P_1)$. Pre druhý prípad buď urobíme podobnú analýzu alebo bod P_1 vyjadríme ako kombináciu zvyšných dvoch bodov:

$$P_1 = (1 - \mu)P_0 + \mu X$$

a využijeme vzťah medzi λ a μ . Tak isto vyriešime aj tretí prípad.

Ukázali sme, že zobrazenie f je afinné. Potrebujeme ešte ukázať, že f je bijektívne.

Zo separačnej vlastnosti metriky máme, že ak $A \neq B$, potom $|AB| \neq 0$, teda $|f(A)f(B)| \neq 0$, a tak aj $f(A) \neq f(B)$. Ukázali sme, že zhodnosť f je injektívne zobrazenie. Z Tvrdenia 2.21 je potom aj Df injektívne. Keďže Df je transformácia vektorového priestoru $\mathbb{R}^n$, z lineárnej algebry vieme, že vďaka injektívnosti je Df aj surjektívne, a teda znovu z Tvrdenia 2.21 je f surjektívne. $\square$

Môžeme to teraz zhrnúť aj tak, že zhodnosť je taká afinita $\mathbb{E}^n$, ktorá zachováva vzdialenosti bodov.

Veta 4.7. Množina všetkých izometrií na $\mathbb{E}^n$ spolu s operáciou skladania zobrazení tvorí grupu.

Dôkaz. Potrebujeme overiť, že

- (i) identita je zhodnosť,
- (ii) zloženie dvoch zhodností je zhodnosť,
- (iii) inverzná afinita k zhodnosti je tiež zhodnosť.

(i) je zrejmé.

(ii) Nech $f, g: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ sú zhodnosti. Potom pre $X, Y \in \mathbb{E}^n$ platí

$$|(f \circ g)(X)(f \circ g)(Y)| = |f(g(X))f(g(Y))| = |g(X)g(Y)| = |XY|,$$

teda $f \circ g$ je zhodnosť.

(iii) Nech f je zhodnosť a f^{-1} je k nej inverzná afinita. Pre každé $X \in \mathbb{E}^n$ označme $X' = f(X)$, teda platí, že $X = f^{-1}(X')$. Potom

$$|f^{-1}(X')f^{-1}(Y')| = |XY| = |f(X)f(Y)| = |X'Y'|,$$

preto f^{-1} je zhodnosť. $\square$

Definícia 4.8. Grupa izometrií euklidovského priestoru $\mathbb{E}^n$ sa nazýva **euklidovská grupa**, ozn. $E(n)$.

4.4 Ktoré afinity sú izometriami – kritérium

Veta 4.9. Afinita $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ je zhodnosť práve vtedy, keď $Df: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ zachováva skalárny súčin.

Dôkaz. Nech je f zhodnosť. Nech $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ sú ľubovoľné vektory. Potrebujeme ukázať, že

$$Df(\mathbf{u}) \cdot Df(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}.$$

Všimnime si najprv, že pre ľubovoľný vektor $\mathbf{w}$, ak $Y - X = \mathbf{w}$ je jeho umiestnenie, tak z faktu, že f je zhodnosť, vyplýva

$$\begin{aligned}\|Df(\mathbf{w})\|^2 &= Df(\mathbf{w}) \cdot Df(\mathbf{w}) = Df(Y - X) \cdot Df(Y - X) \\ &= (f(Y) - f(X)) \cdot (f(Y) - f(X)) = |f(X)f(Y)|^2 \\ &= |XY|^2 = (Y - X) \cdot (Y - X) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} = \|\mathbf{w}\|^2,\end{aligned}$$

teda Df zachováva dĺžky vektorov. Potom z rovnosti

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}(\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2).$$

už dostaneme, že Df zachováva skalárny súčin.

Nech teraz naopak Df zachováva skalárny súčin. Potom pre ľubovoľné $X, Y \in \mathbb{E}^n$ platí

$$\begin{aligned}|f(X)f(Y)| &= \|f(Y) - f(X)\| = \|Df(Y - X)\| \\ &= \sqrt{Df(Y - X) \cdot Df(Y - X)} = \sqrt{(Y - X) \cdot (Y - X)} \\ &= \|Y - X\| = |XY|,\end{aligned}$$

čiže f je zhodnosť. □

Lineárne zobrazenie vektorového priestoru do seba, ktoré zachováva skalárny súčin, sa nazýva **ortogonálne**.

Veta 4.10. Nech $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je lineárne zobrazenie vektorových priestorov. Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:

- (i) φ je ortogonálne (t.j. zachováva skalárny súčin),
- (ii) φ zobrazuje ortonormálnu bázu na ortonormálnu bázu,
- (iii) $A_\varphi^T A_\varphi = \mathbf{I}_n$, kde A_φ je matica zobrazenia φ (vzhľadom na ortonormálnu bázu).

Poznámka 4.11. Pre zjednodušenie zápisov budeme používať symbol δ_{ij} ($i, j \in \mathbb{N}$), tzv. **Kroneckerovo delta**:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ak } i = j \\ 0 & \text{ak } i \neq j \end{cases}$$

Dôkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii): Nech φ je ortogonálne a nech $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ je ortonormálna báza. Potom pre $\varphi(\mathbf{u}_i)$ a $\varphi(\mathbf{u}_j)$ platí

$$\varphi(\mathbf{u}_i) \cdot \varphi(\mathbf{u}_j) = \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = \delta_{ij},$$

teda vektory $\varphi(\mathbf{u}_i)$ ($i = 1, \dots, n$) tvoria ortonormálnu bázu $\mathbb{R}^n$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Nech pre ortonormálnu bázu $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ je aj báza

$$\varphi(\mathbf{u}_1), \varphi(\mathbf{u}_2), \dots, \varphi(\mathbf{u}_n)$$

ortonormálna, teda na vektoroch $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ zobrazenie φ zachováva skalárny súčin. Predvedieme si, že potom už z bilinearitu skalárneho súčinu vyplýva, že sa zachováva na všetkých vektoroch. Každý vektor totiž vieme zapísať ako lineárnu kombináciu bázy. Ak $\mathbf{v} = \sum_i v_i \mathbf{u}_i$, $\mathbf{w} = \sum_j w_j \mathbf{u}_j$, potom

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{v}) \cdot \varphi(\mathbf{w}) &= \varphi\left(\sum_i v_i \mathbf{u}_i\right) \cdot \varphi\left(\sum_j w_j \mathbf{u}_j\right) \\ &= \left(\sum_i v_i \varphi(\mathbf{u}_i)\right) \cdot \left(\sum_j w_j \varphi(\mathbf{u}_j)\right) \\ &= \sum_i \sum_j v_i w_j \varphi(\mathbf{u}_i) \cdot \varphi(\mathbf{u}_j) \\ &= \sum_i \sum_j v_i w_j \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = \left(\sum_i v_i \mathbf{u}_i\right) \cdot \left(\sum_j w_j \mathbf{u}_j\right) \\ &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}. \end{aligned}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Stĺpce matice A_φ obsahujú súradnice vektorov $\varphi(\mathbf{e}_i)$. V matici $A_\varphi^T A_\varphi$ preto máme na ij -tej pozícii skalárny súčin $\varphi(\mathbf{e}_i) \cdot \varphi(\mathbf{e}_j)$:

$$(A_\varphi^T A_\varphi)_{ij} = \varphi(\mathbf{e}_i) \cdot \varphi(\mathbf{e}_j) = \delta_{ij},$$

(posledná rovnosť vyplýva z (ii)), čiže $A_\varphi^T A_\varphi = \mathbf{I}_n$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Ak $A_\varphi^T A_\varphi = \mathbf{I}_n$, tak z pozície na i -tom riadku a j -tom stĺpci máme, že $\varphi(\mathbf{e}_i) \cdot \varphi(\mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$, a teda $\varphi(\mathbf{e}_1), \dots, \varphi(\mathbf{e}_n)$ je ortonormálna báza $\mathbb{R}^n$. $\square$

Dôsledok 4.12. Obrazom karteziánskej sústavy súradníc v izometrii je karteziánska sústava súradníc.

Dôkaz. Nech f je izometria $\mathbb{E}^n$. Nech $(O, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ je karteziánska súradnicová sústava. Jej obrazom je $(n+1)$ -tica $(f(O), Df(\mathbf{e}_1), \dots, Df(\mathbf{e}_n))$, kde $Df(\mathbf{e}_1), \dots, Df(\mathbf{e}_n)$ je tiež ortonormálna báza, lebo Df je ortogonálne zobrazenie. $\square$

Tvrdenie 4.13. Všetky ortogonálne zobrazenia $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tvoria grupu, ktorá sa nazýva **ortogonálna grupa**, ozn. $O(n)$

Dôkaz. Identita (ako neutrálny prvok vzhľadom na skladanie ortogonálnych zobrazení) je zrejme ortogonálne zobrazenie.

Nech φ, ψ sú ortogonálne zobrazenia s maticami A_φ, A_ψ . Pre maticu zobrazenia $\psi \circ \varphi$ platí, že $A_{\psi \circ \varphi} = A_\psi A_\varphi$. Preto

$$A_{\psi \circ \varphi}^T A_{\psi \circ \varphi} = (A_\psi A_\varphi)^T (A_\psi A_\varphi) = A_\varphi^T A_\psi^T A_\psi A_\varphi = A_\varphi^T A_\varphi = \mathbf{I}_n,$$

teda $\psi \circ \varphi$ je tiež ortogonálne zobrazenie.

Nech φ^{-1} je inverzné zobrazenie k ortogonálnemu zobrazeniu φ . Vieme už, že $A_{\varphi^{-1}} = A_\varphi^{-1}$. Potom

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_n &= A_\varphi^T A_\varphi & | & \cdot A_\varphi^{-1} \\ A_\varphi^{-1} &= A_\varphi^T & | & \cdot (A_\varphi^{-1})^T \\ (A_\varphi^{-1})^T A_\varphi^{-1} &= (A_\varphi^{-1})^T A_\varphi^T = (A_\varphi A_\varphi^{-1})^T = \mathbf{I}_n. \end{aligned}$$

Takže inverzné zobrazenie k ortogonálnemu je tiež ortogonálne. □

Príklad 4.14. Vieme overiť, že napríklad otočenie r roviny $\mathbb{E}^2$ okolo bodu S je izometria. Najprv sa pomocou Vety 4.10 presvedčíme, že otočenie r_0 okolo $(0, 0)$ je izometria. Nakoniec otočenie r okolo S o uhol α vieme rozložiť

$$r = t_s \circ r_0 \circ t_{-s},$$

kde t_s je posunutie o vektor $S - (0, 0)$. Všetky partikulárne zobrazenia sú izometrie, teda aj ich zloženie r je izometria.

4.5 Grupa zhodností $\mathbb{E}^2$

Tvrdenie 4.15. Nech $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ je zhodnosť. Potom pre determinant matice jej asociovaného zobrazenia A_f platí

$$|A_{Df}| = \pm 1.$$

Dôkaz. Ide o dôsledok Vety 4.10. Ak f je zhodnosť, tak $A_{Df}^T A_{Df} = \mathbf{I}_n$. Potom

$$|A_{Df}^T A_{Df}| = |\mathbf{I}_n| = 1$$

a na druhej strane

$$|A_{Df}^T A_{Df}| = |A_{Df}^T| |A_{Df}| = |A_{Df}|^2.$$

Odtiaľ už máme výsledok. □

Zhodnosť $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ sa nazýva **priama**, ak $|A_{Df}| = 1$ a **nepriama**, ak $|A_{Df}| = -1$. Inak: zhodnosť je priama, ak zachováva orientáciu priestoru.

Zrejme priame zhodnosti tvoria podgrupu všetkých zhodností. (Vedeli by ste to ukázať formálne?)

Lema 4.16. Nech $A, B \in \mathbb{E}^2$ sú rôzne body. Množina takých bodov X v $\mathbb{E}^2$, že $AX \cong BX$, tvorí priamku, ktorá prechádza stredom úsečky AB a je kolmá na $\overleftrightarrow{AB}$. Táto priamka sa nazýva **os úsečky** AB .

Dôkaz. dú □

Definícia 4.17. Nech o je priamka v $\mathbb{E}^2$. **Súmernosť podľa priamky o (osová súmernosť)** je transformácia $\mathcal{S}_o$ euklidovskej roviny definovaná nasledovne:

Nech $X \in \mathbb{E}^2$.

- Ak $X \in o$, potom $\mathcal{S}_o(X) = X$,
- Ak $X \notin o$, nech
 - $o_X^\perp$ je priamka prechádzajúca cez X a kolmá na o
 - a $X^\perp = o \cap o_X^\perp$.

Potom $\mathcal{S}_o(X)$ je taký bod na $o_X^\perp$, ktorý leží v opačnej polrovine od o ako X a $|\mathcal{S}_o(X)X^\perp| = |XX^\perp|$.

Ekvivalentne by sme mohli obraz bodu X v súmernosti $\mathcal{S}_o$ podľa o popísať aj tak, že $\mathcal{S}_o(X)$ je taký bod, že o je os úsečky $X\mathcal{S}_o(X)$.

Tvrdenie 4.18. Osová súmernosť je nepriama zhodnosť.

Dôkaz. Súmernosť podľa x -osi $\mathcal{S}$ zobrazí bod (x_1, x_2) na bod $(x_1, -x_2)$. Lahko sa presvedčíme, že je to zhodnosť:

$$|\mathcal{S}(a_1, a_2)\mathcal{S}(b_1, b_2)| = |(a_1, -a_2)(b_1, -b_2)| = |(a_1, a_2)(b_1, b_2)|$$

Súmernosť podľa ľubovoľnej osi vieme previesť na súmernosť podľa x -osi zložením s vhodnými otočeniami alebo posunutiami. Otočenia aj posunutia sú tiež zhodnosti, takže výsledné zobrazenie je zhodnosť.

Posunutie aj otočenie sú priame zhodnosti, keďže determinanty matíc týchto zobrazení sú rovné 1. Súmernosť podľa x -osi je zas nepriama zhodnosť. Zloženie jednej nepriamej a viacerých priamych zhodností je nepriama zhodnosť (z vlastnosti determinantu súčinu matíc). □

Poznámka 4.19. Pre osovú súmernosť $\mathcal{S}$ zrejme platí, že $\mathcal{S} \circ \mathcal{S} = id$. Takéto zobrazenie sa nazýva **involúcia**.

Veta 4.20. Každá zhodnosť euklidovskej roviny sa dá napísať ako zloženie nanajvýš troch osových súmerností.

Dôkaz. Nech f je daná zhodnosť. Nech A, B, C sú tri nekolineárne body. Nájdeme nanajvýš tri osovú súmernosti $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$ také, že pre ich zloženie

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_3 \circ \mathcal{S}_2 \circ \mathcal{S}_1$$

(prípadne bude $\mathcal{S}$ zložením menej ako 3 súmerností) bude platiť

$$\mathcal{S}(A) = f(A), \quad \mathcal{S}(B) = f(B), \quad \mathcal{S}(C) = f(C).$$

Potom z Dôsledku 2.20 o určenosti afinného zobrazenia vyplýva, že $\mathcal{S}$ a f je to isté zobrazenie.

Keďže f je zhodnosť, tak pre body A, B, C platí, že

$$|f(A)f(B)| = |AB|, \quad |f(B)f(C)| = |BC|, \quad |f(A)f(C)| = |AC|.$$

Ak $f(A) = A$, tak $\mathcal{S}_1$ nech je identita. Ak $f(A) \neq A$, potom nech o_1 je priamka prechádzajúca stredom úsečky $Af(A)$ a kolmá $\overleftrightarrow{Af(A)}$ (t.j. os úsečky $Af(A)$). Nech $\mathcal{S}_1$ je osová súmernosť podľa osi o_1 . Zrejme $\mathcal{S}_1$ bod A zobrazí na bod $f(A)$. Označme $B_1 = \mathcal{S}_1(B)$ a $C_1 = \mathcal{S}_1(C)$. Keďže osová súmernosť je zhodnosť, tak platí

$$|f(A)f(B)| = |AB| = |f(A)B_1|.$$

Ak $f(B) = B_1$, potom zas nech $\mathcal{S}_2$ je identita. Ak $f(B) \neq B_1$, potom nech o_2 je os úsečky $B_1f(B)$ a nech $\mathcal{S}_2$ je osová súmernosť podľa osi o_2 , teda $\mathcal{S}_2(B_1) = f(B)$. Keďže $|f(A)f(B)| = |f(A)B_1|$, tak $f(A) \in o_2$. Preto $\mathcal{S}_2(f(A)) = f(A)$. Pre bod C označíme $\mathcal{S}_2(C_1) = C_2$. Pre vzdialenosti bodov máme

$$\begin{aligned} |f(A)f(C)| &= |AC| = |f(A)C_1| = |f(A)C_2| \\ |f(B)f(C)| &= |BC| = |B_1C_1| = |f(B)C_2|, \end{aligned}$$

kde v oboch riadkoch prvá rovnosť vyplýva z faktu, že f je zhodnosť, druhá z toho, že $\mathcal{S}_1$ je zhodnosť a tretia z toho, že $\mathcal{S}_2$ je zhodnosť.

Nakoniec, ak $f(C) \neq C_2$, potom nech o_3 je os úsečky $C_2f(C)$. Z práve ukázaných rovností máme, že $f(A), f(B) \in o_3$, teda sú to pevné body súmernosti $\mathcal{S}_3$ podľa osi o_3 . Navyše $\mathcal{S}_3(C_2) = f(C)$. (Znovu v prípade, že $f(C) = C_2$, položíme $\mathcal{S}_3 = id$)

Našli sme tak súmernosti $\mathcal{S}_i$ také, že zobrazenia $\mathcal{S}_3 \circ \mathcal{S}_2 \circ \mathcal{S}_1$ a f súhlasia na trojici nekolineárnych bodov A, B, C , čiže

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_3 \circ \mathcal{S}_2 \circ \mathcal{S}_1$$

□

Dôsledok 4.21. Osové súmernosti generujú grupu všetkých zhodností.

odkaz do transformácií roviny na klasifikáciu zhodností

možno už ten posledný dôkaz sa môže nejak tam presmerovať