Axiómy incidencie

Definícia. Dve priamky v rovine sa nazývajú *rovnobežnými (rovnobežkami)*, ak nemajú spoločný bod. (Formálne: $p \parallel q \iff p \cap q = \emptyset$.)

Definícia. Body $B_1, B_2, B_3, \dots$ sú *kolineárne*, ak existuje priamka so všetkými týmito bodmi incidentná. (Formálne: $B_1, B_2, \dots$ sú *kolineárne*, ak $\exists p : B_i \in p\ \forall B_i$.)

Tvrdenie. *Ak p, q sú dve rôzne priamky, potom p a q majú najviac jeden spoločný bod. (Formálne: $p \neq q \Rightarrow |p \cap q| \leq 1$.)*

Mali by ste zvládnuť zadefinovať:

- nekolineárne body
- rôznobežné priamky
- priesečník priamok

Vyjasnite si (mali by ste vedieť vysvetliť):

- Čo je to model?
- Čo je to „dokázateľné tvrdenie"? Čo je to „pravdivé tvrdenie"? Aký je medzi týmito dvoma pojmami rozdiel?
- Čo znamená „tvrdenie nezávislé od axióm?"

Axiómy usporiadania

Definícia.

- *Úsečka* $AB = \{A, B\} \cup \{X \mid A * X * B\}$.
- *Polpriamka* $\overrightarrow{AB} = AB \cup \{X \mid A * B * X\}$
  (tiež $\overrightarrow{AB} = \{X \mid X = A \lor X = B \lor A * X * B \lor A * B * X\}$)

Mali by ste tiež vedieť zadefinovať:

- čo znamená „ležať na tej istej strane" od danej priamky,
- čo znamená „ležať na opačných stranách" od danej priamky.
  (Napríklad: $A, B \notin p$ *ležia na opačných stranách* od priamky p, ak $AB \cap p \neq \emptyset$.)

Veta (separačná vlastnosť v rovine, U4S).
V usporiadanej rovine platia nasledovné ekvivalentné tvrdenia (ide o rôzne formulácie toho istého tvrdenia)

- *Každá priamka delí rovinu na dve polroviny.*
- *Ľubovoľná priamka p delí rovinu okrem bodov priamky p na dve triedy tak, že body ležia v tej istej triede práve vtedy, keď ležia na tej istej strane od priamky p. (t. j. neexistuje bod $X \in p$ taký, že $A * X * B$, kde A a B sú dané body.)*
- *Pre priamku p a body A, B, C neležiace na tejto priamke platí:*
  (i) *Ak A a B ležia na tej istej strane od priamky p a B a C ležia na tej istej strane od priamky p, potom aj A a C ležia na tej istej strane od priamky p.*
  (ii) *Ak A a B ležia na opačných stranách od priamky p a B a C ležia na opačných stranách od priamky p, potom A a C ležia na tej istej strane od priamky p.*
  (iii) *Ak A a B ležia na opačných stranách od priamky p a B a C ležia na tej istej strane od priamky p, potom aj A a C ležia na opačných stranách od priamky p.*

Teraz by ste mali vedieť definovať

- polrovinu,
- vnútorné body polroviny, hranicu polroviny,
- opačnú polrovinu k danej polrovine.

VETA (o usporiadaní štyroch bodov).
Nech $A * B * C$ *a* $A * C * D$. *Potom* $B * C * D$ *aj* $A * B * D$.

VETA (Paschova).
Nech $A * B * C$ *a* $B * C * D$. *Potom* $A * B * D$ *a* $A * C * D$.

TVRDENIE (separačná vlastnosť na priamke, U*).
V usporiadanej rovine platia nasledovné ekvivalentné tvrdenia (ide o rôzne formulácie toho istého tvrdenia)

- *Každý bod* B *na priamke* p *rozdeľuje ostatné body tejto priamky na dve triedy tak, že dva body* X *a* Y *neležia v tej istej triede práve vtedy, keď* $X * B * Y$.
- *Nech* $A * B * C$ *sú body na priamke* p. *Potom pre každý bod* $X \in p$, $X \neq B$ *platí, že buď* $X \in \overrightarrow{BA}$ *alebo* $X \in \overrightarrow{BC}$.
- *Ak* $A * B * C$ *sú body na priamke* p, *potom* $\overrightarrow{BA} \cap \overrightarrow{BC} = B$ *a* $\overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BC} = p$.

DEFINÍCIA. Polpriamka $\overrightarrow{AC}$ je *opačnou polpriamkou* k polpriamke $\overrightarrow{AB}$, ak $C * A * B$.

Dôkladné zvládnutie teórie o usporiadanej rovine demonštrujete, ak viete dokázať, že:

- U4P a U4S sú za predpokladu I1-I3, U1-U3 ekvivalentné,
- U* a veta o usporiadaní štyroch bodov sú za predpokladu I1-I3, U1-U3 ekvivalentné,
- U* vyplýva z U4,
- U4 **ne**vyplýva z U*, U4 je silnejšia ako U* (demonštrujete na modeloch).

Určite treba vedieť definovať

- uhol,
- ramená uhla, vrchol uhla,
- vnútorné a vonkajšie body uhla.

VETA (crossbar theorem, veta o priečke uhla). *Nech* D *je vnútorný bod uhla* $\angle ABC$. *Potom polpriamka* $\overrightarrow{BD}$ *pretína úsečku* AC.

Mali by ste zvládnuť zadefinovať:

- trojuholník, jeho vrcholy a strany,
- vnútorné a vonkajšie body trojuholníka (bez použitia Jordanovej vety).