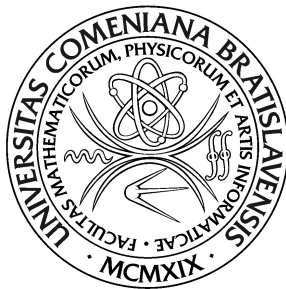


VEDECKÁ RADA FAKULTY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITY KOMENSKÉHO V BRATISLAVE



RNDR. ZSOLT TÓTH

AUTOREFERÁT DIZERTAČNEJ PRÁCE

TRIANGULÁCIE V ROVINE, TERÉNE A PRIESTORE

na získanie vedeckoakademickej hodnosti

philosophiae doctor

v odbore doktorandského štúdia:
11-16-9 Geometria a topológia

BRATISLAVA 2010

Dizertačná práca bola vypracovaná v internej forme doktorandského štúdia na Katedre algebry, geometrie a didaktiky matematiky Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave.

Predkladateľ: RNDr. Zsolt Tóth
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave
Mlynská dolina 842 48 Bratislava

Školiteľ: Doc. RNDr. Andrej Ferko, PhD.
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave
Mlynská dolina 842 48 Bratislava

Oponenti: RNDr. Pavol Chalmovianský, PhD.
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave
Mlynská dolina 842 48 Bratislava

Prof. Ing. Jaroslav Polec, PhD.
Katedra telekomunikácií
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Slovenská technická univerzita v Bratislave
Ilkovičova 3, 812 19 Bratislava 1

Doc. RNDr. Daniela Velichová, CSc.
Katedra matematiky
Strojnícka fakulta
Slovenská technická univerzita v Bratislave
Námestie Slobody 17, 812 31 Bratislava

Autoreferát bol rozoslaný dňa: 13. 9. 2010

Obhajoba dizertačnej práce sa koná dňa 25. 10. 2010 o 13:00 hod. na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava, v miestnosti č. I-9 pred komisiou pre obhajobu dizertačnej práce doktorandského štúdia vymenovanou dňa 2. 9. 2010 predsedom spoločnej odborovej komisie vo vednom odbore 11-16-9 Geometria a topológia.

Predseda spoločnej odborovej komisie:

Doc. RNDr. Eduard Bod'a, CSc.
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave
Mlynská dolina 842 48 Bratislava

Abstrakt

Táto práca sa zaoberá špeciálnou podskupinou optimálnych triangulácií, takzvanými dátovo závislými trianguláciami. Jedná sa o techniku, ktorá vďaka svojim vhodným vlastnostiam má širokú škálu uplatnenia. Hlavným zámerom je skúmanie rekonštrukčných vlastností tejto metódy, a hľadanie aproximácií globálne optimálneho stavu, ktorá je NP-t ťažkou úlohou. Práca obsahuje popis existujúcich prístupov a predstavuje rôzne vylepšenia a rozšírenia. Hlavnými prínosmi sú rozšírenie dátovo závislej techniky do vyšších dimenzií a nájdenie paralelného prístupu, ktorá vytvára lokálne optimálne triangulácie pomocou grafického hardvéru. Okrem toho sú uvedené rôzne vylepšenia pre rovinné dátovo závislé triangulácie, kombinácia s výsledkami konvolučných techník v prípade aplikačnej oblasti rekonštrukcie obrazu. Je predstavená aj koncepcia kompresie viacrozmerných dát pomocou dátovo závislej techniky. Výsledky sú analyzované z rôznych aspektov, a na základe vyvodенých dôsledkov sú stanovené rôzne výskumné smery pre budúcu prácu.

Abstract

This thesis deals with a special subset of optimal triangulations, called data dependent triangulations. This technique has wide usability because of its properties. The main goal is the investigation of the reconstruction behavior of this method, and the approximation of the globally optimal solution, which is NP-hard to find. The thesis contains the summarization of the existing approaches and introduces several improvements and extensions. The main contributions are the following: extension of the data dependent technique for n -dimensional usage; a parallel approach, which uses the graphics hardware for the locally optimal triangulations generation. Besides of these results there are several improvements presented for the planar data dependent triangulations. For image reconstruction usage is presented an approach which combines the results of the convolution techniques with the results from the data dependent methods. A concept for a multidimensional scattered data compression is also introduced. The results are analyzed from different points of view, and several future work ideas are presented.

Úvod

Úlohou výpočtovej geometrie je hľadanie algoritmických riešení pre geometrické problémy a poskytnutie efektívnych nástrojov pri riešení praktických úloh z rôznych vedných odborov. Významnú časť tejto vednej disciplíny tvorí skúmanie triangulácií a ich optimalizácia pre rôzne účely. Optimálne triangulácie majú širokú škálu využiteľnosti v počítačovej grafike ako aj v iných oblastiach vedy. Existujúce poznatky sú veľmi rozsiahle, a preto cieľom tejto práce je zamerať sa na špeciálnu podskupinu optimálnych triangulácií, nazývanú *dátovo závislé triangulácie*. Hlavným účelom ich použitia je rekonštrukcia po častiach lineárnych funkcií definovaných nad diskretnými dátami. V praxi to znamená, že táto metóda umožňuje väčšiu kontrolu nad vlastnosťami vytváranej triangulácie daného vstupu.

Cieľom tejto práce je rozširovať poznatky o dátovo závislých trianguláciách a sumarizovať existujúce teoretické vedomosti z hľadiska optimálnych triangulácií. Jedným z hlavných dosiahnutých výsledkov je zovšeobecnenie tejto techniky pre účely rekonštrukcie funkcií nad n -dimenzionálnou doménou pomocou simpliciálnej dekompozície domény. Ďalej, významná časť je venovaná paralelizácii rovinného prístupu, a to takým spôsobom, aby sa výpočty triangulácie dali vykonať na grafickej karte. Takisto je poskytnutý podrobný popis možnosti ich využitia pre kompresiu dát, ako aj kombinácie dátovo závislej triangulácie a štandardných rekonštrukčných techník pre účely zväčšenia obrazu.

Aplikačná oblasť dátovo závislých triangulácií je veľmi rozsiahla. Napríklad rekonštrukcia digitálneho obrazu (2D), rekonštrukcia medicínskych dát (3D), rekonštrukcia v čase sa meniacich volumetrických dát (4D), využitie pri spracovaní dát pre rôzne numerické simulácie, získavanie dodatočnej farebnej informácie pri snímacích čipoch digitálnych kamier atď. Vhodné nastavenie tejto metódy ju umožní prispôsobiť ľubovoľnému rekonštrukčnému problému. Okrem iného môže slúžiť aj na vektorizáciu dát. Raz vytvorená triangulácia poskytuje základnú štrukturalizáciu dát, v ktorej je možné získať neznámu funkčnú hodnotu z interpolácie hodnôt z vrcholov trojuholníka.

Prehľad problematiky

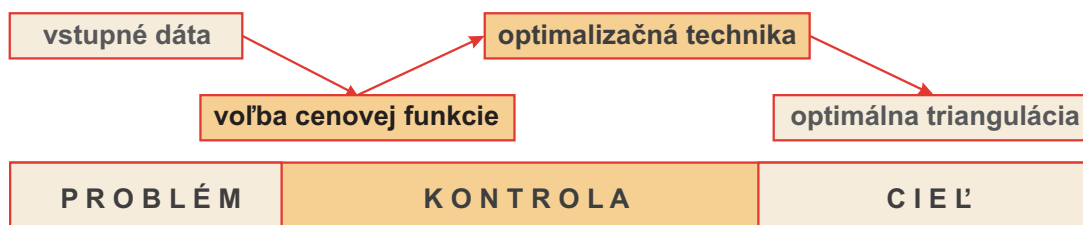
Jednou z aplikačných oblastí triangulácií je problematika rekonštrukcie. Jedná sa o veľmi dôležitú úlohu, ktorá sa vyskytuje pri práci s diskretnými dátami. Rekonštrukcia znamená určenie funkčnej hodnoty v ľubovoľnom bode z dostupných diskretných vzoriek. Vzhľadom na to, že rekonštrukcia je často len medzikrokom v postupe rôznych operácií a simulácií, je dôležité, aby bola vykonaná čo najkvalitnejšie. Zvyčajne sa vyžaduje čo najpresnejšia rekonštrukcia významných črt. V terminológii spracovania obrazu to znamená vysokofrekvenčné oblasti, t.j. rekonštrukciu hrán; pri rekonštrukcii 3D medicínskych dát získanie vhodne rekonštruovaných izoplôch atď.

Ako alternatíva k existujúcim konvolučným a numerickým metódam je geometricky založený prístup, ktorý využíva trianguláciu. Rekonštrukcia pomocou triangulácií znamená použitie triangulácie danej množiny ako rekonštrukčnú sieť. Nové hodnoty sa získajú ako barycentrické kombinácie dát z vrcholov triangulácie. Pomocou topologických zmien je táto technika schopná prispôsobiť trojuholníkovú sieť k črtám reprezentovaných v dátach a takto zvýšiť kvalitu rekonštrukcie. Najčastejšie sa používa preklápacia operácia hrán, vo vyšších dimenziách sa to nazýva bistellárne preklápanie [ES92]. Podrobný popis týchto operácií spolu s definíciami základných pojmov sa nachádza v dizertačnej práci. Kvalita triangulácie je závislá od tvaru jej trojuholníkov. Najčastejšie sa uvažujú vlastnosti ako vnútorné uhly, výška trojuholníka, obsah

trojuholníka, dĺžka hrán atď'. Na základe týchto faktorov sa hľadá triangulácia s maximálnou, minimálnou hodnotou alebo sumou týchto hodnôt. Prehľad optimálnych triangulácií možno nájsť v prehľadových prácach [BE95, Ede00, HD06].

Získanie väčšej kontroly nad kvalitou triangulácie bolo cieľom rozšírenia optimálnych triangulácií o metódu *dátovo závislých triangulácií*, ozn. *DDT*. Táto technika od autorov Dyn a spol. [DLR90] zmenila koncepciu chápania optimalizačných kritérií. Zvyčajne sa považovali dlhé a úzke trojuholníky za nežiaduce elementy v optimálnych trianguláciách. Až dátovo závislé triangulácie zmenili tento pohľad, a poukázali na možnosť využitia týchto prvkov. Úspech dátovo závislých triangulácií spočíva v priradení tzv. *cenových funkcií* k simplexom v trianguláciách na základe geometrických alebo iných vlastností, teda použitím špeciálnych optimalizačných kritérií. Minimalizáciou sumy všetkých priradených cenových funkcií sa dosiahne triangulácia so žiadanými vlastnosťami. Pri voľbe vhodných cenových funkcií sa to prejavuje výskytom dlhých, úzkych trojuholníkov v oblastiach, kde to vyžaduje rekonštrukcia funkčných hodnôt. Pre tento účel existujúce triangulácie nedávali také uspokojivé riešenia, aké poskytuje *DDT*. Minimalizácia cenových funkcií je ekvivalentná problematike hľadania triangulácie s minimálnou váhou (dĺžkou hrán) ozn. *MWT*, ktorá patrí medzi známe problémy vo výpočtovej geometrii. NP-ťažkosť tejto úlohy bola dokázaná len nedávno [Mul06]. Existujú rôzne poznatky o podgrafoch, aproximáciách a heuristikách *MWT* v rovine [Fer04]. V prípade *DDT* kvôli špeciálnemu oceneniu jednotlivých hrán (alebo iných komponentov) len časť týchto výsledkov je použiteľná.

Dátovo závislé triangulácie tvoria významnú časť skupiny optimálnych triangulácií. Ide o veľmi efektívny nástroj pre vytváranie optimálnych triangulácií, vďaka voľnosti chápania priradenia cien k jednotlivým komponentom triangulácie a voľby optimalizačnej techniky. Dizajn optimálnej siete pomocou *DDT* naznačuje graf zobrazený na Obrázku 1.



Obr. 1: Priebeh rekonštrukcie pomocou metódy dátovo závislých triangulácií.

Pri definícii cenových funkcií sa najčastejšie používa nasledujúca závislosť: každá hrana *DDT* triangulácie množiny V , ktorá neleží na konvexnom obale V , je ohodnotená pomocou informácií získaných práve zo štyroch vrcholov, ktoré sú vrcholmi trojuholníkov obsahujúce danú hranu. Presné definície jednotlivých cenových funkcií sa nachádzajú v dizertačnej práci a v článkoch [DLR90, Bro91, YBS01].

Okrem vhodnej voľby cenovej funkcie kvalitu výslednej triangulácie ovplyvní aj výber optimalizačného procesu. Optimalizačné prístupy sa dajú deliť na deterministické a stochastické na základe toho, či využívajú nejaké pravdepodobnostné postupy alebo nie.

Väčšina existujúcich deterministických dátovo závislých prístupov využíva konštrukciu pomocou iteračných procesov. Pri iteračných metódach dôležitú úlohu hrá voľba úvodnej triangulácie (začiatočný stav). Zvyčajne sa pre tento účel používa *Delaunayova triangulácia* (ozn. *DT*) [Aur91]. Najčastejšie používanou metódou pre vytváranie *DDT* je *Lawsonova optimalizačná procedúra* [Law77], ozn. *LOP*. Jej konštrukcia a výsledná štruktúra je úzko spájaná Delaunayovou trianguláciou, patriace medzi historicky prvé a významné triangulácie aproximujúce *MWT*. Jedná sa o iteračnú procedúru, pri ktorej sa testuje lokálna optimálnosť hrán. Iterácia

prebieha dovtedy pokiaľ existuje hrana, ktorá nie je lokálne optimálna. Hrana je lokálne optimálna, pokiaľ s jej preklápaním nevznikne triangulácia, ktorá má nižšiu cenu vzhľadom na dané kritérium. Lokálne optimálna triangulácia je taká triangulácia, kde každá hrana je lokálne optimálna. Výsledkom *LOP* je aproximácia *MWT*, nájdenie globálne optimálneho stavu nie je garantované. Rozšírenie Lawsonovej optimalizačnej procedúry pod názvom *look-ahead* (ozn. *LAT*) poskytli autori Yu a spol. v práci [YBS01]. Ich motiváciou bolo zlepšenie rekonštrukcie izočiari pri rekonštrukcii obrazov. Hlavnou ideou úpravy pôvodného algoritmu je v prehl'adávaní hlbšieho okolia testovanej hrany pri minimalizácii ceny triangulácie. Ďalšia metóda patriaca do skupiny deterministických prístupov pochádza od autorov článku [SW04]. Autori nazvali túto metódu *DDT na úrovni pixlov* (*pixel level DDT*) vzhľadom na voľbu aplikačnej oblasti, ktorou je rekonštrukcia obrazu. Pri konštrukcii triangulácie sa využíva dodatočná informácia, že dáta sú organizované do karteziánskej mriežky. Výhodou tejto metódy je nízka časová náročnosť výpočtov, kvalita výsledkov je nižšia ako v prípade doteraz uvedených *DDT* metód,

Najznámejším stochastickým prístupom pre oblasť *DDT* je *simulované žihanie* (ozn. *SA*) [Sch93]. Jedná sa o iteratívnu techniku, ktorá je založená na poznatkoch o priebehu fyzikálnych procesov v prírode. Hľadánie triangulácie *MWT* je analógiou hľadania globálne minimálneho energetického stavu kryštálov tekutín, pomocou postupného chladenia. Základným princípom *SA* je snaha vyhýbať sa lokálne optimálnym riešeniam, ktoré môžu vzbudzovať dojem globálnej optimality. Ďalší stochastický prístup ponúka možnosť ako skombinovať rôzne optimalizačné metódy a kritériá. Jedná sa o kombináciu deterministickej a stochastickej metódy, ktorá je založená na napodobňovaní evolúcie, a preto sa nazýva *genetická optimalizácia*, ozn. *GO*. Presný popis tejto metódy je možné nájsť v [Kol99].

Okrem uvedených deterministických a stochastických prístupov existujú aj ďalšie techniky ktoré sú relevantné pre túto prácu. Metóda založená na ohodnotení vrcholov bola predstavená v článku [Bro91]. Kombinácia simulovaného žihania a dátovo závislej techniky pre účely aproximácie rozptýlených dát v rovine bola predstavená v práci [KH01].

Poznámka. Prehl'ad problematiky možno uzavrieť pozorovaním, že v danej oblasti prebieha intenzívny výskum a že všeobecne používané metódy sa zatiaľ len hľadajú.

Vlastné rozšírenia

Časť popísaných algoritmov a prístupov z nasledujúcej kapitoly bola publikovaná v prácach [CTS*10, Tót04, Tót06, TVFG07].

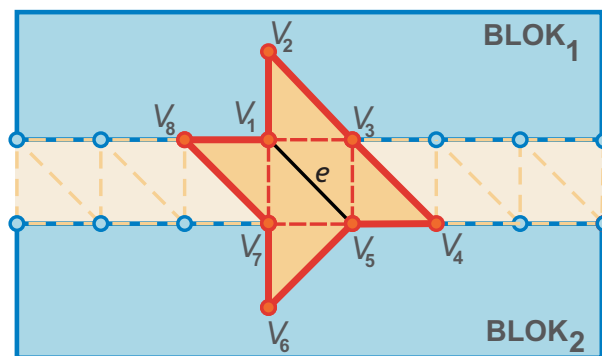
Rozdelenie na bloky

Metódy uvedené v prehl'adovej časti sú kompromisom medzi rýchlosťou nájdenia riešenia a kvalitou výsledku. V snahe kombinovať výhodné vlastnosti existujúcich prístupov vznikol nasledujúci návrh, ktorý je možné aplikovať na dáta organizované do karteziánskej mriežky.

Základnou myšlienkou a cieľom je vytvorenie takej štrukturalizácie dát, ktorá umožní reálne použitie dátovo závislej techniky, a pritom nedegraduje rekonštrukčné vlastnosti, ako napríklad *DDT na úrovni pixlov*. Štrukturalizácia dát je založená na skúsenostiach o správaní *DDT* metód pri rekonštrukcii obrazu. Pri tejto aplikačnej oblasti euklidovská dĺžka hrán v 2D priemete výsledných triangulácií je málo rozptýlená. Teda tieto triangulácie majú skôr lokálny charakter, extrémne dlhé hrany sa v nich vyskytujú len výnimočne. Na tomto základe je postavená myšlienka rozdeliť obraz na bloky - obdĺžniky, pričom každý vrchol musí ležať práve v jednom bloku. Vo vnútri jednotlivých blokov sa vyrieši aproximácia *MWT* už so známymi metódami,

alebo sa vygenerujú všetky možnosti a vyberie sa z nich optimálne riešenie. V nasledujúcej fáze je potrebné prepojiť susedné bloky. Ako počiatočná štruktúra triangulácie medzi blokmi bude braná regulárna triangulácia

Hlavným problémom je vyriešenie prepojenia jednotlivých blokov takým spôsobom, aby to vzbudzovalo vizuálne príjemný dojem, a pritom by nešlo o výpočtovo náročný proces. Na tento účel môže byť použitý podobný princíp preklápania hrán ako v prípade metódy look-ahead. Nech *zoznam aktívnych hrán* označuje množinu hrán, ktoré nepatria do žiadneho bloku a v počiatočnej (regulárnej) triangulácii majú inú smerovú orientáciu ako súradnicové osi. Ide o diagonály štvorcov, ktoré sa využívajú na prepájanie blokov. Na Obrázku 2 je zvýraznená hrana e , ktorá je členom zoznamu aktívnych hrán. K danej hrane sa zoberie okolie takej veľkosti ako v prípade look-ahead prístupu. Táto oblasť je vyznačená s mnohouholníkom vytvoreným z ôsmich vrcholov $V_1V_2V_3V_4V_5V_6V_7V_8$, ďalej označené len ako $\square_{V_1-8}$. Na Obrázku 2 je to zvýraznený hrubou čiarou. Je potrebné si uvedomiť, že vrcholy V_2 a V_6 závisia od výsledkov triangulácií blokov $Blok_1$ a $Blok_2$. Vyrátanie optimálnej triangulácie mnohouholníka $\square_{V_1-8}$ zabezpečí vizuálne akceptovateľné prepojenie susedných blokov, pričom sa nemenia ostatné hrany zo zoznamu aktívnych hrán. Uvedený postup je potrebné aplikovať na všetky hrany zo zoznamu aktívnych hrán, čím sa získa dátovo závislé prepojenie všetkých blokov.



Obr. 2: Hrana e zo zoznamu aktívnych hrán a jej okolie, mnohouholník $\square_{V_1-8}$, ktorej optimálna triangulácia zabezpečí prepojenie blokov $Blok_1$ a $Blok_2$.

Veľkosťou a spôsobom triangulácie jednotlivých blokov je možné riadiť výpočtovú náročnosť. Ďalšou významnou výhodou uvedenej metódy je, že jednotlivé bloky sa dajú optimalizovať paralelne. Uvedená metóda je aplikovateľná len na dáta organizované do karteziánskej mriežky, ako napríklad digitálny obraz alebo digitálne výškové mapy. V prípade inej organizácie dát by bolo potrebné nájsť efektívne riešenie ako deliť dáta do blokov a ako tie bloky prepojiť. Vyriešenie týchto problémov nemusí byť priamočiare a výpočtová náročnosť môže prevýšiť výhody získané rozdelením na bloky.

Simulované žihanie s využitím look-ahead stratégie

Zefektívnenie SA je cieľom nižšie uvedeného rozšírenia. V pôvodnom prístupe [Sch93] je myšlienka simulovaného žihania spájaná s operáciou preklápania hrán. Dá sa to vnímať ako aplikáciu stochastického optimalizačného prístupu na LOP. Chápanie vzťahu v takomto kontexte je kľúčom k rozšíreniu, ktoré spája myšlienku simulovaného žihania s look-ahead prístupom (ďalej to bude označené ako SALA) namiesto Lawsonovej metódy. Znamená to nasledujúcu zmenu.

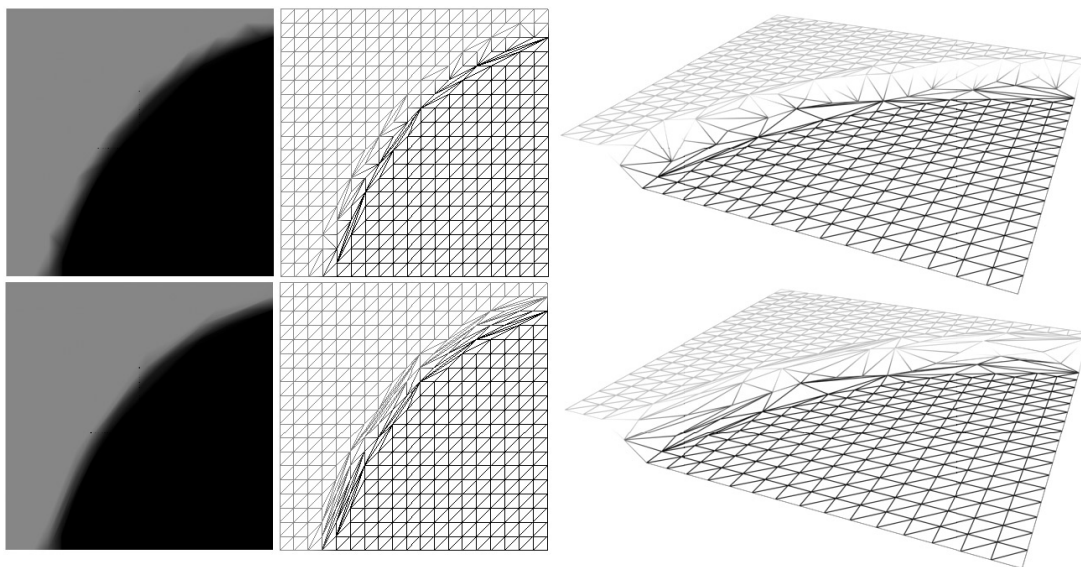
V prípade klasického SA prístupu, ak bola testovaná hrana e lokálne optimálna, tak s určitou pravdepodobnosťou sa táto lokálna optimalita porušila výmenou diagonál. Ak sa tento zhoršu-

júci krok nevykonal, algoritmus pokračoval ďalej v spracovaní ďalších hrán. Aplikácia look-ahead prístupu bude znamenať ďalšie spracovanie hrany e , ak nenastane zhoršujúci krok vďaka simulovanému žihaniu. V takomto prípade sa bude hľadať optimálne riešenie pomocou look-ahead prístupu pre hranu e a jej okolie. Takto sa dá očakávať zvýšenú rýchlosť konvergenencie a lepšiu aproximáciu *MWT*.

Nastavenie parametrov pre *SALA* môže byť iné ako v prípade *SA*, lebo má iné správanie (rýchlosť konvergenencie a aproximačné vlastnosti). Úlohou zostáva nájsť vhodné parametre pomocou vykonania rozsiahlych experimentov pre rôzne aplikačné oblasti a distribúcie vrcholov. Toto je ale nad rámec a možnosti tejto práce. Uvedenú modifikáciu je možné uplatniť aj na iné účely ako je rekonštrukcia obrazu, je to všeobecnejšia metóda ako prístup rozdelenie na bloky.

Quasi - DDT

Zdrojom ďalšej metódy sú empirické poznatky získané z aplikačnej oblasti rekonštrukcie obrazu. Najznámejší prístup - Lawsonov optimalizačný proces - pri rekonštrukcii obrazu často vytvára v oblasti hrán tzv. “dvojité hrany”, medzi ktorými vygeneruje vrstvu trojuholníkov. Tieto trojuholníky slúžia na rekonštrukciu hladkých zmien cez hrany. Z teoretického hľadiska je to správny výsledok, metóda sa snaží vytvárať adekvátny farebný prechod cez hrany, ale práve tieto oblasti obsahujú mnoho artefaktov. Výsledok takejto rekonštrukcie je zobrazený na Obrázku 3 v hornom riadku.



Obr. 3: Rekonštrukcia hrany pomocou *LOP* (horný riadok), *Quasi-LOP* (dolný riadok).

Pri experimentovaní s rôznymi zmenami a nastaveniami sa podarilo nájsť prístup, ktorý zmierňuje množstvo vyššie spomenutých artefaktov. Zmena oproti pôvodnému prístupu spočíva v chápaní lokálnej optimality hrán. Napríklad pri cenovej funkcii *SCF* [YBS01] lokálna optimalita hrany sa štandardne posudzuje na základe ceny piatich hrán. V novom prístupe lokálna optimalita je vyčíslená len na základe cenovej funkcie testovanej hrany. Takéto preklápanie hrany skrýva v sebe nebezpečenstvo, že celková váha triangulácie môže vzrásť. To znamená, že v tomto prípade nie je možné hovoriť o aproximácii *MWT*. Uvedenú zmenenú lokálnu optimalitu hrán je možné skombinovať s existujúcimi optimalizačnými technikami. Výsledné triangulácie nemusia byť lokálne optimálne. Tieto prístupy sa budú označovať predponou *Quasi-*,

napríklad *Quasi-LOP* pre *LOP*, atď’.

Napriek uvedeným negatívnym vlastnostiam táto metóda má praktický význam pre oblasť rekonštrukciu obrazov. V oblastiach, kde sa vyskytujú v obrazoch hrany, v niektorých prípadoch vytvárajú priaznivejšie výsledky ako klasické *DDT* metódy. Ako príklad je uvedené porovnanie medzi *LOP* a *Quasi-LOP* na Obrázku 3. V prípade *Quasi-LOP* (dolný riadok Obrázku 3) je vytvorený len jeden pás trojuholníkov a takto sa zlepši kvalita rekonštrukcie. Aj výpočtová náročnosť je nižšia ako v prípade *DDT* metód, vyčíslenie lokálnej optimality hrany je menej náročné.

Rozšírenie *DDT* do vyšších dimenzií

V porovnaní s rovinným prípadom optimálne triangulácie vo vyšších dimenziách sú menej preskúmané. Napríklad, v trojrozmernom priestore priamočiare zovšeobecnie Lawsonovho optimalizačného procesu vo vytváraní *DT* zlyháva. Vo všeobecnosti Delaunayova triangulácia vo vyšších dimenziách nemá také priaznivé vlastnosti ako v rovinnom prípade, kde sa výsledok tejto triangulácie využíva na rôzne simulácie pomocou metódy konečných prvkov. Vo vyšších dimenziách sa tieto triangulácie často využívajú len ako úvodné triangulácie, ktoré sú ďalej optimalizované, aby sa z nich odstránili simplexové nevhodného tvaru. Dátovo závislá technika pre trojrozmerný priestor bola predstavená v práci Lee [Lee00]. Počet stien v trojrozmernej triangulácii je závislý od spôsobu triangulácie, čo v uvedenom prístupe nie je zahrnuté. Publikované výsledky takéhoto zovšeobecnenia *DDT* do trojrozmerného priestoru nie sú úplne korektné.

Rozšírenie dátovo závislých triangulácií do vyšších dimenzií uvedené v tejto časti je výsledkom spolupráce s TU Wien a bol publikovaný v [TVFG07].

Problém rozšírenia a jeho riešenie

Existujúce dátovo závislé prístupy z 2D sú založené na konštantnom počte simplexov v trianguláciách. Vo vyšších dimenziách počet k –simplexov ($k = 1, \dots, n$) sa mení v závislosti od voľby triangulácie. Nie je možné priradiť cenovú funkciu k jednotlivým k –simplexom, tak aby sa dalo korektne minimalizovať súčet týchto cenových funkcií. Je potrebné nájsť také riešenie, ktoré je nezávislé od topologických transformácií, pri ktorých sa zmenia počty k –simplexov.

Z vlastností triangulácií vyplýva, že konvexný obal sa nezmení topologickými transformáciami ani vo vyšších dimenziách. Teda objem zostáva nezmenený, čo vedie k myšlienke váhovať objem n –simplexov. Na základe ich vlastností, ako vystihujú významné črty reprezentované v dátach, by mala byť priradená váhová funkcia. Nižšia váha pritom bude znamenať lepšie správanie. To znamená, že úloha n –dimenzionálnej *DDT* sa dá napísať ako minimalizáciu váhovaného objemu triangulácie:

$$c(\mathbf{T}(\mathbf{V})_{optimal}) = \min_{\mathbf{T}(\mathbf{V}) \in \Omega} \left(\sum_{\sigma_n \in \mathbf{T}(\mathbf{V})} (V(\sigma_n) \cdot w(\sigma_n)) \right), \quad (1)$$

kde σ_n je n –simplex, $V(\sigma_n)$ je objem n –simplexu a k nemu priradená váha je označená ako $w(\sigma_n)$.

Uvedená formulácia je ekvivalentná problému *MWT* pre rovinný prípad. Minimalizácia predstaveným spôsobom je nezávislá od spôsobu triangulácie množiny $\mathbf{V}$. Napriek tomu uvedená myšlienka je použiteľná len v prípade, ak sa podarí nájsť vhodné váhové funkcie. Ich hľadaniu je venovaná nasledujúca časť práce.

Váhové funkcie

Určenie vhodných váhových funkcií je závislé od voľby aplikačnej oblasti. Vo všeobecnosti ale sa dá preferovať riešenie, ktoré rekonštruje vysokofrekvenčné oblasti, dbá na kvalitnú rekonštrukciu častí medzi rôznymi oblast'ami v dátach.

Jeden z takýchto prístupov je založený na variancii dát. Snaha zachovať oblasti s nízkou varianciou znamená korektnú rekonštrukciu vysokofrekvenčných oblastí. Pre n –rozmerné triangulácie to znamená generovanie hyperstien $((n-1)$ –simplexov) s nízkou varianciou. Teda váhová funkcia je založená na variancii funkčných hodnôt z vrcholov n –simplexu:

$$w(\sigma_n) = \text{Variance}(t_{n_1}, t_{n_2}, \dots, t_{n_{n+1}}), \quad (2)$$

kde $w(\sigma_n)$ je váhová funkcia pre n –simplex σ_n a t_{n_i} ($i = 1, \dots, n+1$) sú funkčné hodnoty priradené k vrcholovom n –simplexu.

Ďalšou možnosťou je použitie existujúcich cenových funkcií z rovinných prístupov. Uvedené cenové funkcie sú založené na vlastnosti, že každá hrana je obsiahnutá práve v dvoch trojuholníkoch. Vo vyšších dimenziách platí podobné tvrdenie. Každá hyperstena $((n-1)$ –stena), neležiaca na konvexnom obale je obsiahnutá práve v dvoch n –simplexoch, a teda existuje štruktúra $n+2$ vrcholov (vytvorená z dvoch n –simplexov), ktorá je analogická k rovinnému prípadu. Pre tieto hypersteny môžu byť existujúce rovinné cenové funkcie jednoducho zovšeobecnené do vyšších dimenzií. Cieľom je ale určenie váhovej funkcie pre n –simplex, pričom k dispozícii sú len informácie o hyperstenách. Vo všeobecnosti platí, že každý n –simplex obsahuje práve $n+1$ hyperstien $((n-1)$ –simplexov). Ak za váhovú funkciu je považovaný priemer zovšeobecnených cenových funkcií určených pre $n+1$ hyperstien, tak výsledkom je váhová funkcia s hľadanou vlastnosťou. Ako konkrétny príklad sa uvedie zovšeobecnenie cenovej funkcie SCF, bude to označené ako GSCF. Pre n –dimenzionálny prípad GSCF meria uhol medzi gradientmi nadrovín, ktoré obsahujú n –simplexy zdieľajúce spoločnú $(n-1)$ –stenu v $(n+1)$ –dimenzionálnom priestore (obor hodnôt a funkčná hodnota) násobené veľkosťami gradientov:

$$c^{GSCF}(\sigma_{n-1}) = \|\nabla P_1\| \cdot \|\nabla P_2\| \cdot (1 - \cos(\alpha)) = \|\nabla P_1\| \cdot \|\nabla P_2\| - \nabla P_1 \cdot \nabla P_2, \quad (3)$$

kde $\nabla P_1, \nabla P_2$ sú gradienty nadrovín v $(n+1)$ rozmernom priestore obsahujúce dané n –simplexy, $\|\nabla P_1\|$ a $\|\nabla P_2\|$ sú veľkosti gradientov, a α je uhol medzi nimi. Rovnice hyperrovín $P_1(x)$ a $P_2(x)$ sú:

$$P_i(x) = a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \dots + a_{i,n}x_n + a_{i,n+1}, \quad i = \{1, 2\}. \quad (4)$$

Gradienty hyperrovín sú dané nasledujúcim vzťahom:

$$\nabla P_i = (a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n}), \quad i = \{1, 2\}, \quad (5)$$

a veľkosti gradientov sú:

$$\|\nabla P_i\| = \sqrt{a_{i,1}^2 + a_{i,2}^2 + \dots + a_{i,n}^2}, \quad i = \{1, 2\}. \quad (6)$$

Pre daný n –simplex váhová funkcia, ktorá používa zovšeobecnené cenové funkcie, vyzerá nasledovne:

$$w(\sigma_n) = \frac{\sum_{\sigma_{n-1} \in \sigma_n} c^{GSCF}(\sigma_{n-1})}{n+1}. \quad (7)$$

Optimalizačný proces

Po definovaní matematického modelu *DDT* a váhových funkcií pre viacrozmerné prípady zostáva určenie a popis optimalizačného procesu, ktorý bude vytvárať triangulácie s požadovanou vlastnosťou. Voľba padla na zovšeobecnenie *LOP* do vyšších dimenzií, táto metóda bude označená ako *GLOP* - zovšeobecnený Lawsonov optimalizačný proces.

V rovinnom prípade *LOP* používa topologickú transformáciu preklápania hrán, vo vyšších dimenziách namiesto toho bude použitá operácia bistellárneho preklápania. Je potrebné zavedenie pojmu *množina topologických transformácií* ozn. $\mathbf{T}_K$. Táto množina bude obsahovať topologické transformácie, vzhľadom na ktoré bude vykonaná optimalizácia. Znamená to všeobecnejší popis. $\mathbf{T}_K$ môže byť zvolená ľubovoľne, konvergencia algoritmu bude zaručená, nezávislá od voľby tejto množiny. V každom kroku sa zníži váhovaný objem, pričom existuje triangulácia s minimálnym váhovaným objemom. Vzhľadom na to, že pojem lokálnej optimality bol definovaný pre hrany v rovine, je potrebné predefinovať daný pojem:

Definícia 1. *Nech je daná triangulácia $\mathbf{T}(\mathbf{V})$ pre n -dimenzionálne rozptýlené dáta, k -simplex z $\mathbf{T}(\mathbf{V})$, $k = 1, \dots, n - 1$, sa nazýva lokálne optimálna vzhľadom na danú $\mathbf{T}_K$ a cenovú funkciu, ak platí jedno z nasledujúcich tvrdení:*

- (i) *daný k -simplex nemôže byť odstránený z triangulácie pomocou topologickej transformácie z množiny $\mathbf{T}_K$.*
- (ii) *existuje topologická transformácia z množiny $\mathbf{T}_K$, ktorá odstráni daný k -simplex (daný k -simplex je preklápatel'ný), ale cena triangulácie sa nezníži po aplikovaní tejto transformácie.*

n -dimenzionálna triangulácia sa nazýva lokálne optimálna ozn. LOT, ak aplikácia topologickej transformácie z $\mathbf{T}_K$ nezníži jej váhovaný objem.

Základný princíp *GLOP* prístupu je identický so spôsobom fungovania techniky *LOP*. Takisto vyžaduje úvodnú trianguláciu, za ktorú je možné zvoliť *DT* kvôli vhodným vlastnostiam. Cez iteračné kroky sa odstraňujú k -simplexy z triangulácie ($k = 1, \dots, n - 1$), ktoré nie sú lokálne optimálne, pokiaľ sa nedosiahne lokálne optimálna triangulácia. Podobne ako pri rovinnom prípade je možné urýchliť algoritmus pomocou zoznamu k -simplexov, ktorých lokálna optimalita sa mohla zmeniť v priebehu optimalizácie. Takto nie je potrebné vyšetrovať lokálnu optimalitu všetkých k -simplexov v každom iteračnom kroku. Pseudokód algoritmu je znázornený na Obrázku 4.

Popísaný algoritmus konverguje k lokálnemu optimu, lebo v každom iteračnom kroku sa zníži váhovaný objem a počet možných triangulácií je konečný. Iná voľba $\mathbf{T}_K$ môže urýchliť konvergenciu algoritmu a zvýšiť mieru aproximácie *MWT*. Namiesto *GLOP* je možné použiť aj iné optimalizačné techniky pre *DDT*.

Kompresia viacrozmerných dát pomocou *DDT*

Zvládnutie enormného nárastu objemu dát je bežným problémom v rôznych aplikačných oblastiach v súčasnosti [Pol00]. Z hľadiska triangulácií sa jedná o zjednodušenie triangulačnej siete, a z pohľadu dát je to možné vnímať ako stratovú kompresiu. Nasledujúci návrh rieši tento problém pomocou použitia dátovo závislého prístupu.

Riešenie tejto úlohy je úzko spojené s výsledkami z predošlej časti, kde bola predstavená viacrozmerná dátovo závislá triangulácia, príslušná cenová funkcia a optimalizačná technika.

Zovšeobecnený Lawsonov optimalizačný proces - GLOP**Vstup:** rozptýlené dáta**Výstup:** LOT tetrahedralizácia

```

1  {
2  vytvor počiatočnú tetrahedralizáciu  $T(V)$ ;
3   $Cost = c(T(V))$ ;
4   $oldCost = Cost + 1$ ;
5   $List_{active} = \{\forall \sigma_k \in T(V), k = 1, \dots, n-1\}$ ;
6   $List_{candidate} =$  ;
7  while( $Cost < oldCost$ ){
8      for(pre všetky členy  $List_{active}$ ){
9          if(ak nie je lokálne optimálna){
10             použi transformáciu z  $T_K$ ;
11             odstráň z  $List_{active}$ ;
12             for(všetky  $\sigma_k$ , ktorých lokálna optimalita mohla zmeniť){
13                 if( $\sigma_k$  nepatrí do  $List_{active}$  a  $List_{candidate}$ )
14                     pridaj  $\sigma_k$  do  $List_{candidate}$ ;
15             }
16         }
17         else
18             odstráň  $\sigma_k$  z  $List_{active}$ ;
19     }
20      $oldCost = Cost$ ;
21      $Cost = c(T(V))$ ;
22      $List_{active} = List_{candidate}$ ;
23      $List_{candidate} =$  ;
24 }
25 }
```

 $List_{active}$ - zoznam k -simplexov, ktoré sú testované v danom iteračnom kroku $List_{candidate}$ - zoznam k -simplexov, ktorých lokálna optimalita sa mohla zmeniť

Obr. 4: Zovšeobecnený Lawsonov optimalizačný proces - pseudokód.

Takýto prístup zabezpečuje zostrojenie triangulácie, zachovávajúcej významné príznaky. V kombinácii s technikou zjednodušenia sietí (*mesh decimation*) je možné dosiahnuť stanovený cieľ. Pomocou postupného odstránenia jednotlivých vrcholov sa dosiahne triangulácia s menším počtom simplexov. Z hľadiska úspešnosti kľúčovou úlohou celého prístupu je ohodnotenie vrcholov podľa ich dôležitosti. Pre tento účel je možné zovšeobecniť spôsob vrcholovo založeného ohodnotenia pre DDT do vyšších dimenzií. Pre n -rozmernú trianguláciu to znamená prevedenie váhovaných objemov (informácia, ktorá je k dispozícii) do vrcholov. Cena vrchola je váhovaným priemerom ohodnotenia n -simplexov, v ktorých je daný vrchol obsiahnutý. Určenie adekvátneho pomeru váhovania, ako aj možnosť použitia geometrických vlastností, môžu byť predmetom ďalšieho výskumu.

Po odstránení vrcholov z triangulácie treba takto vzniknuté mnohosteny znova triangulovať. V rovinnom prípade táto úloha má vždy riešenie, vo vyšších dimenziách to ale neplatí (napríklad Schönhardtov mnohosten pre trojrozmerný priestor). Znamená to, že pred odstránením vrchola je nutné otestovať či vznikne triangulovateľný mnohosten. Okrem možnosti hľadania triangulácie vzniknutého mnohostena je tu možnosť použitia topologickej operácie zlúčenie hrany. Odstránenie daného vrchola je možné vnímať ako zlúčenie 1-simplexu (hrany) do jedného z konečných vrcholov hrán, s ktorými je odstránený vrchol incidentný. V prípade, že daný vrchol sa nedá odstrániť, tak sa vyberie ďalší vrchol zo zoznamu. Vzniknutá triangulácia po odstránení vrcholov nemusí byť lokálne optimálna, a preto je nutná jej optimalizácia.

Počet vrcholov alebo obmedzenie, týkajúce sa ceny odstránených vrcholov, môže byť vhodnou ukončovacou podmienkou pre algoritmus. Ďalšou možnosťou je meranie kvality. Oproti metódam, ktoré používajú postupné zjemňovanie sietí má uvedený návrh určité nevýhody. Jeho časová náročnosť je vyššia, lebo sa snaží dosiahnuť výsledok tak, že zostrojí optimálne rieše-

nie pre daný vstup a postupne odstraňuje vrcholy. Je to výpočtovo oveľa náročnejšie ako práca s jednoduchými trianguláciami v prípade metód, ktoré sú založené na postupnom zjemňovaní. Na druhej strane výhodou je spôsob kompresie (odstránenie vrcholov) a následne hľadanie optimálnej triangulácie. Uvedený dátovo závislý návrh poskytuje sofistikovaný spôsob riešenia týchto problémov.

Paralelný výpočet *DDT* pomocou grafickej karty

Ďalšou oblasťou bolo skúmanie možnosti paralelného výpočtu dátovo závislých triangulácií. Motiváciou je smerovanie vývoja hardvéru. Evolúcia *GPU* časom priniesla príležitosť využitia ich výkonu aj na iné účely než pôvodne boli určené, táto výskumná oblasť sa označuje *GPGPU* (*General-Purpose computation on Graphics Processing Units*). Úlohou v tomto prípade je hľadanie paralelného dátovo závislého prístupu, ktorú je možné implementovať pomocou *GPGPU* prístupu. Využitie sily *GPU* vyžaduje určité obmedzenia v implementácii, hlavne sa to týka práce s pamäťou. Podľa dostupných poznatkov sa paralelizáciou dátovo závislých triangulácií nezaoberala žiadna výskumná skupina doteraz (či už na *CPU* alebo *GPU*). Snahou nasledujúcej časti je zostrojenie paralelnej verzie Lawsonovho optimalizačného procesu.

Návrh paralelného prístupu

Paralelný výpočet optimálnej triangulácie znamená súčasné vykonávanie viacerých optimalizačných krokov. V prípade *LOP* sa jedná o súčasné preklápanie hrán, v závislosti od ich lokálnej optimality. Táto operácia bez obmedzení ale môže narušiť topológiu, a vytvárať neplatnú trianguláciu. Preto pre korektný popis navrhovaného algoritmu je potrebné zaviesť ďalšie pojmy.

Definícia 2. *Nech je daná triangulácia $T(V)$ množiny V . Pod pojmom susedia hrany $e \in T(V)$ sa rozumie množina takých hrán z $T(V)$, ktoré vytvárajú s hranou e trojuholník patriaci do $T(V)$.*

Definícia 3. *Okolie hrany e stupňa-1 označuje množinu susedov hrany e (ozn. 1-okolie). Na základe tohto označenia sa definuje okolie n -tého stupňa hrany e pre $n \in \mathbb{N}$ a $n > 1$, ako množina pozostávajúca z:*

- (i) množiny hrán z $(n - 1)$ -okolía hrany e ,
- (ii) množiny susedných hrán k hranám z $(n - 1)$ -okolía hrany e .

Lokálna optimalita hrany e v dátovo závislých trianguláciách je ovplyvnená výberom cenovej funkcie. V prípade *SCF* jej lokálna optimalita je závislá od cenových funkcií z piatich hrán (hrana e a jej susedia). Znamená to, že preklápanie nejakej hrany z 2-okolia hrany e môže zmeniť jej lokálnu optimalitu. Vo všeobecnosti táto oblasť bude pomenovaná ako *oblasť vplyvu* ozn. *ROI* hrany e , a teda bude značiť množinu takých hrán, ktorých zmena (preklápanie) môže spôsobiť zmenu lokálnej optimality e .

V prípade paralelizácie *LOP* je potrebné si nájsť množinu takých hrán, ktoré je možné preklápať súčasne. *GPU* je vytvorený z veľkého počtu paralelných procesorových jednotiek, preto je dôležité hľadať také riešenie, ktoré vie plne využiť túto architektúru, aj s danými obmedzeniami. Modifikovaná Lawsonová metóda bude členená do troch častí: *Vytváranie kandidátov* - zistenie, ktoré hrany nie sú lokálne optimálne; *Akceptovanie, zamietnutie kandidátov* - výber súčasne preklápatel'ných (akceptovaných) hrán; *Paralelné preklápanie hrán* - samotné paralelné preklápanie akceptovaných hrán. Tieto tri časti tvoria jednu iteráciu v ponímaní klasického *LOP* prístupu. Popisu jednotlivých častí budú venované nasledujúce odseky.

Vytváranie kandidátov

Tento krok zahŕňa vyčíslenie lokálnej optimality všetkých hrán. Na základe týchto informácií je možné rozdeliť hrany do dvoch skupín. Prvú množinu tvoria hrany, ktoré nie sú lokálne optimálne. Označenie týchto hrán bude *kandidáti*. V druhej množine sú lokálne optimálne hrany. Tieto hrany v danej iterácii už nebudú ďalej spracované.

Úlohou prvej časti je vytvorenie množiny kandidátov. Výberu súčasne preklápatel'ných hrán z tejto množiny je venovaný ďalší odsek textu. Všetky výpočty, ktoré boli vyššie uvedené, sa dajú paralelne vykonať bez obmedzení. Výpočtovo najdrahšou operáciou je určenie lokálnej optimality na základe cenových funkcií.

Akceptovanie, zamietnutie kandidátov

Lokálna optimalita danej hrany je závislá od preklápaní hrán v jej *ROI*. V prípade paralelného spracovania môže nastať nasledujúca konfigurácia. Nech je daná triangulácia a v nej dve hrany e, f , pričom nech f leží v *ROI* hrany e (z čoho vyplýva, že aj e leží v *ROI* hrany f). Súčasné spracovanie hrán spôsobuje, že preklápanie jednej hrany môže zmeniť lokálnu optimalitu tej druhej, pričom tá druhá hrana je preklápaná na základe tých nezmenených údajov. Riešením je výber takých hrán, ktorých *ROI* sa nepretínajú.

Na základe vyššie uvedeného spôsobu je možné hrany rozdeliť do dvoch disjunktných množín: *zamietnuté hrany* - hrany, ktoré nebudú preklápané; *akceptované hrany* - množina hrán, ktoré budú preklápané paralelne. Pre rozdelenie hrán do vyššie uvedených množín je potrebné zaviesť pomocné premenné, tzv. *identifikačné čísla* hrán (ozn. *ID*). Tieto identifikátory sú priradené ku každej hrane na začiatku optimalizačného procesu tak, aby každá hrana mala jedinečné *ID*. Pri preklápaní danej hrany *ID* zdedí alternatívna diagonála (vzniknutá hrana).

Rozdelenie kandidátskych hrán, teda ich zamietnutie alebo akceptovanie prebieha nasledovne. Nech hrana e je z množiny kandidátov, pre jej klasifikáciu je potrebné spracovať všetky hrany z *ROI* e . Ak existuje aspoň jedna akceptovaná hrana v tejto oblasti, tak e musí byť zamietnutá. Ináč sa porovnávajú hodnoty *ID* všetkých kandidátskych hrán z *ROI* hrany e . V prípade, že e má najmenšiu *ID*, tak sa akceptuje (pridá sa do množiny akceptovaných hrán) a odstráni sa z množiny kandidátov. Zostala ešte konfigurácia, kde e nemá najmenšiu hodnotu *ID* a neexistuje akceptovaná hrana v jej *ROI*. Vtedy testovaná hrana zostane v množine kandidátov a bude akceptovaná alebo zamietnutá v nasledujúcich iteráciách.

Akceptovanie a zamietnutie sa vykoná iteratívne a skončí vtedy, keď množina kandidátov je prázdna. Konvergencia takéhoto prístupu vyplýva z toho, že v každej iterácii sa odstráni minimálne jedna hrana z množiny kandidátskych hrán. Vždy existuje hrana s minimálnou hodnotou *ID*. Pri reálnych dátach sa dá predpokladať oveľa rýchlejšia konvergencia. Uvedený postup je navrhnutý tak, aby sa výpočty dali zrealizovať na *GPU*.

Paralelné preklápanie hrán

V poslednom kroku prebieha súčasné preklápanie hrán z množiny akceptovaných hrán. Vďaka predspracovaniu v predošlom kroku je zabezpečené, že nenastanú konflikty a vytvorená triangulácia bude korektná. Vzhľadom na preklápacie operácie je potrebné aktualizovať dátové štruktúry v okolí zmenených hrán, veľkosť týchto okolí závisí od veľkosti *ROI*.

Súhrn

Zopakovanie uvedených krokov zaručuje vytvorenie lokálne optimálnej triangulácie. Konvergencia k lokálne optimálnemu stavu je dokázateľná podobne ako v prípade *LOP*, cena triangulácie klesá v každom kroku a minimum musí existovať. Pseudokód algoritmu je znázornený na Obrázku 5.

Paralelný Lawsonov optimalizačný proces

Vstup: iníciaľna triangulácia $T(V)$

Výstup: *LOT* triangulácia

```
1  {
2    while( $T(V)$  nie je lokálne optimálna){
3       $EdgeList_{candidate} =$  ;
4       $EdgeList_{accepted} =$  ;
5      // – Krok 1 –
6      for(pre  $\forall$  hrany  $e \in T(V)$ )
7        if( $e$  nie je lokálne optimálna)
8          pridaj  $e$  do  $EdgeList_{candidate}$ ;
9      // – Krok 2 –
10     while( $\exists e \in EdgeList_{candidate}$ ){
11       if( $\exists$  hrana  $f \in EdgeList_{accepted}$  také, že  $f \in ROI$  hrany  $e$ )
12         odstráň  $e$  z  $EdgeList_{candidate}$ ; // zamietni hranu  $e$ 
13       else{
14         if( $ID$  hrany  $e < \min(ID$  všetkých kandidátskych hrán z  $ROI$  hrany  $e$ )){
15           pridaj  $e$  do  $EdgeList_{accepted}$ ; // akceptuj hranu  $e$ 
16           odstráň  $e$  z  $EdgeList_{candidate}$ ;
17         }
18         else{
19           //  $e$  zostane kandidátom
20         }
21       }
22     }
23     // – Krok 3 –
24     for( $\forall e \in T(V)$ ){
25       if( $e \in EdgeList_{accepted}$ ){
26         preklop hranu  $e$ ;
27         aktualizuj dátovú štruktúru hrany  $e$ ;
28       }
29     }
30   }
```

$EdgeList_{candidate}$ - zoznam kandidátskych hrán

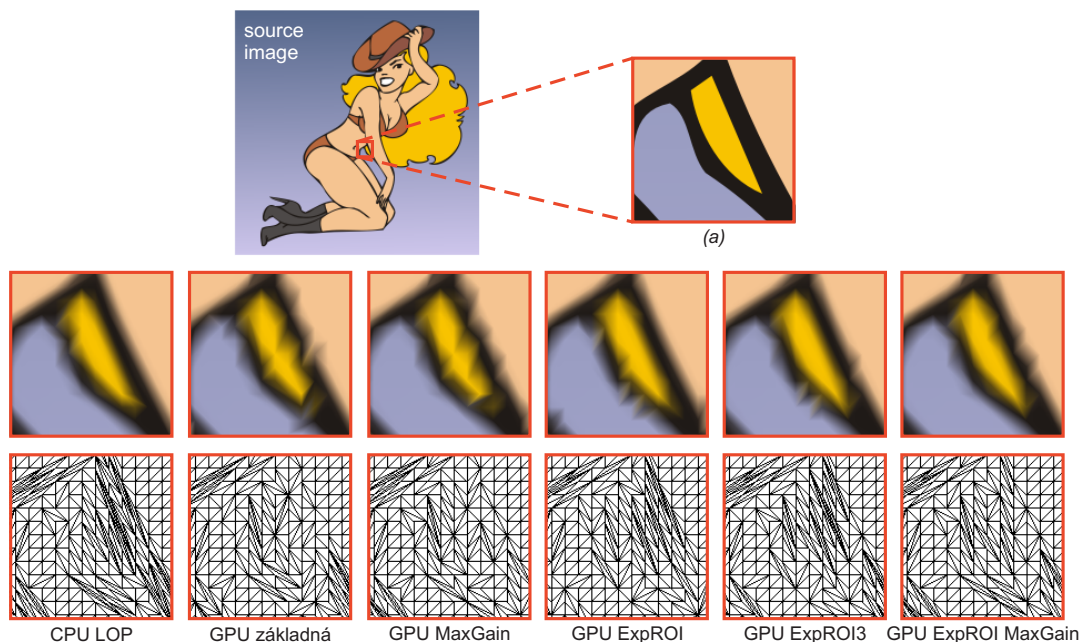
$EdgeList_{accepted}$ - zoznam akceptovaných hrán

Obr. 5: Pseudokód paralelnej verzie Lawsonovej optimalizácie, ktorá je implementovateľná na *GPU*.

Voľba jednotlivých krokov algoritmu úzko súvisí s architektúrou *GPU*, a zvolenou dátovou štruktúrou. Ich podrobný popis sa nachádza v dizertačnej práci alebo v [CTS*10].

Vylepšenie základného princípu

Výsledky z popísaného paralelného prístupu vykazujú určité nedostatky. Cena dosiahnutej lokálne optimálnej triangulácie je zvyčajne vyššia ako v prípade výsledkov sekvenčnej techniky. V prípade rekonštrukcie obrazu produkuje pravidelne sa objavujúce artefakty vo vysokofrekvenčných oblastiach - Obrázok 6 - časť *GPU* základná. Cieľom uvedených modifikácií je snaha dosiahnuť lepšiu aproximáciu *MWT* a eliminovať množstvo rekonštrukčných chýb v oblastiach hrán. Výsledky jednotlivých zlepšení sú znázornené na Obrázku 6.



Obr. 6: Rasterizovaný vektorový obrázok (pôvodný obrázok), a jej 1200% magnifikácia pomocou rôznych techník. Rasterizácia vektorového obrázku v zväčšenom rozlíšení (a). Príslušné triangulácie sú zobrazené v dolnom riadku.

Rozšírenie oblasti *ROI*

Súčasný spracovanie blízko seba ležiacich hrán spôsobuje, že hrany ktoré ležia medzi nimi, sa dostanú do lokálne optimálneho stavu. Tieto hrany spôsobujú vo výslednej triangulácii vznik artefaktov. V prípade sekvenčného spracovania takéto zaseknutie sa hrán nenastane.

V snahe zabrániť vzniku takýchto konfigurácií sa zväčší *ROI* hrán vo fáze akceptovania a zamietnutia, riadky 9–20 pseudokódu na Obrázku 5. V prípade použitia cenovej funkcie *SCF* to znamená zväčšenie 2–okolía na 3–okolie. Táto zmena čiastočne potlačí množstvo vzniknutých artefaktov, a aj cena triangulácie je nižšia ako v prípade pôvodného paralelného prístupu. Označenie tejto modifikácie bude *ExpROI*, výsledok tejto metódy je zobrazený na Obrázku 6.

Vďaka použitiu väčšieho *ROI* okolia rastie výpočtová náročnosť metódy. Ďalšie pozorovania viedli k zisteniu, že hrany, ktoré spôsobili problémy v pôvodnej verzii algoritmu, boli preklápané hlavne v prvých dvoch iteráciách. Preto je postačujúce použiť rozšírené *ROI* len v prvých iteráciách a potom môže byť použitý základný prístup. Označenie tejto modifikácie bude *ExpROI_N*, kde *N* značí počet iterácií v ktorej sa používa rozšírený *ROI*. Výsledok z hľadiska vizuálnej kvality je podobný ako výsledok z *ExpROI*, ukážka sa nachádza na Obrázku 6.

Maximalizácia prínosu (ozn. *GPU MaxGain*)

Zlepšenie miery aproximácie *MWT* je cieľom ďalšej modifikácie, jej základnou ideou je zmena spôsobu výberu akceptovaných hrán. V pôvodnej verzii pri tomto výbere sa využíva hodnota *ID* kandidátskych hrán. V modifikácii sa namiesto toho zoberie tá kandidátska hrana, ktorej preklápanie má väčší prínos pre cenu triangulácie. Táto informácia je vyrátaná už vo fáze vytvárania kandidátov, a v tomto prípade sa to znova využije. V prípade, ak existuje viac hrán s rovnakým prínosom, tak sa postupuje ďalej na základe hodnoty ich *ID*. V ďalších častiach textu táto modifikácia bude označená ako *MaxGain*. Na Obrázku 6 je zobrazený výsledok vytvorený s uvedenou modifikáciou. Zvyčajne dosahuje nižšiu cenu triangulácie ako dáva pôvodná para-

lelná technika. Poslednou modifikáciou je kombinácia uvedených zmien. V súlade s očakávaniami táto kombinácia produkuje trianguláciu s najnižšou váhou a najlepšie potláča vizuálne chyby, jej výsledok je zobrazený na Obrázku 6.

Kombinácia *DDT* a konvolučných techník pre účely rekonštrukciu obrazu

Dátovo závislá triangulácia, ako väčšina techník je závislá od kvality vstupu. V reálnom svete digitálne obrazy sú častokrát zašumené alebo ich kvalita je poznačená stratovou kompresiou. Výsledkom toho je neadekvátna kvalita rekonštrukcie v nízkofrekvenčných oblastiach alebo na miestach, kde nie sú jasne orientované hrany v obraze. Výsledky konvolučných techník sú viac priaznivé v týchto oblastiach, majú schopnosť potlačiť šum. Hlavnou myšlienkou a úlohou je nájdenie takej rekonštrukcie, ktorá sa vo vysokofrekvenčných oblastiach správa ako *DDT* a v nízkofrekvenčných ako konvolučná technika. Jedna z možností je skombinovanie výsledkov rôznych rekonštrukčných techník pomocou stmel'ovacej funkcie. Celkový proces je možné deliť na tri fázy: *Predspracovanie* - odhad hranových oblastí po zväčšení obrazu; *Rekonštrukcia* - rekonštrukcia obrazu pomocou *DDT* a konvolučnej techniky; *Kombinácia výsledkov* - spojenie výsledkov pomocou stmel'ovacej funkcie.

Predspracovanie

Prvou úlohou je identifikovanie vysokofrekvenčných oblastí v obraze. Pre tento účel slúžia hranové detektory, voľba padla na *Cannyho hranový detektor* [GW06], ktorý spĺňa kritérium jednej odozvy, t.j. hrany sú reprezentované 1 pixel hrubou čiarou. Výsledok z Cannyho detektoru bude označený ako Tex_{EDR} (*EDR* - edge detector result).

Kritérium jednej odozvy uľahčuje vytvorenie odhadu hranových oblastí. Na základe faktoru zväčšenia (vstupný údaj) sa zväčší výsledok z hranového detektora. Táto operácia prebieha tak, akoby Tex_{EDR} obsahovala vektorové údaje. Pixle reprezentujúce hranové oblasti sú brané ako vrcholy. Najprv sa vyrátajú nové pozície vrcholov vzhľadom na dané zväčšenie, a spoja sa vrcholy, ktoré boli susedné v Tex_{EDR} . Výsledok takto získaného odhadu hrán sa bude označovať ako Tex_{EE} (*EE* - estimated edges).

Na kombináciu výsledkov nestačí odhad hrán, ale je potrebné aj určenie hranových oblastí, respektíve segmentácia obrazu na základe od vzdialenosti od odhadnutých hrán. Nazýva sa to vzdialenostná mapa v počítačovej grafike. Na vytvorenie vzdialenostnej mapy môže byť použitý klasický floodfill algoritmus, využívajúci 4-susednosť. Je potrebné dodať, že takto získaný výsledok je len aproximáciou korektného výsledku. Vzdialenostná mapa sa bude označovať ako Tex_{DM} (*DM* - distance map). Nie je potrebné vybudovanie kompletnej vzdialenostnej mapy, stačí len tá časť, kde sa budú zmiešavať výsledky rekonštrukcií *DDT* a konvolučnej techniky.

Rekonštrukcia

Nasledujúcim krokom je rekonštrukcia obrazu. Výber konvolučnej metódy môže byť závislý od kvality vstupu, pre veľmi zašumené obrázky je vhodný napríklad Gaussian ako konvolučná maska, v inom prípade môže byť zvolený napríklad Lanczosov filter. Výpočet dátovo závislej techniky nie je potrebné aplikovať na celý obraz, stačí len optimalizácia hranových oblastí. Na základe Tex_{DM} sa dajú tieto oblasti ľahko získať, veľkosť pritom závisí od voľby stmel'ovacej funkcie. Výhodou, okrem toho, že sa takto zmenší počet vrcholov, je aj možná paralelizácia.

Kombinácia výsledkov

Záverečnou fázou je kombinácia výsledkov pomocou stmel'ovacej funkcie. Nech zväčšené obrázky majú rozmer x_{max} a y_{max} , a hodnota $f(x,y)$ značí vzdialenosť od hrán na základe Tex_{DM} , $x = 1, \dots, x_{max}$ a $y = 1, \dots, y_{max}$. Pomocou *ratio* je značený pomer, o koľko bol daný obraz zväčšený, napríklad v prípade 400% magnifikácie jej hodnota je 4. Predpis stmel'ovacej funkcie, ktorá lineárne kombinuje výsledky rekonštrukčných techník, vyzerá nasledovne:

$$I(x,y)_{Res} = \begin{cases} I(x,y)_{DDT}, & \text{ak } f(x,y) < a * ratio \\ (1-t) * I(x,y)_{DDT} + t * I(x,y)_{Conv}, & \text{ak } a * ratio \leq f(x,y) \leq b * ratio \\ I(x,y)_{Conv}, & \text{ak } f(x,y) > b * ratio, \end{cases} \quad (8)$$

$$t = \frac{f(x,y) - a * ratio}{(b - a) * ratio}, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a, b > 0, \quad b > a, \quad (9)$$

kde vo vzťahu (8) $I(x,y)_{Res}$, $I(x,y)_{DDT}$ a $I(x,y)_{Conv}$ značia farebné informácie v jednotlivých obrazových bodoch (*Res*—výsledný obraz, *DDT*—výsledok dátovo závislej metódy, *Conv*—výsledok konvolučnej metódy), (x,y) je umiestenie pixlov. Parametre a, b pomocou informácií z Tex_{DM} určia oblasti, kde sa kombinujú výsledky rekonštrukčných techník. Empiricky zistená hodnota parametrov a, b je $a = 1$ a $b = 3$. Zatiaľ nebol vykonaný detailný test vplyvu týchto parametrov na kvalitu výsledného obrazu.

Vybrané výsledky

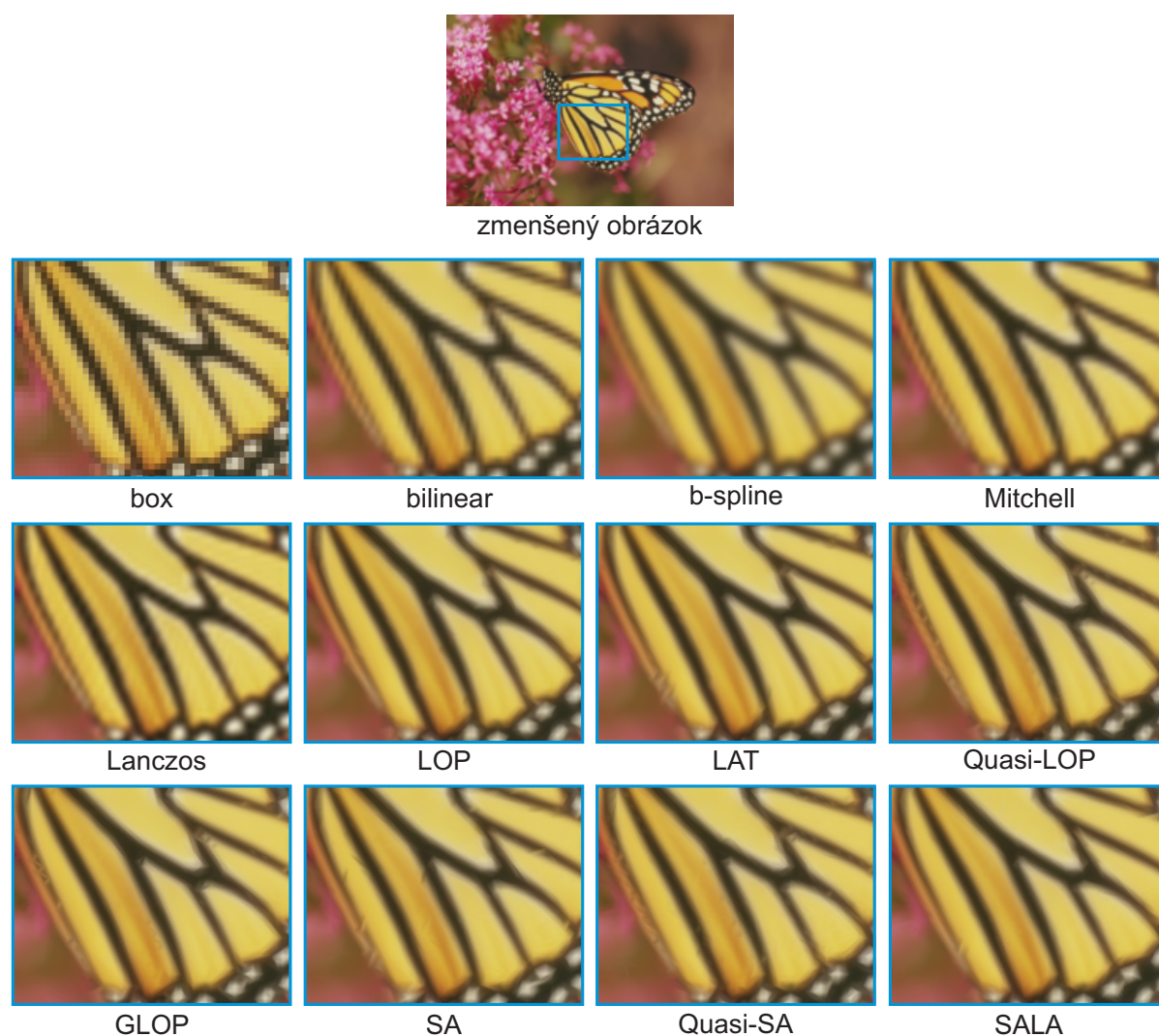
Nasledujúca časť je venovaná analýze výsledkov. Za aplikačnú oblasť bola zvolená rekonštrukcia obrazu, pričom sa používali štandardné testovacie obrázky z oblasti spracovania obrazu. V prípade verifikácie dátovo závislého prístupu v 3D boli použité syntetické dáta. Boli použité rôzne softvérové knižnice, ich presný zoznam sa nachádza v dizertačnej práci.

Charakteristika porovnávacích kritérií

Objektívne hodnotenie kvality rekonštrukcie je náročnou úlohou, ktorá je závislá od aplikačnej oblasti. Z matematického hľadiska dôležitú informáciu dáva dosiahnutá váha výslednej triangulácie. *Základná hypotéza* je nasledujúca: za ideálnu rekonštrukciu je považovaná triangulácia s minimálnou váhou. Ďalším meradlom, špeciálne pre aplikačnú oblasť rekonštrukcie obrazu, sú tzv. *perceptuálne metriky*, popísané v [WB02, WACBS04]. Zvyčajne sa používajú na vyhodnotenie kvality kompresie alebo iných operácií, kde je potrebné zmerať zmenu kvality obrazu. V tejto práci sa používajú nasledujúce metriky: *Korelácia (C)*, *Krížová korelácia (CC)*, *Stredná kvadratická odchýlka (MSE)*, *Odstup signál-šum (SNR)*, *Vrcholový odstup signál-šum (PSNR)*, *Univerzálny koeficient kvality obrazu (UIQI)*, *Štruktúrálna podoba (SSIM)*. Vyššia hodnota uvedených perceptuálnych metrík znamená vyššiu kvalitu rekonštrukcie, jedinou výnimkou je metrika *MSE*, kde nižšia hodnota znamená lepší výsledok. Pomocou perceptuálnych techník je možné vyčíslit množstvo rekonštrukčných chýb, ale o ich distribúcií nie je žiadna informácia. Rozdielové obrazy riešia tento problém, a sú ďalšou metódou, ktorá sa použila pri analýze výsledkov. Dávajú dôležitú informáciu o rozložení rekonštrukčných chýb.

Porovnanie DDT a konvolučných techník

Na testovanie bolo vybratých sedem dátovo závislých techník, z toho tri existujúce (*LOP*, *LAT*, *SA*) a štyri nové prístupy (*Quasi-LOP*, *GLOP*, *Quasi-SA*, *SALA*). Tieto metódy boli porovnané rôznymi konvolučnými metódami. Výsledky boli zamerané na 20-ich obrázkoch z *Dataset 1* a porovnané pomocou perceptuálnych metrík. Dosiahnuté priemerné hodnoty sú zobrazené v Tabuľke 1. Na základe týchto výsledkov najlepšie dopadol Lanczosov filter, ktorého v kvalite nasledujú triangulačné prístupy *LAT* a *LOP*. Najhoršie výsledky dávali box filter (interpolácia pomocou najbližšieho suseda) a b-spline filter, čo sa aj dalo očakávať. Spomedzi stochastických prístupov najlepšie výsledky dosahovala metóda *SALA*. Konkrétne rekonštrukčné výsledky z *Dataset 1* sú zobrazené na Obrázku 7.



Obr. 7: Rekonštrukcia pri 400% zväčšení pomocou rôznych metód.

Ďalším spôsobom hodnotenia kvality je cena dosiahnutej triangulácie. Z týchto úvah je vynechaná metóda *GLOP*. Dôvodom je, že cena triangulácie je rátaná iným spôsobom ako v prípade ostatných techník. Tieto výsledky sú zobrazené v Tabuľke 2. *Začiatková cena* značí váhu úvodnej triangulácie, *konečná cena* váhu výslednej triangulácie. Najnižšiu cenu dosiahla metóda *LAT*, ktorú nasledovali *LOP* a *SALA*.

Meranie kvality pomocou perceptuálnych metrík - Dataset 1							
	C (%)	CC (%)	MSE	SNR (dB)	PSNR (dB)	UIQI	SSIM
box filter	95,988	93,443	308,978	18,115	24,024	0,24529	0,60582
bilinéarna interpolácia	95,957	93,798	296,307	18,351	24,259	0,33831	0,62593
b-spline filter	95,730	92,983	332,833	17,809	23,718	0,30255	0,60401
Mitchell filter	96,028	93,951	288,989	18,472	24,380	0,34724	0,63011
Lanczos filter	96,275	94,583	259,666	18,981	24,890	0,38404	0,64910
LOP	96,148	94,129	282,573	18,583	24,492	0,35523	0,63430
LAT	96,180	94,173	281,457	18,603	24,511	0,35614	0,63493
Quasi-LOP	96,044	93,915	290,782	18,451	24,360	0,34203	0,62929
GLOP	96,059	93,873	293,439	18,408	24,317	0,33834	0,62734
SA	96,030	93,986	287,568	18,488	24,397	0,33929	0,62814
Quasi-SA	95,964	93,795	295,575	18,363	24,272	0,33042	0,62356
SALA	96,104	94,027	284,715	18,538	24,447	0,34456	0,63068

Tabuľka 1: Priemerná kvalita výsledkov z Dataset 1 na základe perceptuálnych metrík pre rôzne rekonštrukčné metódy.

Meranie kvality - Dataset 1			
	začiatočná cena	konečná cena	zlepšenie (%)
LOP	513,117	221,559	231,594
LAT	513,117	203,316	252,374
Quasi-LOP	513,117	379,953	135,047
SA	513,117	327,789	156,539
Quasi-SA	513,117	522,159	98,268
SALA	513,117	273,754	187,437

Tabuľka 2: Priemerné ceny triangulácií pre obrázky z Dataset 1.

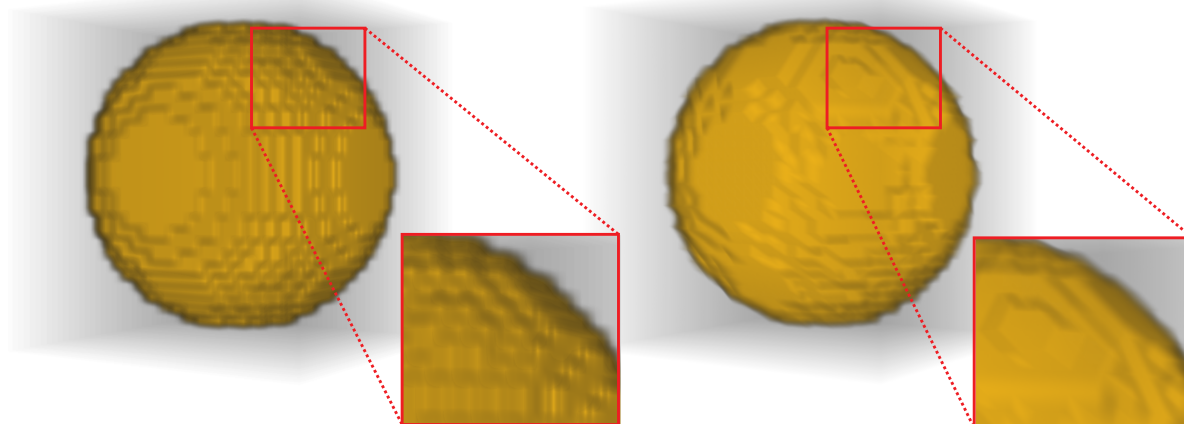
Aplikácia DDT na syntetické 3D dáta

Pre verifikáciu bola implementovaná GLOP pre trojrozmerný prípad, bolo použité váhovanie na základe variancie. Ponúknuté výsledky sú rekonštrukciou syntetických 3D dát pomocou trilineárnej interpolácie a dátovo závislou technikou GLOP - Obrázok 8. V prípade dátovo závislej techniky rekonštrukčné chyby nie sú tak relevantné ako vo výsledkoch trilineárnej interpolácie. Konvolučné techniky podobne ako v rovinnom prípade vytvárajú artefakty vo vysokofrekvenčných oblastiach, v tomto prípade na plochách, ktoré nie sú osovo orientované.

Analýza paralelnej verzie DDT

Pri analýze vizuálnej kvality boli použité perceptuálne metriky, podobne ako v predchádzajúcich prípadoch. Výsledky týchto meraní pre Dataset 2 (pozostávajúca z 12 obrázkov) sú uvedené v Tabuľke 3. Najlepšie výsledky dosiahol Lanczosov filter a LOP, na tretom mieste sa striedali metódy GPU ExpROI, GPU ExpROI2 MaxGain a GPU ExpROI3 MaxGain. Jednotlivé modifikácie základného GPU prístupu v každom prípade dosahovali lepšie výsledky ako pôvodná technika, označená v tabuľke ako GPU pôvodná. Konkrétne výsledky sú zobrazené na Obrázku 9.

Hlavnou motiváciou pre paralelizáciu bolo využitie výpočtovej sily GPU. Porovnanie výpočtových časov jednotlivých prístupov bude delené do troch častí: inicializácia, optimalizácia, kompletizácia. Inicializácia zahŕňa načítanie obrazu a vytvorenie príslušných dátových štruktúr. V optimalizačnej fáze prebieha vytváranie lokálne optimálnej triangulácie. V poslednej fáze je triangulácia uložená na disk, konvertovaná do vlastného formátu, v prípade paralelného prístupu je okrem toho potrebné stiahnuť textúry z pamäte GPU. Výsledné časy sú zobrazené v Tabuľke 4. Celkovo značí sumu týchto hodnôt, všetky časy sú v sekundách, a značia priemerné hodnoty pre Dataset 2. Testovacia konfigurácia bola nasledujúca: Intel P4 3.0GHz CPU, 1GB



Obr. 8: Rekonštrukčné výsledky pre syntetické volumetrické dáta. Trilineárna interpolácia (vľavo) a 3D *GLOP* (vpravo).

Meranie kvality pomocou perceptuálnych metrík - <i>Dataset 2</i>							
	<i>C</i> (%)	<i>CC</i> (%)	<i>MSE</i>	<i>SNR</i> (dB)	<i>PSNR</i> (dB)	<i>UIQI</i>	<i>SSIM</i>
bilinéarna interpolácia	96,0142	94,7434	294,428	17,7444	24,1102	0,36111	0,63596
b-spline filter	95,3072	93,3080	377,732	16,6075	22,9733	0,29662	0,59566
Lanczos filter	96,3722	95,5652	249,824	18,5715	24,9374	0,41005	0,66093
<i>CPU LOP</i>	96,1783	95,2463	267,577	18,2452	24,6110	0,38757	0,65186
<i>GPU pôvodná</i>	96,1418	95,1506	272,882	18,1580	24,5238	0,38303	0,64873
<i>GPU ExpROI</i>	96,1573	95,1779	270,689	18,1989	24,5647	0,38485	0,65006
<i>GPU MaxGain</i>	96,1485	95,1618	272,204	18,1713	24,5372	0,38335	0,64913
<i>ExpROI MaxGain</i>	96,1587	95,1725	270,879	18,1914	24,5572	0,38472	0,64999
<i>ExpROI2 MaxGain</i>	96,1600	95,1693	270,729	18,1952	24,5611	0,38478	0,65007
<i>ExpROI3 MaxGain</i>	96,1590	95,1728	270,801	18,1927	24,5586	0,38478	0,65003

Tabuľka 3: Priemerná kvalita výsledkov z *Dataset 2* na základe perceptuálnych metrík pre rôzne rekonštrukčné techniky.

RAM, NVidia GeForce 8800 GTS. Z uvedených výsledkov vyplýva, že paralelný prístup je rýchlejší až o 6–10 krát ako pôvodná sekvenčná technika *CPU LOP*.

Zhrnutie

Z hľadiska aplikačnej oblasti rekonštrukcie obrazu je možné konštatovať, že výsledné *DDT* triangulácie majú lokálny charakter. Teda výpočtovo lacné aproximácie *MWT* dávajú vizuálne príjemné výsledky. Z hľadiska rekonštrukcie obrazu využívanie *DDT* prístupov na magnifikačné účely prináša výhody. V tomto prípade možné odporúčať použitie deterministicky založených metód. Stochastické metódy sú vhodné pre rekonštrukčné úlohy, kde miera aproximácie *MWT* je dôležitá. Ďalej, je možné konštatovať, že paralelné dátovo závislé prístupy vzhľadom na súčasný vývoj hardvéru sú užitočným nástrojom pri tvorbe lokálne optimálnych triangulácií.

Pri popise porovnávacích kritérií bola vyslovená hypotéza, že nižšia cena triangulácie znamená lepšiu rekonštrukciu. Keď sa porovnávajú výsledky, z Tabuliek 1 a 2 vidieť, že poradie podľa kvality triangulačných prístupov je rovnaké. Vyplýva z toho potvrdenie tejto hypotézy, a to za predpokladu, že perceptuálne metriky sú objektívnym meradlom kvality.

Meranie rýchlosti výpočtov - Dataset 2				
čas (s)	inicializácia	optimalizácia	kompletizácia	celkovo
<i>CPU LOP</i>	0,2126	6,8346	0,2216	7,2689
<i>GPU pôvodná</i>	0,4076	0,2526	0,0897	0,7498
<i>GPU ExpROI</i>	0,5183	0,6199	0,0936	1,2318
<i>GPU MaxGain</i>	0,4531	0,2775	0,0872	0,8178
<i>GPU ExpROI MaxGain</i>	0,6028	0,4702	0,0859	1,1589
<i>GPU ExpROI2 MaxGain</i>	0,6017	0,5183	0,0910	1,2109
<i>GPU ExpROI3 MaxGain</i>	0,5990	0,5274	0,0898	1,2163
<i>GPU ExpROI4 MaxGain</i>	0,6013	0,5340	0,0859	1,2212

Tabuľka 4: Priemerné hodnoty rekonštrukčných časov pre Dataset 2.

Vybrané podnety pre ďalší výskum

Nasledujúci zoznam obsahuje myšlienky, ktoré môžu byť predmetom ďalšieho výskumu:

Rekonštrukcia v čase sa meniacich volumetrických dát a flow-visualization sú aplikačné oblasti, kde sa dá preveriť správanie DDT v 4D. Motiváciou môže byť, že rekonštrukčné chyby metód zo spracovania obrazu v prípade v čase sa meniacich volumetrických dát sa prejavujú viac ako pri rekonštrukcii statických snímok.

Rekonštrukcia videosekvencie je ďalšou oblasťou, kde dátovo závislé techniky môžu nájsť uplatnenie. Zaujímavé by bolo skúmanie možnosti využitia triangulácie z predchádzajúcej snímky, ako úvodnú trianguláciu. Takýto prístup by mohol výrazným spôsobom urýchliť rekonštrukciu sekvencií. Spájanie tejto myšlienky s paralelným spracovaním by mohlo priniesť nízke rekonštrukčné časy.

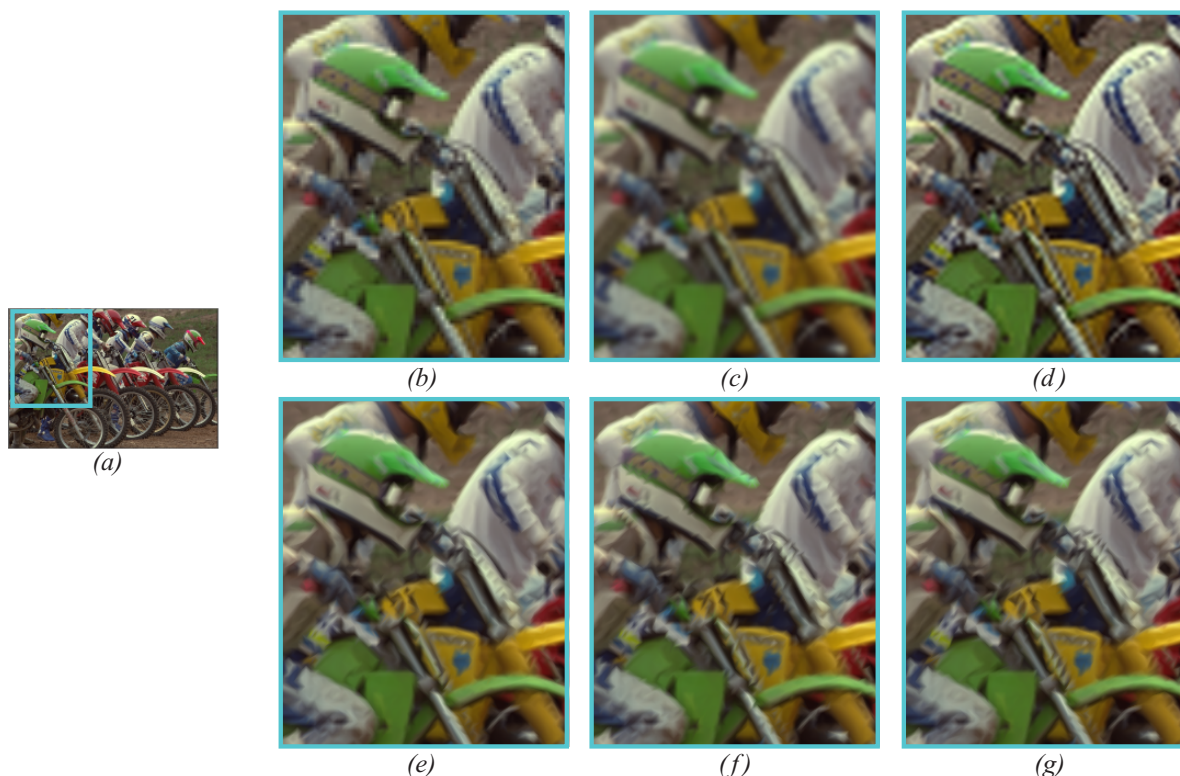
Predstavený paralelný dátovo závislý prístup bol implementovaný pomocou fragment programu, z čoho vyplňajú určité obmedzenia. Pomocou nových štandardov ako *OpenCL* [Khr] by bolo možné navrhnúť efektívnejšie paralelné riešenia. Tento výskumný smer je veľmi perspektívny a dôležitý vzhľadom na predpokladané smerovanie vývoja hardvéru.

Záver

Predložená práca je venovaná skúmaniu špeciálnej podskupiny optimálnych triangulácií, dátovo závislým trianguláciám. Cieľom bolo sumarizovať poznatky z tejto oblasti, navrhnúť nové optimalizačné prístupy a zovšeobecniť myšlienku dátovo závislých triangulácií do vyšších dimenzií. Z tematického a publikačného hľadiska dosiahnuté výsledky sa dajú deliť do troch skupín.

Prvú skupinu tvoria rozšírenia dátovo závislej techniky o nové metódy pre rovinný prípad. Sem patrí koncepcia rozdelenie na bloky pre dáta organizované do karteziánskej mriežky, alebo stochastická optimalizačná technika založená na kombinácii simulovaného žihania a look-ahead prístupu. Ďalej, bola predstavená nová skupina triangulačných metód, pomenované ako *Quasi-DDT*, ktorá slúži skôr k praktickému použitiu a nie ako aproximácia MWT. Časť týchto metód bola publikovaná v práci [Tót06].

Druhú skupinu tvoria prístupy zaoberajúce sa viacrozmernými priestormi. Jedným z hlavných prínosov práce je rozšírenie dátovo závislých triangulácií do vyšších dimenzií cez minimalizáciu váhovaného objemu. Pre tento prístup bola predstavená aj váhová funkcia. Ako príklad optimalizačného prístupu bolo uvedené zovšeobecnenie Lawsonovho optimalizačného procesu. Podobne by bolo možné zovšeobecniť aj iné optimalizačné metódy. Princíp využitia týchto myšlienok pre účely kompresie viacrozmerných dát bol tiež uvedený. Výsledky, okrem koncepcie dátovo závislej kompresie, boli publikované v [TVFG07].



Obr. 9: Rekonštrukčné výsledky pri 400% zväčšení (a) zmenšený obrázok, (b) bilineárna interpolácia, (c) b-spline filter, (d) Lanczosov filter, (e) CPU LOP, (f) GPU pôvodná technika, (g) GPU ExpROI MaxGain modifikácia.

Poslednú skupinu tvoria pragmatické riešenia, ktoré majú za účel posúvať dátovo závislé techniky bližšie k reálnemu použitiu, pre aplikačnú oblasť rekonštrukcie obrazu. Do tejto skupiny patrí ďalší významný prínos práce, paralelný výpočet dátovo závislých triangulácií pomocou grafického hardvéru. Táto metóda je všeobecná a možné ju použiť pri vytváraní ľubovoľnej lokálne optimálnej triangulácie. Pre aplikačnú oblasť rekonštrukcie obrazu bola predstavená metóda, ktorá kombinuje rekonštrukčné výsledky konvolučných techník a dátovo závislých metód. Publikácia paralelného prístupu je akceptovaná do časopisu *Computers & Graphics* [CTS*10].

Okrem uvedených rozšírení a nových prístupov bolo otázkou aj reálna použiteľnosť dátovo závislých metód v praxi. Testy v tomto smere boli vykonané pre oblasť rekonštrukcie obrazu, konkrétne pre operáciu zväčšenia obrazu. Z hľadiska množstva rekonštrukčných chýb dátovo závislé prístupy dávajú porovnateľné výsledky ako najlepšie konvolučné techniky. Ďalším aspektom vnímania kvality je distribúcia týchto chýb, kde dátovo závislé prístupy dávajú vizuálne prijateľnejšie výsledky. Vplyv distribúcie artefaktov na kvalitu je ale otázkou subjektívneho vnímania, ktorú je ťažké hodnotiť matematickými meradlami. Práve preto, ako objektívny záver je možné konštatovať, že dátovo závislé techniky sú vhodnou alternatívou ku konvolučným metódam. Napriek tomu ich rozšírenosť v oblasti počítačovej grafiky je malá, vzhľadom na výsledky ktoré dosahujú. Cieľom tejto práce bolo aj poukázanie na tento fakt, a šíriť túto myšlienku vo vedeckej komunite.

V práci bola stanovená hypotéza, že pomocou ideálnej voľby cenovej funkcie a nájdením triangulácie s minimálnou váhou je kvalita výsledku rekonštrukcie maximalizovaná. Preverenie tejto hypotézy pre oblasť rekonštrukcie obrazu bola prezentovaná v kapitole štyri, v analýze výsledkov. Tu sa preukázalo, že poklesom ceny triangulácie rastie kvalita rekonštrukčných

výsledkov, na meranie kvality sa pritom používali perceptuálne metriky. Je to pozoruhodný výsledok, vzhľadom na to, že ideálnu cenovú funkciu pre túto oblasť nie je možné zostrojiť. Ďalším obmedzením je dokázaná NP-t'ážnosť úlohy hľadania *MWT* triangulácie. To môže slúžiť ako ďalšia motivácia pri hľadaní aproximácií či návrhu stochastických procesov.

Uvedená výskumná činnosť bola podporovaná z viacerých grantov, ktoré sú uvedené v odseku Vedecké aktivity.

Literatúra

- [Aur91] AURENHAMMER F.: Voronoi diagrams - a survey of a fundamental geometric data structure. *ACM Computing Surveys* 23, 3 (1991), 345–405.
- [BE95] BERN M., EPPSTEIN D.: Mesh generation and optimal triangulation. In *Computing in Euclidean Geometry*, second ed., no. 4. World Scientific, 1995, pp. 47–123.
- [Bro91] BROWN J.: Vertex based data dependent triangulations. *Computer Aided Geometric Design* 8, 3 (1991), 239–251.
- [CTS*10] CERVENÁNSKÝ M., TÓTH Z., STARINSKÝ J., FERKO A., ŠRÁMEK M.: Parallel GPU-based data-dependent triangulations. *Computers&Graphics* 34, 2 (2010), 125–135.
- [DLR90] DYN N., LEVIN D., RIPP A.: Data dependent triangulations for piecewise linear interpolation. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 10 (1990), 137–154.
- [Ede00] EDELSBRUNNER H.: Triangulations and meshes in computational geometry. In *Acta Numerica* (2000), pp. 133–213.
- [ES92] EDELSBRUNNER H., SHAH N. R.: Incremental topological flipping works for regular triangulations. In *SCG '92: Proceedings of the eighth annual symposium on Computational geometry* (1992), ACM Press, pp. 43–52.
- [Fer04] FERKO A.: Solving the minimum weight triangulation problem. Habilitation Lecture Notes, Comenius University. Bratislava, 2004.
- [GW06] GONZALEZ R. C., WOODS R. E.: *Digital Image Processing (3rd Edition)*. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA, 2006.
- [HD06] HJELLE O., DAHLEN M.: *Triangulations and Applications, Series: Mathematics and Visualization*. Springer, 2006.
- [KH01] KREYLOS O., HAMANN B.: On simulated annealing and the construction of linear spline approximations for scattered data. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics* 7, 1 (2001), 17–31.
- [Khr] KHRONOS GROUP: *The OpenCL specification*. <http://www.khronos.org/opencl/>. Web-page accessed at October 2009.
- [Kol99] KOLINGEROVÁ I.: Genetic approach to data dependent triangulations. In *Proceedings of Spring Conference on Computer Graphics* (1999), pp. 229–238.
- [Law77] LAWSON C. L.: Software for c^1 surface interpolation. In *Mathematical Software III, J. Rice ed.* (1977), Academic Press, pp. 161–194.
- [Lee00] LEE K.: Three-dimensional medical image modeling of scattered data based on data-dependent criteria. In *Proc. SPIE Vol. 4117, Vision Geometry IX* (2000), pp. 91–99.

- [Mul06] MULZER W.: Minimum weight triangulation is NP-hard. In *SCG '06: Proceedings of the twenty-second annual symposium on Computational geometry* (New York, NY, USA, 2006), ACM Press, pp. 1–10.
- [Pol00] POLEC J.: *Vybrané metódy kompresie dát*. Univerzita Komenského, 2000.
- [Sch93] SCHUMAKER L. L.: Computing optimal triangulations using simulated annealing. In *Selected papers of the international symposium on Free-form curves and free-form surfaces* (1993), Elsevier Science Publishers B. V., pp. 329–345.
- [SW04] SU D., WILLIS P.: Image interpolation by pixel-level data-dependent triangulation. *Comput. Graph. Forum* 23, 2 (2004), 189–202.
- [Tót04] TÓTH Z.: *Rekonštrukcia obrazu pomocou triangulácie*. Master's thesis, Comenius University, Bratislava, 2004.
- [Tót06] TÓTH Z.: Towards an optimal texture reconstruction. In *CESCG 2000-2005 Best Papers Selection* (2006), Wimmer M., Ferko A., Szirmay-Kalos L., Hauser H., (Eds.), pp. 197–212.
- [TVFG07] TÓTH Z., VIOLA I., FERKO A., GRÖLLER M. E.: N-dimensional data-dependent reconstruction using topological changes. In *Topology-based Methods in Visualization* (2007), Hauser H., Hagen H., Theisel H., (Eds.), Springer, pp. 183–198.
- [WACBS04] WANG Z., A. C. BOVIK H. R. S., SIMONICELLI E. P.: Image quality assessment: From error visibility to structural similarity. *IEEE Transactions on Image Processing* 13, 4 (2004), 600–612.
- [WB02] WANG A., BOVIK A.: A universal image quality index. *IEEE Signal Processing Letters* 9, 3 (2002), 81–84.
- [YBS01] YU X., BRYAN B. S., SEDERBERG T. W.: Image reconstruction using data-dependent triangulation. *Computer Graphics and Applications* 21, 3 (2001), 62–68.

Vedecké aktivity

Publikácie

Červeňanský M., Tóth Z., Starinský J., Ferko A., Šrámek M.: Parallel GPU-based data-dependent triangulations. *Computers & Graphics*, Volume 34, Issue 2, April 2010, ISSN 0097-8493, pp. 125-135.

Tóth Z., Viola I., Ferko A., Gröller M. E.: N-dimensional data dependent reconstruction using topological changes. In *Topology-based Methods in Visualization* (2007), Hauser H., Hagen H., Theisel H., (Eds.), *Springer*, ISBN 978-3-540-70822-3, pp. 183–198.

Tóth Z.: Towards an optimal texture reconstruction. In *CESCG 2000-2005 Best Papers Selection* (2006), Wimmer M., Ferko A., Szirmay-Kalos L., Hauser H., (Eds.), *Österreichische Computer Gesellschaft Wien*, ISBN 3-85403-204-8, pp. 197–212.

Tóth Z.: Illustration of data dependent triangulation reconstruction technique, *Animations of Computer Graphics exhibition in Proceedings of Spring Conference on Computer Graphics* (2006), Častá-Papiernička, ISSN 1335-5694, pp. 104.

Tóth Z. *Image reconstruction using triangulations. Študentská vedecká konferencia FMFI UK 2004*(Bratislava, SR - Brno, CZ), 2004.

Kvalifikačné práce

Tóth Z.: Triangulácie v rovine, teréne a priestore. *Práca k dizertačnej skúške*, Univerzita Komenského, Bratislava SR, 2006.

Tóth Z.: Dátovo závislé triangulácie. *Rigorózna práca*, Univerzita Komenského, Bratislava SR, 2005.

Tóth Z.: Rekonštrukcia obrazu pomocou triangulácie. *Diplomová práca*, Univerzita Komenského, Bratislava SR, 2004.

Ocenenia

Štipendium ESF: Skvalitnenie vedeckej práce doktorandov a postdokov na FMFI UK, 2006

Cena Rektora Univerzity Komenského za najlepšiu diplomovú prácu v odbore matematika

2. miesto *ŠVOČ 2004* Česko-Slovenské záverečné kolo - v sekcii Teoretická Informatika

Laureat Študentskej vedeckej konferencie FMFI UK (za prácu Image Reconstruction Using Triangulations) v školskom roku 2003/2004

2nd Best Paper Award (za článok Towards an Optimal Texture Reconstruction, CESC 2004)

Tosiyasu Lawrence KUNII Award 2004

Zahraničné pobyty

December 2004 - Február 2005, September 2005 Austria - Vienna, Institute of Computer Graphics and Algorithms, Technische Universität Wien.

Grantová činnosť

APVV - Tools for processing and visualization of tomographic and confocal data - APVV-20-056105, (2007)

Grant Univerzity Komenského - Dátovo závislá kompresia tetrahedrálnych sietí - UK/392/2007, (2007)

Grant Univerzity Komenského - Rekonštrukcia viacrozmerných dát pomocou triangulácie - UK/362/2006, (2006)

VEGA - Výpočtová geometria pre real-time rendering - VEGA grant no. 1/3083/06, (2006-2007)

ASO sustainable cooperation grant - Natural Phenomena Visualization using Unstructured Grid - (2005), <http://aso.sccg.sk>

APVT - Virtuálna Bratislava - APVT-20-025502, (2002 - 2004)

Domovská stránka dizertačného projektu

<http://www.sccg.sk/~toth/res.html>