

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITY KOMENSKÉHO V BRATISLAVE



DIPLOMOVÁ PRÁCA

2004

ZSOLT TÓTH

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITA KOMENSKÉHO
BRATISLAVA



REKONŠTRUKCIA OBRAZU POMOCOU TRIANGULÁCIE

DIPLOMOVÁ PRÁCA

AUTOR: ZSOLT TÓTH
VEDÚCI DIPLOMOVEJ PRÁCE: RNDR. ANDREJ FERKO, PHD.

APRÍL 2004

Čestné prehlásenie

Čestne prehlasujem, že som túto diplomovú prácu vypracoval samostatne s využitím uvedenej literatúry.

V Bratislave, apríl 2004

.....

Zsolt Tóth

Úprimne ďakujem svojmu diplomovému vedúcemu RNDr. Andrejovi Ferkovi, PhD. za jeho odborné vedenie, konzultácie, cenné pripomienky a skvelú motiváciu pri tvorbe tejto práce. Vďaka patrí aj mojej rodine a priateľom za ich pochopenie a podporu, ktorú mi poskytli.

Abstrakt

Vizuálne príjemná rekonštrukcia obrazov zohráva dôležitú úlohu v počítačovej grafike. V tejto práci je skúmaná využiteľnosť triangulácií na rekonštrukciu obrazov. Sú uvedené dva nové algoritmy na vytváranie dátovo závislých triangulácií. Nový deterministický algoritmus pomenovaný ako IPA (image partitioning algorithm) posunie túto rekonštrukčnú metódu bližšie ku praktickej využiteľnosti. Je uvedená nová modifikácia optimalizačnej techniky - simulované žihanie, pomenované ako SALA, ktorá využíva look-ahead techniku. Je popísaná nová skupina metód - kvázi-dátovo závislé triangulácie, ktoré len v časti využívajú dátovú závislosť. Prezentovaný je aj nový spôsob využitia farebných informácií na dosiahnutie kvalitnejšieho priebehu rekonštrukcií farebných obrázkov. Výsledky vykazujú teoretickú a praktickú prevahu nad inými metódami. Táto práca je časťou APVT projektu Virtual Bratislava.

Abstract

Visually pleasant image reconstruction has an important role in computer graphics. In this work it is explored the applicability of triangulations for image reconstruction. Two new algorithms are introduced for generation of data-dependent triangulation. The new deterministic algorithm entitled as image partitioning algorithm (IPA) shifts this reconstruction method closer to real usage. Is presented a new modification of the optimization technique simulated annealing with look-ahead process (SALA). There is described a new group of methods - quasi-data-dependent triangulation, where the data dependency is used only partially. Also a new way of utilization of color information is presented, to achieve qualitative course of reconstruction of color images. Results show both theoretical and practical superiority over another methods. This work is a part of the APVT project Virtual Bratislava.

Obsah

0	ÚVOD	1
1	POJMY A PRINCÍPY	2
1.1	ZÁKLADNÉ DEFINÍCIE	2
1.2	PROBLÉM INTERPOLÁCIE A REKONŠTRUKCIE DIGITÁLNEHO OBRAZU	5
1.2.1	<i>Interpolácia diskrétnych dát</i>	<i>5</i>
1.2.2	<i>Digitálny obraz</i>	<i>5</i>
1.3	INTERPOLAČNÉ SCHÉMY DIGITÁLNYCH OBRAZOV	6
2	OVPLYVNÚJÚCE FAKTORY DDT	7
2.1	HVS A FAREBNÉ MODELY	8
2.2	CENOVÁ FUNKCIA HRÁN	11
3	APROXIMÁCIA MWT POMOCOU DDT TRIANGULÁCIÍ	12
3.1	DETERMINISTICKÉ METÓDY	13
3.1.1	<i>LOT pomocou Delaunayovej triangulácie</i>	<i>13</i>
3.1.2	<i>Greedy triangulácia</i>	<i>17</i>
3.1.3	<i>Look-ahead rozšírenie</i>	<i>18</i>
3.1.4	<i>DDT na úrovni pixlov</i>	<i>20</i>
3.1.5	<i>Rozdelenie na bloky</i>	<i>21</i>
3.2	STOCHASTICKÉ METÓDY	23
3.2.1	<i>Simulované žihanie</i>	<i>23</i>
3.2.2	<i>Genetická optimalizácia</i>	<i>24</i>
3.2.3	<i>Simulované žihanie s využitím look-ahead stratégie</i>	<i>26</i>
3.3	ALTERNATÍVNE PRÍSTUPY	27
3.3.1	<i>Ko – triangulácia</i>	<i>27</i>
3.3.2	<i>Vrcholovo založené ohodnotenie</i>	<i>27</i>
3.3.3	<i>Quasi-DDT</i>	<i>28</i>
4	POPIS SOFTVÉROVÉHO PROJEKTU	29
4.1	TRIANGULATOR	30
4.2	VISUALISATOR	33
4.3	ANALYZER	35
5	ANALÝZA VÝSLEDKOV	36
5.1	APLIKÁCIA DDT NA REKONŠTRUKCIE OBRAZOV	36
5.2	APLIKÁCIA DDT NA VÝŠKOVÉ MAPY	45
6	PODNETY PRE ĎALŠÍ VÝSKUM	46
7	ZÁVER	47
	LITERATÚRA	48

0 Úvod

Virtuálne mestá majú veľkú budúcnosť, pomôžu rozvíjať turistiku, telekomunikačnú infraštruktúru, vybudovať 3D navigačné systémy, ako adekvátne modely slúžia aj na skúmanie lokálnej vetrivosti, modelovanie scén pre herný priemysel, simulácie osvetľovania alebo na rozoznanie chorých stromov. V oblasti virtuálnej archeológie sa v poslednom čase tiež dosiahli dobré výsledky. Najvýznamnejšími európskymi virtuálnymi mestami sú Paríž, Graz, Sagalassos, Praha (Sagalassos [37] sa geograficky nachádza v Ázii, ale pracujú na tom vedci z Európy). Medzi úspešné virtuálne mestá sa snaží zaradiť aj projekt Virtuálna Bratislava [11]. Úlohou tejto diplomovej práce je poskytnúť nájdené výsledky a riešenie do historicky prvého a aj dôležitého virtuálneho mesta na Slovensku. Tento projekt znamená veľký pokrok pre informatickotechnologický rozvoj a pre prezentáciu vedeckého potenciálu krajiny.

Táto práca sa zaoberá vylepšením rekonštrukciou obrazu pomocou triangulácií. Presnejšia rekonštrukcia obrazu je dôležitá aj pri operáciách na obraze, kde je dôležité, aby štruktúra obsahu v obraze bola čo najmenej poškodená. Takými operáciami sú škálovanie, rotácia, atď. Riešenia budú použité pri vytváraní panorám a rekonštrukcií textúr pri VRML modeloch, iné použitie je napríklad zväčšenie obrazu získaného z lacných digitálnych kamier alebo tlač vo väčšom rozlíšení než to pôvodná veľkosť dokumentu umožňuje (samozrejme, ak je potrebné zachovať kvalitu). Taktiež je možné použitie pri videokonferenciách, kvôli rýchlostným obmedzeniam internetu.

Cieľom je porovnávať doterajšie metódy z hľadiska kvality obrazu perceptuálnymi metrikami, a navrhnúť efektívnejšie riešenie problematiky na dosiahnutie čo najpresnejšej, najrýchlejšej rekonštrukcie, a vytvoriť si rozumné kompromisy.

Práca je členená do piatich častí. V prvej kapitole sú zavedené základné pojmy, a členenie rekonštrukčných metód. Druhá kapitola sa zaoberá ovplyvňujúcimi faktormi dátovo závislých triangulácií. Tretia kapitola popisuje konkrétne triangulačné metódy. V štvrtej kapitole je popis softvérovej realizácie a popis napojenia na projekt Virtuálna Bratislava. Analýzu výsledkov možno nájsť v piatej kapitole.

1 Pojmy a princípy

1.1 Základné definície

Def. 1.1: [25] Konvexná množina V je množina takých bodov, pre ktoré platí:

$$\forall x, y \in V \text{ platí } \lambda x + (1-\lambda)y \in V \quad \forall \lambda \in (0,1).$$

Konvexným obalom množiny V ozn. $CH(V)$ sa nazýva najmenšia konvexná množina obsahujúca množinu bodov V .

Def. 1.2: [21] Nech je daná množina bodov $V = \{(x_i, y_i); i = 1, \dots, n\}$ - nie všetky kolineárne, pre $\forall V_i, V_j \in V; i \neq j$ platí $V_i \neq V_j$. *Trianguláciou* množiny V sa nazýva množina trojuholníkov $T(V)$, spĺňajúca vlastnosti:

- Každý vrchol ľubovoľného trojuholníka z $T(V)$ je z V a každý prvok z V je vrcholom trojuholníka.
- Každá hrana z triangulácie obsahuje práve dva prvky z V .
- Zjednotenie všetkých trojuholníkov z triangulácie $T(V)$ je konvexný obal množiny V .
- Prienik dvoch ľubovoľných trojuholníkov z triangulácie $T(V)$ je prázdna množina alebo ich spoločný bod alebo ich spoločná hrana.

Predpoklad: Všetky body množiny V v nasledujúcich úvahách sú navzájom rôzne, a sú nekolineárne. (Tento predpoklad je dôležitý, aby v algoritmoch nevznikli degenerované trojuholníky.)

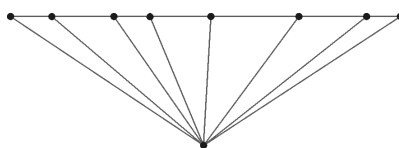
Kvôli odhadu efektívnosti algoritmov je potrebné si zaviesť nasledujúce pojmy:

Def. 1.3: [6] Asymptotická zložitosť - $O(f(n))$ označuje množinu všetkých funkcií $g(n)$, pre ktoré existujú kladné konštanty n_0 a C tak, že platí $|g(n)| < C \cdot f(n)$ pre všetky $n > n_0$.

Def. 1.4: [6] Dolná hranica zložitosti - $\Omega(f(n))$ označuje množinu všetkých funkcií $g(n)$, pre ktoré existujú kladné konštanty n_0 a C tak, že platí $|g(n)| > C \cdot f(n)$ pre všetky $n > n_0$.

Veta 1.1: Dolná hranica časovej zložitosti ľubovoľnej triangulácie N bodov v rovine je $\Omega(N \log N)$.

Dôkaz: Vyplýva to z dolnej hranice zložitosti usporiadania N bodov (to vieme spraviť v čase $\Omega(N \log N)$).



Obrázok 1: Ilustrácia dôkazu dolnej hranice zložitosti triangulácie.

Tvrdenie 1.1: [25] Počet hrán a trojuholníkov triangulácie danej množiny v rovine a v teréne je rovnaký a platí:

$$\text{Card}(e) = 3 \cdot (\text{Card}(V) - 1) - \text{Card}(CH(V))$$

$$\text{Card}(T) = 2 \cdot (\text{Card}(V) - 1) - \text{Card}(CH(V)),$$

kde $\text{Card}()$ značí mohutnosť množiny, e je množinou hrán, V značí množinu vrcholov a T množinu trojuholníkov v triangulácii.

Dôkaz: Toto tvrdenie vyplýva z dobre známej Eulerovej formuly.

Def. 1.5: Nech je daná triangulácia množiny V , uvažujme štvoruholníky vytvorené z dvoch trojuholníkov triangulácie $T(V)$, ktoré obsahujú spoločnú hranu ako svoju diagonálu. *Striktne konvexným štvoruholníkom* sa v takejto štruktúre nazýva konvexný štvoruholník, v ktorom všetky trojice bodov sú nekolineárne.

Def. 1.6: Hrana e sa nazýva *lokálne optimálna* ak platí:

Štvoruholník z predpokladu nie je striktne konvexný.

Štvoruholník je striktne konvexný a je optimálne triangulovaný.

Def. 1.7: *Lokálne optimálna triangulácia* ozn. LOT množiny V je triangulácia v ktorej každá hrana, ktorá nepatrí do hranice konvexného obalu, je lokálne optimálna.

Def. 1.8: *Váhou hrany* e budeme označovať číslo $c(e) \in \mathbb{R}$.

Def. 1.9: *Váha triangulácie* $T(V)$ je súčtom dĺžok všetkých jej hrán: $w(T) = \sum_{e \in T} \|c(e)\|$.

V tejto práci bude použitá l_1 norma, teda súčet absolútnych hodnôt.

Poznámka: Existujú prístupy, kde za váhu triangulácie sa berú súčty v iných metrikách [8], najúspešnejšou je hore uvedená l_1 norma.

Def. 1.10: *Neutrálna výmena diagonál* v triangulácie hrany e je taký proces, pri ktorom sa hrana e vymení za druhú diagonálu v striktne konvexnom štvoruholníku, ktorá e obsahuje ako svoju diagonálu, pričom váha triangulácie sa nezmení.

Def. 1.11: Nech hrana e je diagonálou striktne konvexného štvoruholníka, vytvárané s trojuholníkmi obsahujúce e ako spoločnú hranu. Druhú diagonálu budeme nazývať *alternatívnou diagonálou* hrany e .

Def. 1.12: *Triangulácia s minimálnou váhou* (MWT – minimum weight triangulation) množiny bodov V je triangulácia, ktorej váha je spomedzi všetkých triangulácií minimálna :

$$w(MWT(V)) = \sum_{e \in MWT} \|c(e)\| = \min\{w(T(V))\} \quad \forall T(V).$$

Hrany patriace vždy do MWT: najkratšia hrana vždy patrí do MWT a ešte tie hrany, ktoré nepretína žiadna iná hrana.

Vo všeobecnosti nájdenie globálnej optimálnej triangulácie vyžaduje vyšetrovať exponenciálne množstvo triangulácií, čo pri väčšom množstve dát je časovo veľmi náročné.

Samotné riešenie MWT triangulácie je zatiaľ nevyriešením problémom, nebola dokázaná ani vyvrátená existencia algoritmu pre všeobecný prípad. Existujú rôzne výsledky o podgrafoch a heuristikách.

Def. 1.13: [24] Nech je daná množina bodov $V = \{(x_i, y_i, z_i); i = 1, \dots, n\}$ v E^3 . Uvažujme kolmý priemet $V' = \{(x_i, y_i, z_i); i = 1, \dots, n\}$ množiny V do roviny α . Potom trojicu (V, V', α) nazývame *terén*. V špeciálnom prípade ak to bude priemet do roviny $\alpha = xy$, tak $V' = \{(x_i, y_i, 0); i = 1, \dots, n\}$ sa nazýva 2.5D terén.

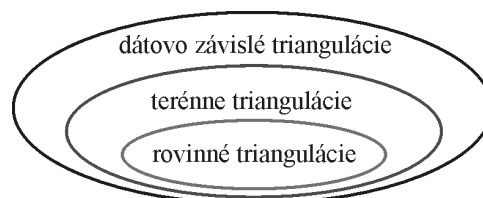
Def. 1.14: [24] Nech je daný terén (V, V', α) . *Terénna triangulácia* je triangulácia a navyše požadovaný prázdny prienik vnútor trojuholníkov z V' v rovine α , ktoré sú priemetmi danej dvojice trojuholníkov triangulácie bodov z V .

Pridaním ďalšej požiadavky sa zabránilo vzniku nejednoznačnosti, ktorá by mohla vzniknúť. Nech je ľubovoľný bod X z $CH(V')$, a normálový vektor $\mathbf{n}$ roviny α , kvôli pridanej podmienke priamka $\langle X, \mathbf{n} \rangle$ má jednoznačný prienik s plochou vytváranou z trojuholníkov terénnej triangulácie.

Def. 1.15: *Dátovo závislá triangulácia* (data dependent triangulation) ozn. DDT množiny $V = \{(x_i, y_i); i = 1, \dots, n\}$ v E^2 je taká triangulácia, kde topológia triangulácie je závislá od funkcie $f(x, y) = \{z_i = f(x_i, y_i); i = 1, \dots, n\}$.

Dátovo závislá triangulácia umožní konštruovať triangulácie v 2D na základe ďalších poznatkov, ktoré sú pri vytváraní triangulácií reprezentované ako ďalší rozmer. V skutočnosti neznamena trianguláciu len v 2D, ale aj v 2.5D. Závisí od aplikácie ktorá forma reprezentácie výsledkov viac vyhovuje (rekonštrukcia obrazu – 2D, rekonštrukcia terénu – 2.5D).

Principiálne ohodnotenie hrán (alebo iných komponentov) je brané vzhľadom na dané funkčné hodnoty, reštrikcie budú brané len na obore hodnôt funkcie, teda na bodoch v E^2 . Vlastne ide o terénnu trianguláciu, len ohodnotenie hrán alebo iných komponentov, je brané všeobecnejšie, nemusí ani závisieť od geometrie. Vzájomný vzťah množiny triangulácií v rovine, v teréne a dátovo závislej triangulácií je znázornená na obrázku - Obrázok 2.



Obrázok 2: Vzájomný vzťah množín triangulácií.

Dôvodom vzniku DDT triangulácií bola snaha vytvoriť z diskrétnych vzoriek vizuálne príjemný, spojitý model. Medzi vizuálne významné časti patria hrany, teda oblasti kde $f(x, y)$ má

v jednom smere veľkú deriváciu v porovnaní s inými smermi. Toto sa prejavuje v triangulácii výskytom dlhých, úzkych trojuholníkov. Na tento účel existujúce rovinné a terénne triangulácie nedávajú také uspokojivé riešenia, aké poskytuje DDT.

Poznámka: S prechodom ku terénnym trianguláciám pridáme o niektoré možnosti, ktoré platili pre optimálne triangulácie v 2D. Napríklad nebude platiť diamantový test, β -skeleton, DANN test pre hrany MWT [24] a teda ani heuristiky založených na nich. V článku [10] možno nájsť „lesk a biedu“ hľadania podgrafov MWT. Rozsiahly popis aktuálneho stavu výskumu MWT problematiky možno nájsť v habilitačnej práci *Ferka* [9]. S prechodom od terénnych triangulácií ku dátovo závislým trianguláciám trend ubúdania efektívnych algoritmov pokračuje. Je to vďaka špeciálnemu ohodnoteniu hrán.

1.2 Problém interpolácie a rekonštrukcie digitálneho obrazu

1.2.1 Interpolácia diskretných dát

Nech je daná množina bodov $\mathbf{V} = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$ v $\mathbb{R}^2$ a dáta $z_i = f(x_i, y_i)$, $i=1, \dots, n$, ako namerané hodnoty neznámej funkcie f v určitých bodoch, ktorá je definovaná na konvexnom obale množiny $\mathbf{V}$. Množina $\mathbf{V}$ sa nazýva množinou rozptýlených dát (scattered data). Úlohou je nájsť aproximáciu funkcie f .

Existuje viacero spôsobov, jeden z nich je po častiach lineárna interpolácia – plocha funkcie je reprezentovaná sieťou trojuholníkov. Projekcia každého bodu z oboru funkcie f leží práve v jednom trojuholníku (ak nie na hranici dvoch alebo troch trojuholníkov). Nová hodnota je získaná pomocou bilinéarnej interpolácie z vrcholov trojuholníka, v ktorej projekcia bodu leží.

Teda DDT triangulácia je jednou z najjednoduchších možností ako získať po častiach lineárnu, C^0 spojitú interpoláciu pre danú množinu bodov (x_i, y_i) so zadanými funkčnými hodnotami z_i . Môže slúžiť ako prvý krok ku interpoláciám-aproximáciám vyššej úrovne, ale aj ako základné štruktúrovanie dát.

Prehľad ďalších prístupov ku interpoláciám rozptýlených dát možno nájsť v [23], kde sú popísané aj také metódy ktoré využívajú trianguláciu ako štartovací bod procesu.

1.2.2 Digitálny obraz

V reálnom svete všetko, čo vnímame, je spojitého charakteru. Nasnímaním – digitalizáciou obrazu dostaneme diskretný model. Matematický model obrazu je spojitá funkcia

$$z = f(x, y)$$

Pri digitalizácii sa stratí informácia o funkcii f , zostávajú len hodnoty v určitých bodoch. V počítačovej grafike raster a gamut (farebný rozsah) zobrazovacích jednotiek a samotný proces digitalizácie nám určuje hranice možností. Týmto spôsobom nám vznikne obraz kde x a y reprezentujú bod vo štvorcovom rastri nazývaný *pixel* (picture element), a f udáva farebnú informáciu.

Problém vyžadujúci rekonštrukciu vznikne z toho, že z diskrétného modelu chceme získať ďalšie informácie požadujúce spojitý model, kvôli ďalším operáciám na obraze. Úspešnosť týchto operácií závisí od kvality získanej aproximácie spojitého modelu. Nie je možné nájsť ideálnu metódu, ale je možné a potrebné znížiť množstvo vizuálne zavádzajúcich chýb.

Pri virtuálnych mestách je potrebné vytváranie LOD (Level of Detail) textúr a rôzne presné operácie na obrazoch pri predspracovaní obrazov do panorám. Je skoro nemožné sa zaoberať bez používania výškových máp (ďalej už len DEM – Digital Elevation Model) nameraných geografickými úradmi. Tieto DEM dáta majú z hľadiska triangulácií podobný charakter ako digitálny obraz.

Ďalšou aplikáciou, kde sa využívajú DDT triangulácie je zmenšenie objemu dát. Používa sa aproximácia s menším počtom bodov s cieľom dosiahnuť najmenšie straty detailov z modelu [13] – technika LOD. Zvyčajne ide o veľké množstvo dát, ktoré nie je možné zobraziť v reálnom čase (obmedzenie zo strany hardveru a siete) s ostatnými modelmi (budovy, stromy, atď.) v aplikáciách ako sú virtuálne mestá, letecké simulátory. Táto problematika je ekvivalentná s kompresiou obrazu, v ktorej sa používa zjednodušená aproximácia originálu. Opodstatnenosť tohto prístupu vyplýva z toho, že existuje snaha presadiť reprezentáciu virtuálnych miest na mobilných zariadeniach (projekt Virtual Heidelberg [29]).

1.3 Interpoláčné schémy digitálnych obrazov

Najjednoduchšia metóda je interpolácia pomocou najbližšieho suseda (nearest neighbour interpolation). Zobere do úvahy vždy hodnotu najbližšieho pixla, čím vzniknú v obraze štvorce rušivé z hľadiska ľudského vnímania. Na druhej strane je to veľmi rýchla rekonštrukcia, kvôli čomu sa používa aj na generovanie náhľadov veľkých obrázkov.

Ďalšiu skupinu tvoria metódy založené na tenzorových súčinoch 1D bázičných funkcií ako lineárna interpolácia, kubický splajn. Najprv sa interpolujú obrazové body v jednom smere a potom sa urobí ďalšia interpolácia v druhom smere. Touto cestou sa dajú dosiahnuť lepšie výsledky ako pri predchádzajúcej metóde. Vzhľadom na to, že sa používa tenzorový súčin

jednorozmerných funkcií, zostanú nevyužívané informácie, ktoré majú inú orientáciu než smery jednorozmerných interpolácií. V komerčnej sfére sa využívajú práve tieto rekonštrukčné metódy vzhľadom na malú časovú náročnosť a lepšie výsledky než predchádzajúce metódy. Možno sem zaradiť aj metódy založené na filtrácii obrazu (napr. Mitchellova interpolácia, Gaussovo či Parzenovo okno). Neskôr však s technologickým pokrokom a kvôli aplikáciám žiadajúcim kvalitnejšie výsledky sa presadila snaha o vytvorenie kvalitnejších metód.

Pri predchádzajúcich rekonštrukčných metódach vznikli v obraze štvorce, čo je pre ľudské vnímanie rušivé. Na odstránenie týchto efektov, boli vyvinuté metódy, ktoré najprv rekonštruovali oblasti, ktoré hrajú pri vnímaní dôležitú úlohu, ako sú napríklad hrany a potom na ostatok aplikovali predchádzajúce úvahy. Vytvárali sa ďalšie prístupy, ktoré už na celý obraz aplikovali takzvanú hranovo orientovanú interpoláciu. Do tejto skupiny patrí aj rekonštrukcia pomocou DDT triangulácie, ktorá berie do úvahy vizuálne významné vlastnosti obrazu.

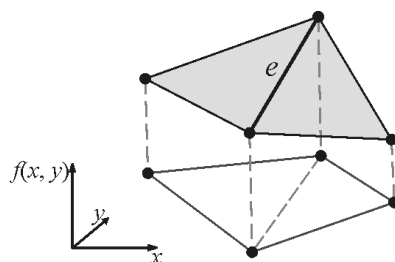
2 Ovpływujúce faktory DDT

V 1. kapitole sa zaviedol pojem dátovo závislej triangulácie, ale nebolo špecifikované, ako určiť jej závislosť od dát. Tento účel by mala splniť 2. kapitola.

Cieľom je ohodnotiť hrany DDT triangulácie takým spôsobom, aby zostrojená MWT aproximácia čo najlepšie rekonštruovala danú množinu. Teda použiť taký princíp ohodnotenia-cenovú funkciu (cost function), ktorá vizuálne významným častiam obrazu priradí hrany s nízkou váhou.

Pri aproximácii geografických dát je možné sa zaoberať bez použitia DDT metód, avšak kvalita takto získanej aproximácie je nižšia. V takomto prípade sa používa terénna triangulácia a euklidovská vzdialenosť bodov v 2.5D. Tento princíp si nevyžaduje zdefinovať cenovú funkciu, ktorá využíva aj iné informácie než informácie o dvoch bodoch, ktoré určujú danú hranu. Ohodnotenie hrán v DDT bere do úvahy informácie z trojuholníkov, ktoré danú hranu obsahujú, presnejšie:

Def. 2.1: Každá hrana DDT triangulácie množiny V , ktorá netvorí $CH(V)$ je ohodnotená pomocou informácií získaných práve zo 4 bodov, ktoré sú vrcholmi trojuholníkov obsahujúcich danú hranu. Situáciu znázorňuje Obrázok 3.



Obrázok 3: Cenová závislosť hrany e .

Hrany vytvárajúce hranicu CH sú pre nás nezaujímavé, lebo patria do každej triangulácie, takže neovplyvnia výsledok. Definícia DDT dovoľuje použitie ľubovoľnej cenovej funkcie, teda aj inú závislosť od dát, ako je vyššie definované. V praxi sa používa len uvedený princíp závislosti od dátového vektora, a preto v tejto práci budeme postupovať na základe definície 2.1.

Poznámka: Kvôli definícii 2.1, testovanie lokálnej optimálnosti hrany e v rovinných (a terénnych) trianguláciách je odlišné ako v DDT. V prvom prípade lokálna optimalita závisí len od hrany e a od jej alternatívnej diagonály. Pri dátovo závislých trianguláciách to znamená navyše nutnosť vyhodnotenia cenovej funkcie hrán, ktoré vytvárajú striktné konvexný štvoruholník, obsahujúci e ako svoju diagonálu.

Zostrojenie adekvátnych cenových funkcií pre rekonštrukciu obrazu si vyžaduje získanie dátového vektora z farebných informácií. Zvyčajne digitálne obrazy sú popísané pomocou farebných modelov ako RGB, YUV... Spoločný charakter týchto modelov je popis farieb tromi komponentami (trichromatická teória farieb), z čoho je potrebné vyjadriť jeden údaj, ktorý vystihuje danú množinu. Kvôli tomu sú žiaduce poznatky ako funguje ľudský vnímací systém (Human Visual System, ďalej už len HVS) a jeho vzťah ku farebným modelom.

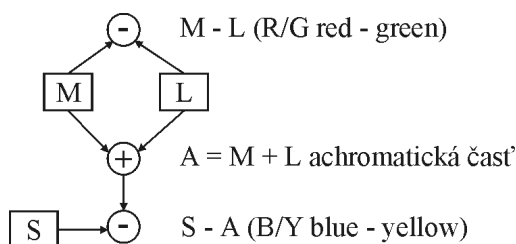
2.1 HVS a farebné modely

Otázkou HVS sa bude tento text zaoberať bez nárokov na úplnosť kvôli obrovskému rozsahu tematiky, s cieľom vystihnúť pre naše ciele významné poznatky. Podrobnejšie prehľady HVS a farebných modelov možno nájsť v [12], [14], [26], [28].

HVS sa skladá z dvoch hlavných častí: z mozgu a z očí (u stavovcov je to časť mozgu, len z anatomického hľadiska sú separované). Pokiaľ sa vytvorí výsledný dojem, informácia získaná z elektromagnetického žiarenia (380 nm – 780 nm – viditeľné svetlo) prejde cez množstvo fyziologických a psychologických filtrov. Treba si pripomenúť, že HVS nie je bez chýb, viaceré spektrá sa môžu javiť rovnako, vidíme hrany tam, kde nie sú (klasickým prípadom na to sú Machove pásy), niekedy doplní informácie ktoré sú logické, ale v skutočnosti nie sú časťou vnímanej scény, atď... Vnímanie farieb závisí od veľa vecí, napríklad od farby pozadia,

od osvetlenia. Oko je najviac citlivé na zmenu jas. Tento fakt má aj evolučné dôvody, spracovanie chromatickej informácie sa vyvinulo neskôr ako citlivosť na jas.

Ľudské oko obsahuje 2 typy fotoreceptorov: tyčinky – na vnímanie intenzity, aktívne pri nízkej intenzite svetla, a čapíkov – na vnímanie farieb. Pri intenzite denného svetla sa informácia pozbiera primárne z čapíkov. U človeka existujú tri druhy čapíkov, ktoré sú najviac senzitivne na vlnové dĺžky zodpovedajúce farbám červená – L, zelená – M a modrá - S. Citlivosť S čapíkov je výrazne nižšia než citlivosť M a L čapíkov. Tento fakt (a aj rozmiestňovanie S čapíkov v oku) implikuje ďalšiu konštrukčnú chybu HVS, ignoráciu malých modrých objektov a slabé rozlišovanie jednotlivých odtieňov modrej. Počet fotosenzorov je niekoľkonásobne vyšší než počet nervových vlákien, cez ktoré je informácia z očí prenesená do mozgu. Proces filtrovania je dôvodom vzniku mnoho artefaktov, ktoré sa takýmto spôsobom stávajú časťou zosnímaného obrazu. Pred prenosom do mozgu je táto informácia spracovaná do troch informačných kanálov: jeden na achromatickú časť svetla (intenzita alebo jas) a na dve ďalšie chromatické (farebné) zložky - Obrázok 4.



Obrázok 4: Spracovanie S, M, L kanálov pred prenosom do mozgu.

Achromatická časť sa používa v mozgu na detekciu objektov a ich obrysov, a taktiež sa používa na vnímanie priestoru a pohybu. Nezávisle od toho sa spracujú informácie zo všetkých troch kanálov za účelom vnímania farieb a malých detailov. Ďalší priebeh spracovania dát je zatiaľ preskúmaný len z časti. Ide o obrovské množstvo fyziologických a psychologických procesov, podvedome sa používajú aj poznatky získané počas života.

Pri inteligentných rekonštrukčných metódach ako DDT je snaha využívať tieto poznatky. Yu a spol. v [38] uvádza dve metódy, ako určiť z RGB hodnôt potrebnú 0.5 dimenziu.

Menej presný prístup je zobrať si jas, ako dátový vektor podľa vzorca:

$$I = 0.21267R + 0.71516G + 0.07217B, \text{ a teda}$$

$$c(e) = c_I(e).$$

Výpočet takto je rýchly, ale zanedbáva chromatickú informáciu, čo spôsobuje chyby v rekonštrukcii malých detailov. Môže sa stať, že jednotlivé objekty sa odlišujú len

v chromatickej časti a teda oblasť, ktorá obsahuje v skutočnosti hranu, sa bude javiť ako monotónna.

Presnejšia metóda je vyrátať pre danú hranu nezávisle tri cenové hodnoty pomocou dátových vektorov R , G , B , a potom to skombinovať nasledujúcim spôsobom:

$$c(e) = 0.21267c_R(e) + 0.71516c_G(e) + 0.07217c_B(e),$$

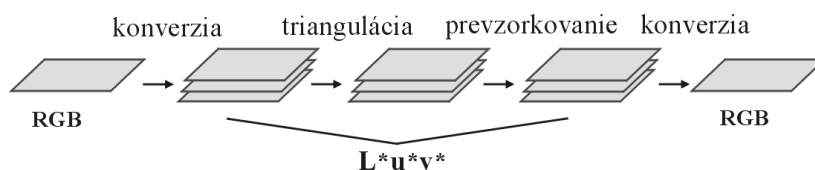
kde $c_N(e)$ značí cenu hrany e vzhľadom na dátový vektor N . Výpočtovo je táto metóda drahšia ako predchádzajúca, ale produkuje kvalitnejšie výsledky. Porovnanie v [38] uvádza perceptuálne minimálne rozdiely medzi hore uvedenými metódami.

Existujúce princípy nie sú úplne korektné, lebo prichádza ku strate informácií. Pracovať nezávisle s tromi trianguláciami pre R , G , B dátové vektory je korektné, ale pri skombinovaní prevzorkovaných dát môže dôjsť ku tzv. farebnému prelievaniu (color bleeding).

Nasledujúci nový návrh sa snaží tento efekt obísť. Základná myšlienka spočíva v použití farebného modelu CIE $L^*u^*v^*$. Existujú rôzne aspekty, podľa ktorých sa farebné modely delia: závislosť na zariadení, možnosť intuitívneho zadefinovania farieb, perceptuálna lineárnosť.

Def. 2.2: [26] *Perceptuálne lineárny farebný priestor* je taký priestor, kde perceptuálna vzdialenosť medzi dvoma farbami je pomerná s euklidovskou vzdialenosťou ich umiestnení v danom farebnom priestore.

$L^*u^*v^*$ model je nezávislý na zariadení, nie je intuitívny farebný priestor (ale je ľahké ho previesť do intuitívnej formy) a je perceptuálne lineárny. Jeho perceptuálna lineárnosť nie je perfektná, čo sa prejavuje v prechode medzi veľmi odlišnými farbami, ide len o lokálnu optimalitu. Tento farebný priestor lepšie vystihuje HVS ako RGB. Teda bude sa pracovať nezávisle s vrstvami L^* , u^* , v^* a bilinéarna interpolácia pri prevzorkovaní tiež bude využívať tento priestor - Obrázok 5.



Obrázok 5: Postupnosť krokov korektnej rekonštrukcie.

Pri použití bilinéarnej interpolácie v $L^*u^*v^*$ pridáme o možnosť hardwareového urýchlenia, ale takto zabránime vzniku ďalších chýb (napr. artefakty ktoré vzniknú pri Gourardovom tieňovaní, sú výsledkom použitia RGB modelu). Načrtnutý postup bezstratovo využíva všetky informácie pri určení $f(x, y)$, a pracuje s triangulovanými dátami pre HVS prirodzeným spôsobom.

Poznámka : Špeciálna situácia nastane ak farebná informácia nie je k dispozícii v každom pixeli. Napríklad pri lacných digitálnych kamerách farebná informácia je zozbieraná len

z jedného pola senzorov (namiesto troch). V takomto prípade je potrebné rekonštruovať chýbajúce farebné informácie. *Su* a *Willis* v článku [33] poskytli riešenie tohto problému využívajúce DDT triangulácie. Pracujú s farebnými informáciami získaných z Bayerovho farebného filtra vzorkovacieho pola (Bayer color filter array pattern), využívajúc priestor farebných rozdielov (color difference space), s cieľom zabránenia vzniku artefaktov.

2.2 Cenová funkcia hrán

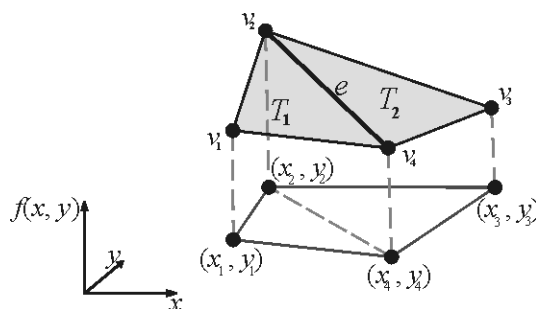
Úloha cenových funkcií je dôležitá, zvolením nevhodnej funkcie kvalita obrazu nesplní očakávania, ako to ukazuje Obrázok 6.



Obrázok 6: Výsledok po použití vhodnej a nevhodnej cenovej funkcie.

Neexistuje všeobecný prístup, ktorý by vyhovoval pre všetky dátové množiny rovnako úspešne. Ako už bolo spomínané, pre dáta typu DEM môže byť použitá euklidovská vzdialenosť bodov. Pre DDT triangulácie cenové funkcie získame na základe geometrických vlastností v zmysle definície 2.1.

Situácia je znázornená na obrázku – Obrázok 7, kde T_1 a T_2 sú trojuholníky v triangulácii danej množiny, obsahujú hranu e ako svoju spoločnú hranu a sú popísané lineárnymi polynómami $P_1(x,y)$, $P_2(x,y)$.



$$P_1(x,y) = a_1x + b_1y + c_1$$

$$P_2(x,y) = a_2x + b_2y + c_2$$

Obrázok 7: Ilustrácia pre výpočet cenovej funkcie.

Pomocou týchto polynómov popíšeme cenové funkcie, ktoré možno nájsť v [8], [38].

ABN (angle between normals) je hodnotou kosínusu uhla medzi normálami trojuholníkov T_1 a T_2 :

$$c^{ABN}(e) = n_1 \cdot n_2,$$

kde n_1 a n_2 značia normály trojuholníkov T_1 a T_2 .

JND (jump in normal derivatives) je zmena v normálach derivácií P_1 a P_2 cez hranu e :

$$c^{JND}(e) = \|n_x(a_1 - a_2) + n_y(b_1 - b_2)\|,$$

kde $(n_x, n_y)^T$ je jednotkový vektor v E^2 , ktorý je ortogonálny na smer hrany e .

DLP (deviations from linear polynomials) meria chybu medzi lineárnymi polynómami P_1 a P_2 v bodoch v_3 a v_1 .

$$c^{DLP}(e) = \|h\|,$$

$$h = \begin{bmatrix} |P_1(x_3, y_3) - f(x_3, y_3)| \\ |P_2(x_1, y_1) - f(x_1, y_1)| \end{bmatrix}.$$

DP (distances from planes) meria vzdialenosť vrcholov v_1 a v_3 od P_2 a P_1 .

$$c(e) = \|g\|, \quad g = \begin{bmatrix} \text{dist}(P_1, v_3) \\ \text{dist}(P_2, v_1) \end{bmatrix},$$

$$\text{dist}(P_j, v_k) = \frac{|P_j(x_k, y_k) - f(x_k, y_k)|}{(a_j^2 + b_j^2 + 1)^{1/2}}.$$

SCF (Sederbergs cost function) využíva projekciu normál trojuholníkov T_1 a T_2 do roviny xy :

$$c^{SCF}(e) = \|\nabla P_1\| \cdot \|\nabla P_2\| - \nabla P_1 \cdot \nabla P_2,$$

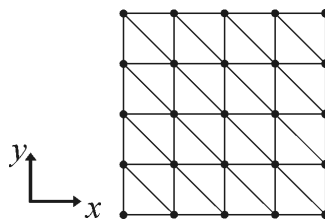
$$\|\nabla P_i\| = (a_i^2 + b_i^2)^{1/2}.$$

Uvedené cenové funkcie okrem SCF sú citlivé na škálovanie jasú. Pri škálovaní intervalu funkčných hodnôt sa môže zmeniť aj výsledná triangulácia, čo môže javiť ako nedostatok pri portovaní medzi rôznymi zariadeniami. Pre účely rekonštrukcie obrazu podľa výsledkov testov Yu a spol. [38] je najúspešnejšia SCF. Okrem uvedených cenových funkcií existujú aj ďalšie prístupy, ktoré priradujú cenu rôznym komponentom (vrcholom, hranám, trojuholníkom) na základe geometrických alebo iných vlastností [1], [5], [8].

3 Aproximácia MWT pomocou DDT triangulácií

Spoločnou charakteristikou väčšiny nasledujúcich algoritmov je použitie počiatočnej triangulácie bodov. Je to dôsledkom toho, že zatiaľ je známy len jediný efektívny nástroj - výmena diagonál (a jej look-ahead rozšírenie) - na vytváranie aproximácií a heuristik MWT. Našou úlohou je natriangulovať obor hodnôt funkcie $f(x, y)$, teda vygenerovať klasickú rovinnú

trianguláciu, a potom to premietat' do 2.5D. Zostrojenie ľubovoľnej triangulácie danej množiny vyžaduje $O(n \log n)$ času, v našom prípade ale poznáme usporiadanie množiny vrcholov. V prípade DEM dát a digitálnych obrázkov dáta sú usporiadané do karteziánskej mriežky, na ktorej sú definované funkcie, na základe ktorých vytvoríme DDT. Tento poznatok uľahčuje vo veľkej miere hľadanie optimálnych riešení. Regulárna triangulácia (Obrázok 8) je vhodným kandidátom na post počiatočnej triangulácie, má pozoruhodné vlastnosti: je MWT a najviac rovnakouhlá pre množiny s hore uvedenou vlastnosťou. Vstupné dáta sú zvyčajne usporiadané do dvojrozmerného poľa, a teda vytvorenie počiatočnej triangulácie sa vyrieši jediným prechodom cez danú množinu - $O(n)$.



Obrázok 8: Regulárna triangulácia regulárnej mriežky.

Väčšina existujúcich DDT triangulácií je konštruovaná iteračným procesom, preto úvodná triangulácia hrá dôležitú úlohu pri počte iteračných krokov. Regulárna triangulácia aj z tohto hľadiska vyhovuje, lebo je pomerne blízko ku výslednej triangulácii, teda potrebuje málo krokov aby dosiahla optimálny stav (zvyčajne ide len o lokálne optimum, a nie o globálne optimum).

3.1 Deterministické metódy

Deterministické metódy značia skupinu algoritmov, kde každý krok je jednoznačne určený, bez použitia náhodných krokov. Väčšina algoritmov, až na niektoré výnimky, sú aproximáciou MWT, teda je možné určiť kvalitu aproximácie vo všeobecnosti.

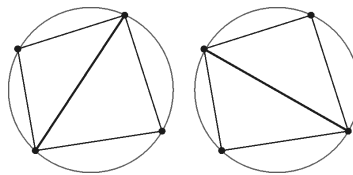
3.1.1 LOT pomocou Delaunayovej triangulácie

Medzi historicky prvé a významné triangulácie aproximujúce MWT patrí Delaunayova triangulácia - ozn. DT. V praxi sa veľmi často používa DT na rôzne účely, nielen v počítačovej grafike ale aj v iných odboroch. Definuje sa najčastejšie pomocou Voronoiových diagramov, platí princíp duality medzi týmito dvoma štruktúrami. Táto dualita a iné vlastnosti sú popísané v *Aurenhammerovej* prehľadovej práci [2]. Delaunayova triangulácia, okrem toho, že má až

optimálnu časovú zložitosť, má aj vlastnosti, kvôli ktorým je často používaná na rekonštrukciu, aproximáciu. Myšlienka Voronoivých diagramov je generalizovaná pre priestory E^d $d \in \mathbb{N}$, a teda k nej existuje aj príslušná duálna Delaunayova štruktúra (napr. v E^3 Delaunayova tetrahedralizácia). V nasledujúcich úvahách sa budeme obmedzovať na prípad $d=2$.

Def. 3.1: [27] Majme množinu bodov $V = (v_i \in E^2; i=1, \dots, n)$, prvky množiny V budeme nazývať *generátory*. *Voronoiova oblasť* V_i bodu v_i je množina bodov, ktorá je bližšia (v danej metrike) ku v_i ako ku iným bodom z V . Zostrojením Voronoiovej oblasti pre každý bod z množiny rozdelíme celý priestor na disjunktné oblasti, ktoré majú spoločné len hranice. Dve Voronoiove oblasti sa nazývajú susedné, ak majú spoločnú hranicu vo výslednej štruktúre. Spojením generátorov susedných Voronoivých oblastí získame trianguláciu množiny V , ktorú budeme nazývať *Delaunayova triangulácia*.

Poznámka: Môže nastať problém, ak štyri (alebo viac) bodov z V sú kocirkulárne, vtedy Delaunayova triangulácia nie je jednoznačne určená - Obrázok 9. Postup pri takomto prípade je, že danú množinu generátorov (pre ktoré platí hore uvedená podmienka) triangulujeme ľubovoľne.



Obrázok 9: Dve rôzne Delaunayove triangulácie množiny.

Konečným počtom neutrálnych preklápaní vieme dostať z jednej Delaunayovej triangulácie druhú [15]. Uvedieme dôležité vlastnosti DT triangulácií v rovine (existujú ich zovšeobecnenia aj vo vyšších dimenziách):

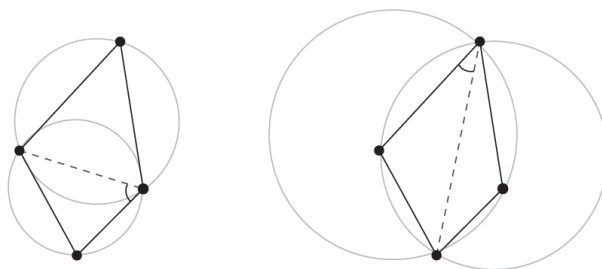
Veta 3.1: (Kritérium prázdneho kruhu) Triangulácia $T(V)$ množiny bodov V v rovine je Delaunayova práve vtedy, ak opísaná kružnica ľubovoľného jej trojuholníka neobsahuje vo svojom vnútri bod z V .

Dôkaz: dôkaz tohto tvrdenia možno nájsť v skriptách [6].

Veta 3.2: Delaunayova triangulácia maximalizuje minimálny uhol v každom trojuholníku ako aj v celej triangulácii.

Kvôli tejto vlastnosti bola preferovaná, lebo generuje najviac rovnakouhlú (equiangular) trianguláciu, ktorá sa dlho považovala za vhodnú pre interpoláciu danej množiny bodov, panovala taká myšlienka, že triangulácie, ktoré obsahujú „úzke“ trojuholníky, nie sú vhodné pre

rekonštrukciu. Kritériá prázdneho kruhu a maximalizácie minimálneho uhla sú ekvivalentné -
 Obrázok 10:



Obrázok 10: Vyhovujúca a nevyhovujúca triangulácia v zmysle vety 3.1, 3.2.

Popísané kritériá sa využívajú na konštrukciu DT, často sú nahradené jednoduchším a rýchlejšim testom lokálnej optimality, kde sa rieši problém MWT vo vnútri striktnie konvexných štvoruholníkov výmenou diagonál. Kvôli špeciálnemu oceňovaniu hrán v dátovo závislých trianguláciách lokálna optimálnosť nie je identická s vlastnosťami z vety 3.1, 3.2. Niektoré existujúce efektívne nástroje na vytváranie Delaunayových triangulácií pomôžu pri vytváraní lokálne optimálnych triangulácií, ale ich výstupy nebudú mať charakteristické vlastnosti DT, okrem aproximácie MWT. Zmena v nasledujúcich algoritmoch je v priradení cien k hranám.

Napriek pomerne malému počtu známych algoritmov pre DDT triangulácie, pre vytváranie LOT triangulácií máme možnosť výberu z troch algoritmov. Asymptoticky najlepšie správanie má Dwyerov algoritmus s $T: O(n \log n)$. Ide o rozdeľuj a panuj (divide & conquer) metódu, ktorej numerická stabilita je otázna v niektorých prípadoch, je problematickejšia aj z hľadiska implementovateľnosti ako ostatné metódy. Očakávaná časová náročnosť je $T: O(n \log \log n)$. Ďalším spôsobom je algoritmus používajúci postupné pridávanie vrcholov, síce zložitosť $T: O(n^2)$ nie je optimálna, ale pre rovnomerne rozložené body ukazuje lineárne správanie. V tomto prípade nie je potrebná počiatočná triangulácia, ale kvôli rýchlej lokalizácii pri pridávaní vrcholov je potrebné používať špeciálne dátové štruktúry, čo zvyšuje pamäťovú náročnosť. Vzniklo veľa modifikácií, presný popis týchto metód a nové vylepšenie z hľadiska časovej a pamäťovej zložitosti možno nájsť v práci *Kolingerovej a Žalika* [21].

Nasledujúci, tretí algoritmus, Lawsonova optimalizácia (často nazývaná aj ako lokálne optimalizačná procedúra alebo preklápací algoritmus) patrí medzi obľúbené nástroje na konštrukciu triangulácií. Je to iteračná procedúra založená na lokálnej optimálnosti hrán, testuje susedné trojuholníky v triangulácii. Pseudokód algoritmu vyzerá nasledovne:

Lawsonova optimalizácia

Vstup: počiatočná triangulácia

Výstup: lokálne optimálna triangulácia - LOT

```
1. {  
2.   while (triangulácia nie je lokálne optimálna) {  
3.     if (hrana e nie je lokálne optimálna)  
4.       vymeň e s alternatívnou diagonálou;  
5.   }  
6. }
```

Je výhodné držať si zoznam hrán, ktoré je potrebné testovať na lokálnu optimalitu. Najprv sú do zoznamu zaradené všetky hrany, odkiaľ po testovaní hrana je odstránená. Ak sa vymení za alternatívnu diagonálu tak do zoznamu sa zaradia hrany, ktoré vytvárajú striktné konvexný štvoruholník, v ktorej výmena diagonál prebehla. V každom iteračnom kroku sa testuje zoznam kandidátnych hrán, proces skončí, ak zoznam je prázdny.

Poznámka: Výsledná triangulácia Lawsonovej optimalizácie je Delaunayova triangulácia, ak oceňovanie hrán vyhovuje kritériu prázdneho kruhu – veta 3.1, ináč hovoríme o Lawsonovej triangulácii.

Veta 3.3: [24] Lawsonova optimalizácia je konečná, maximálny počet preklápaní je $O(n^2)$.

Dôkaz: Vyplýva z toho, že počet triangulácií danej množiny je konečný, a s každou iteráciou sa zmenší váha triangulácie.

Táto rýchla iteratívna metóda nemusí vždy nájsť globálne optimum, ale v tomto prípade aj vďaka dobrej počiatočnej triangulácii možno očakávať nadštandardné správanie. Problém pri lokálne optimálnych trianguláciách je, že sa nevieme rozhodnúť, či dané riešenie je optimálne. Na riešenie tejto otázky by bolo potrebné preskúmať všetky možné triangulácie.

MWT je tiež lokálne optimálna triangulácia. Dôkaz tohto je triviálny, ak by to nebolo tak, bolo by možné vymenením diagonál dosiahnuť trianguláciu s menšou váhou než MWT, čo je spor.

Veta 3.4: [24] Pre ľubovoľnú množinu bodov V platí, že hrana, ktorá sa nachádza v každej lokálne minimálnej triangulácii množiny V , je určite v MWT. Naopak ak platí, že hrana sa nenachádza v žiadnej lokálne minimálnej triangulácii V , potom nemôže patriť do MWT.

Táto veta platí aj pre rovinné aj pre dátovo závislé triangulácie. Tvrdenie priamo vyplýva z lokálnej optimality MWT. Dôsledkom toho je rozdelenie hrán na tri disjunktné množiny: hrany vyskytujúce sa v každej lokálne minimálnej triangulácii, hrany, ktoré nie sú v žiadnej lokálne

minimálnej triangulácii a hrany, ktoré sa vyskytujú len v niektorých lokálne minimálnych trianguláciách. Takto získame doteraz najväčší známy podgraf MWT nazývaný LMT-skeleton.

Pri rovinných trianguláciách je cieľom získať súvislý podgraf MWT, ktorý obsahuje v sebe len také netriangulované oblasti, ktoré sa dajú reprezentovať ako jednoduchý polygón [6]. Jednoduché polygóny v rovine vieme optimálne triangulovať v čase $T: O(n^3)$ Gilbertovým algoritmom, referencia na tento algoritmus je v [25]. LMT skeleton negarantuje vo všeobecnosti tieto predpoklady a táto problematika zostáva otvorená. Pre terénne triangulácie je možné zovšeobecniť Gilbertov algoritmus, ale pre DDT triangulácie to nefunguje.

3.1.2 Greedy triangulácia

Ďalšiu významnú skupinu tvoria algoritmy založené na greedy (pažravá) filozofii vytvárania triangulácií. Definícia greedy triangulácie - ozn. GT - je konštrukčná: usporiadajú sa všetky možné hrany podľa daného kritéria do zoznamu, a z tejto množiny sa pridávajú najlacnejšie také hrany, ktoré majú prázdny prienik s už pridanými hranami. Táto procedúra produkuje trianguláciu, ktorá aproximuje MWT danej množiny bodov.

Okrem tohto klasického ponímania greedy metód sa robili experimenty, keď namiesto hrán boli brané do úvahy trojuholníky a rôzne váhové funkcie, odkaz na tieto experimenty možno nájsť v [24]. Ako výsledok týchto pozorovaní bolo zistené, že klasické greedy metódy (pridávanie hrán) majú lepšie aproximačné správanie. Pseudokód algoritmu vyzerá nasledovne:

Greedy triangulácia

Vstup: množina vrcholov $V \in E^2$
Výstup: greedy triangulácia

```
1. {  
2.   vytvor utriedený zoznam možných hrán podľa ich cenových funkcií;  
3.   while(zoznam nie je prázdny) {  
4.     vyber najlacnejšiu hranu zo zoznamu, a pridaj ju do triangulácie;  
5.     aktualizuj zoznam – vyhoď tie hrany, ktoré sa pretínajú s hranami  
       z triangulácie;  
6.   }  
7. }
```

Bez modifikácií tento algoritmus má zložitosť $T: O(n^3)$ (testovanie prieniku $O(n^2)$ hrán s už pridanými hranami, ktorých môže byť až $O(n)$), ale starostlivou implementáciou sa podarilo dosiahnuť $T: O(n \log n)$. Dobrý prehľad greedy metód možno nájsť v práci Nociara [24]. Nociar objavil aj jednu greedy modifikáciu tzv. double-greedy, ktorá sa javí úspešnejšia ako ostatné úpravy (na úkor zložitosti $T: O(n^5)$, pre praktické využitie príliš vysoká). Hrana sa ohodnotí

globálne v nasledujúcom zmysle: pre danú hranu sa vypočíta triangulácia s obmedzeniami danej množiny, kde ako obmedzenie je braná práve hrana, ktorú chceme ohodnotiť. Double greedy metóda vyprodukuje lepšiu aproximáciu MWT ako GT. Greedy metóda dáva lepšiu aproximáciu MWT než DT.

Veta 3.5: GT je lokálne optimálna triangulácia.

Dôkaz vety 3.5 vyplýva z konštrukcie greedy triangulácie.

Uvedené prístupy je možné uplatniť aj pre terénne triangulácie, utriedenie je potom brané vzhľadom na euklidovskú vzdialenosť vrcholov v 2.5D. Neplatí to ale pre DDT triangulácie.

Tvrdenie 3.1: Neexistuje algoritmus, ktorý vie vo všeobecnosti konštruovať GT pre DDT triangulácie.

Dôkaz: Filozofia greedy prístupu zlyhá na tom, že cenová funkcia je geometricky vyššieho rádu ako komponent, ktorému je priradená. Porušená je vlastnosť z vety 3.5. Dôkaz je konštrukčný, postupuje sa podľa uvedeného algoritmu:

Krok 2.: Vytvor všetky striktne konvexné štvoruholníky z množiny V , ktoré neobsahujú vo svojom vnútri prvok z V . Vyrátaj cenové funkcie ich diagonál.

Krok 4.: Potrebné je pridávanie hrán do triangulácie, možné je postupovať dvomi spôsobmi:

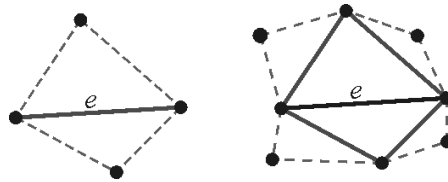
- a) Ak pridáme len diagonálu striktne konvexného štvoruholníka, tak nie je zaručené, že aj hrany, ktoré vytvárajú štvoruholník budú neskôr pridané. Spor s pridaním najlacnejšej hrany.
- b) Ak pridáme okrem diagonály aj hrany vytvárajúce striktne konvexný štvoruholník, tak pre tieto hrany nebude platiť vlastnosť rovinných a terénnych greedy triangulácií, lokálna optimálnosť – spor.

Teda konštrukcia môže zlyhať na štvrtom kroku, len pre veľmi špeciálne vstupné dáta bude vytvorená greedy triangulácia pre dátovo závislý prístup.

Napriek uvedenému tvrdeniu nie je možné úplne zanedbať vzťah DDT a greedy koncepcie. V praxi sa používajú spoločne pri niektorých mesh refinement metódach, kde sa pridávajú postupne vrcholy greedy spôsobom a triangulácia je udržiavaná DDT metódou - [13], [16]. Tieto metódy sú vhodné na získanie aproximácie s cieľom zmenšenia objemu dát.

3.1.3 Look-ahead rozšírenie

Yu a spol. v [38] poskytli tzv. look-ahead (ozn. LA) rozšírenie Lawsonovho algoritmu. Zmena je v prípade, keď hrana e je lokálne optimálna. Vtedy sa vyšetruje lokálna optimalita hrán, ktoré vytvárajú striktne konvexný štvoruholník obsahujúci e ako svoju diagonálu - Obrázok 11.



Obrázok 11: Lawsonova procedúra a jej look-ahead rozšírenie.

Výber vhodnej triangulácie look-ahead štruktúry (ktorá je vytvorená z ôsmich bodov) vytvorenej výmenou diagonál prebieha na základe súčtu cien 13 hrán v danej metrike. Takto dosiahneme globálne optimálnu trianguláciu look-ahead štruktúry. Pseudokód algoritmu vyzerá nasledovne:

Look-ahead triangulácia

Vstup: počiatočná triangulácia
Výstup: look ahead triangulácia

```

1. {
2.   while (zmena váhy triangulácie nie je 0) {
3.     if (ak hrana e nie je lokálne optimálna)
4.       vymeň e s alternatívnou diagonálou;
5.     else
6.       vyrieš lokálnu optimalitu hrán striktné konvexného
         štvoruholníka, ktorá obsahuje e ako svoju diagonálu;
7.   }
8. }
```

Iteračná LA procedúra je konečná lebo, počet triangulácií je konečný, a pri každej iterácii sa zmenší celková váha. Tento algoritmus konverguje rýchlejšie a zvyčajne dosahuje lepšie aproximačné správanie ako jeho predchodca. Globálne optimum nie je garantované.

$$w(\text{MWT}(\mathbf{V})) \leq w(\text{LA}(\mathbf{V})) \leq w(\text{LOT}(\mathbf{V}))$$

V testoch z článku [38] look-ahead rozšírenie lokálnej optimálnosti vyprodukovalo v každej iterácii lacnejšiu trianguláciu než klasická lokálna optimalizácia, vyplýva to z konštrukcie triangulácie. Tiež poznamenali, že niekedy už po prvej iterácii je výsledok dostatočne kvalitný, typ použitia bolo rekonštrukcia obrazu.

Poznámka: Uvedený look-ahead princíp budeme značiť ako look-ahead prvého stupňa.

Generalizácia tejto myšlienky na hlbšie prehľadávanie môže priniesť kvalitnejšiu rekonštrukciu a rýchlejšiu konvergenciu, ale aj väčšiu zložitosť. Aplikovanie look-ahead vyššieho rádu na rovnomerne rozložené dáta nemá veľký praktický význam. V takomto prípade síce rýchlejšie konverguje k riešeniu, ale look-ahead nižšieho rádu s väčším počtom iteračných krokov môže produkovať z hľadiska kvality porovnateľné výsledky.

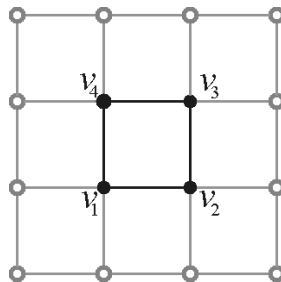
Kvôli spôsobu priradenia cien hranám v DDT nie je možné interpretovať také rozloženie bodov v rovine, kde by cenám hrán zodpovedali vzdialenosti ich koncových bodov v danej

metrike. Metrika musí byť konštruovaná v E^2 . Takéto rozloženie budeme nazývať *optimálnym rozložením*. Na základe skúseností aplikovania predchádzajúcich aproximácií MWT na rekonštrukciu obrazu je možné vyvodiť nasledujúci dôsledok. Ak by sme vedeli pixely rozložiť optimálne v rovine, tak by to bolo najbližšie ku distribúcii rovnomerne rozloženej množiny bodov. Podkladom tohto tvrdenia je pomerne malá rozptýlenosť euklidovských dĺžok hrán v 2D priemete DDT triangulácií. Teda je možné konštatovať, že príliš hlboká úroveň využitia LA stratégie na rovnomerne rozložené konfigurácie bodov nie je nutná na dosiahnutie MWT.

Poznámka: Okrem uvedeného look-ahead prístupu existujú aj iné formy využitia tejto myšlienky. Kolingerová v [18] predstavila aproximáciou planárnej MWT, ktorá skombinuje myšlienku greedy s look-ahead vyhľadávaním pridaných hrán.

3.1.4 DDT na úrovni pixlov

Nasledujúca metóda je stavaná na rekonštrukciu obrazov a nie je možné ju používať na dáta iného charakteru. Rozdelí obraz na štvorce pozostávajúce zo štyroch susedných pixlov, vo vnútri týchto štvorcov sa potom vyrieši problém MWT - Obrázok 12.



Obrázok 12: Základná štruktúra pre DDT na úrovni pixlov.

Triangulácia týchto štvorcov prebieha na základe jednoduchého testu. Bude to diagonála, ktorej diferenciac funkčných hodnôt koncových bodov je menšia, $\min(|f(v_1) - f(v_3)|, |f(v_2) - f(v_4)|)$.

Rozšírením tejto myšlienky je vnímanie digitálneho obrazu ako Markovovho náhodného poľa, teda že funkčná hodnota každého pixelu závisí od funkčných hodnôt susedných pixelov a nezávisí od ostatných. To je predpoklad lokálnej stacionarity, ktorý ale neplatí vo všeobecnosti. Pre prípady, kde sa v obraze vyskytne, hrana pomôže kvalitnejšie rekonštruovať dáta. V zmysle zavedenej štruktúry to znamená zohľadnenie riadenia triangulácií ôsmich susedných štvorcov, pri výbere diagonály. V pseudokóde to vyzerá nasledovne:

DDT na úrovni pixlov

Vstup: digitálny obraz
Výstup: pixel level DDT triangulácia

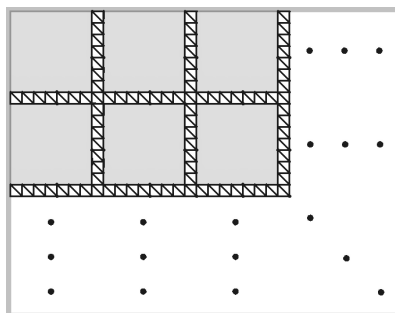
```
1.{
2.    vytvor štruktúru štvorcov;
3.    for(pre všetky štvorce)
4.        trianguluj štvorce optimálne;
5.    for(pre všetky štvorce)
6.        if(riadenie triangulácie okolitých štvorcov je signifikantné
           && riadenie triangulácie skúmaného štvorca je opačné){
7.            vymeň diagonálu;
8.        }
9.}
```

Časová náročnosť je na úrovni bilineárnej interpolácie, čo umožňuje použitie v reálnom čase. Kvalita rekonštrukcie je slabšia než doterajšie DDT metódy, ale ešte stále je nad úrovňou bilineárnej interpolácie. Nejde o dosiahnutie MWT ale o rýchlu realizáciu, presný popis metódy sa nachádza v článku [32]. Konkrétne využite tejto myšlienky pre zlepšenie výstupov z digitálnych kamier možno nájsť v [33].

3.1.5 Rozdelenie na bloky

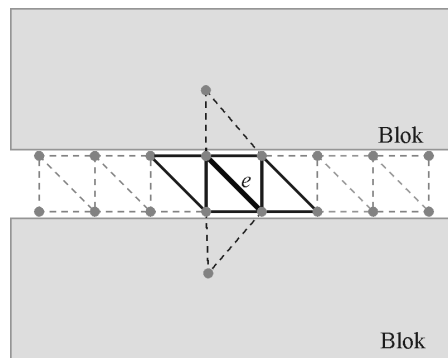
Nasledujúci nový návrh sa snaží skombinovať výhodné stránky predchádzajúcich prístupov. Cieľom bolo vytvoriť takú štruktúru, ktorá umožní reálne použitie DDT triangulácií, a pritom nedegraduje ich rekonštrukčné vlastnosti, ako pri DDT na úrovni pixelov.

Ako už bolo spomenuté v kapitole 3.1.3, euklidovská dĺžka hrán v 2D priemete uvedených triangulácií je málo rozptýlená. Tieto triangulácie majú skôr lokálny charakter, extrémne dlhé hrany sa v nich vyskytujú len výnimočne. Na tomto základe je postavená myšlienka rozdeliť obraz na bloky – obdĺžniky, pričom každý bod musí ležať práve v jednom bloku. Vo vnútri jednotlivých blokov sa vyrieši aproximácia MWT už známymi metódami, alebo sa vygenerujú všetky možnosti a vyberie sa z nich MWT. Problémom je prepojenie jednotlivých blokov. Ako počiatočná štruktúra medzi blokmi bude braná regulárna triangulácia - Obrázok 13



Obrázok 13: Štruktúra segmentovania obrázku na bloky.

Úlohou je prepojiť jednotlivé bloky takým spôsobom, aby vzbudzovali vizuálne príjemný dojem, a pritom by neboli výpočtovo náročné. Na tento účel použijeme jeden look-ahead (prvého stupňa) prechod cez množinu hrán, ktoré nepatria do žiadneho bloku a v počiatočnej (regulárnej) triangulácii majú inú orientáciu ako súradnicové osi. Tento zoznam budeme nazývať zoznamom aktívnych hrán. Ide o diagonály štvorcov, ktoré sa využívajú na prepájanie blokov. Zoberme konkrétnu hranu zo spomínaného zoznamu - Obrázok 14, look-ahead optimalizácia prvého stupňa hrany e nemení ostatné hrany zo zoznamu aktívnych hrán, a prepojí susediace bloky.



Obrázok 14: Look-ahead prvého stupňa hrany e .

Pseudokód algoritmu:

Triangulácia pomocou rozdelenia na blokov

Vstup: digitálny obraz

Výstup: triangulácia

```

1. {
2.   rozdeľ obraz na bloky;
3.   trianguluj jednotlivé bloky;
4.   vytvor regulárnu trianguláciu medzi blokmi;
5.   vytvor zoznam aktívnych hrán;
6.   for (pre hrany zo zoznamu aktívnych hrán)
7.     aplikuj look-ahead krok prvého stupňa;
8. }
```

Veľkosťou a spôsobom triangulácie jednotlivých blokov je možné riadiť výpočtovú zložitosť. Príliš malý blok indikuje horšiu kvalitu, veľké bloky môžu spomaliť výpočet. Rozdelenie na bloky je vhodné na paralelné výpočty. Veľmi praktická je vlastnosť, že jednotlivé bloky môžu byť vyrátané postupne. V takomto prípade je potrebné spraviť „zošívanie“ so susednými blokmi už spomínaným spôsobom. Ak obraz rozdelíme na také veľkosti blokov, ktoré vieme vyrátať v reálnom čase, tak táto metóda môže byť uplatnená v širokej škále aplikácií. Jednotlivé bloky môžeme rôznymi algoritmami natriangulovať, napríklad môžeme určiť prioritu jednotlivých blokov pomocou hranových detektorov.

Uvedený prístup je možné aplikovať len na dáta, ktoré sú organizované do karteziánskej mriežky ako obraz alebo DEM dáta. V iných prípadoch prichádza ku strate rýchleho prepojenia blokov.

3.2 Stochastické metódy

Deterministické metódy negarantujú nájdenie globálneho optima, tento hendikep sa snažia korigovať stochasticky založené optimalizácie. Najväčším problémom pre stochastické metódy je správne nastavenie koeficientov, ktoré riadia správanie náhodných procesov.

3.2.1 Simulované žihanie

Najznámejším stochastickým prístupom pre triangulácie je simulované žihanie (simulated annealing) – ozn. SA [22], [30]. Ide o iteratívnu techniku, ktorá je založená na poznatkoch o priebehu fyzikálnych procesov v prírode. Triangulácia MWT je analógiou dosiahnutia globálne minimálneho energetického stavu kryštálov tekutín, pomocou postupného chladenia. Konverguje rýchlejšie ako metódy, ktoré vždy berú do úvahy len najlepšie riešenia.

Generálne táto metóda je založená na pravdepodobnosti a snaží sa vyhýbať lokálne optimálnym riešeniam, ktoré môžu vzbudzovať dojem globálnej optimality – obeťami takýchto pomýlení sa často stávajú výsledky, ktoré poskytujú deterministické metódy. V každom iteračnom kroku sú akceptované zlepšujúce i zhoršujúce kroky - *krokom* budeme nazývať výmenu diagonál v striktné konvexnom štvoruholníku. Pri každom iteračnom kroku je nastavená hranica možných zlepšujúcich krokov. Zhoršujúce kroky sa akceptujú náhodne a rastúcou iteráciou sa znižuje pravdepodobnosť ich vykonania (toto sa nazýva „chladiaci proces“). Pseudokód algoritmu:

Simulované žihanie

Vstup: počiatočná triangulácia
Výstup: SA triangulácia

```
1. {  
2.   for(k=1; k ≤ ntemp; k++) {  
3.     tA=rkt0;  
4.     for(l=1; l ≤ nlimit; l++)  
5.       while(počet dobrých krokov ≤ glimit) {  
6.         vyber náhodne hranu e z triangulácie;  
7.         if(existuje alternujúca diagonála ku e) {  
8.           if(striktné konvexný štvoruholník, ktorý  
              obsahuje e nie je optimálne triangulovaný) {  
9.             vymeň diagonálu;
```

```

10,          }
11.          else{
12.              náhodný výber čísla  $\varphi$   $0 \leq \varphi \leq 1$ ;
13.              if(  $\varphi \leq e^{-c(e)/t_A}$  )
14.                  vymeň diagonálu;
15.              }
16.          }
17.      }
18.  }
19.}

```

Vysvetlenie parametrov:

- *ntemp* – počet iterácií (v koľkých krokoch je teplota znížená), štandard je okolo 20.
- *nlimit*, *glimit* – počet vykonaných krokov v každej iterácii, počet vykonaných správnych krokov v každej iterácii. Zvyčajne sa volia tieto čísla ako 5 alebo 10 násobok počtu hrán v triangulácii.
- t_0 , t_A – štartovacia teplota (0.1), aktuálna teplota.
- r – rýchlosť chladenia, jeho hodnota je zvyčajne 0.95 alebo 0.9.
- Pod označením terminológiou „dobrý krok“ sa rozumie taká výmena diagonál (alebo aj look-ahead optimalizácia), ktorá zredukuje celkovú váhu triangulácie.

Simulované žihanie je veľmi citlivé na voľbu začiatkových parametrov. Ak sa spraví príliš veľa správnych krokov na začiatku, tak riskujeme, že metóda nájde lokálne optimum. Zvolením štartovacej teploty sa dá nastaviť rýchlosť konvergenzie, pri zvolení rýchlej konvergenzie sa preskúša menej možností, čím sa zvýši pravdepodobnosť, že metóda nájde len lokálne optimum. Na druhej strane pomalá konvergenzia znamená veľkú časovú náročnosť. Vzhľadom na špeciálne rozloženie bodov je rozumné experimentovať s nastaveniami SA, lebo uvedené parametre boli navrhnuté pre všeobecný prípad.

Myšlienka simulovaného žihania je popísaná v [22], [30], kde možno nájsť aj jej použitie pri kompresii obrazu. *Barnes a spol.* v [3] skombinovali simulované žihanie s mesh refinement metódou.

3.2.2 Genetická optimalizácia

Genetická optimalizácia – ozn. GO - ponúka možnosť ako skombinovať rôzne kritériá (jednak optimalizačné metódy, ale aj rôzne cenové funkcie). Je to kombinácia deterministickej a stochastickej metódy, založená na napodobňovaní evolúcie.

Ako prvý krok sa vygeneruje množina triangulácií pomocou doteraz spomenutých algoritmov, táto množina sa v terminológii nazýva úvodná „populácia“. Zvolenie takej úvodnej

generácie triangulácií, ktorá veľmi dobre aproximuje daný problém skrýva v sebe nebezpečie, že nájdeme len lokálne optimum. Rôznorodosť zrýchli konvergenciu riešenia. Ku každému členu vygenerovanej množiny je priradená pravdepodobnosť (podľa toho, ako dobre aproximujú cieľový stav, v našom prípade MWT). V každom iteračnom kroku sa vytvára nová populácia (počet členov v každej generácii počas celého procesu je konštantný) triangulácií, členy sú vybrané z prechádzajúcej generácie podľa ich pravdepodobnostných hodnôt. To spôsobí, že lepšie triangulácie sa tam vyskytujú viackrát a nevhodné sa eliminujú. Binárna operácia „prekríženia“ (crossover) je jednou z výhodných vlastností genetickej optimalizácie. Ako aj názov hovorí, ide o skombinovanie dvoch triangulácií, o výmenu genetickej informácie (náhodne sa vyberajú triangulácie, ktoré sa dostávajú do tejto fázy). Priebeh vyzerá nasledovne: obidve triangulácie sú rozdelené priamkou a potom sa skombinujú časti, ktoré zostali na rôznych stranách po rozdelení. Ak sme mali triangulácie A a B , tak sa náhodnou priamkou rozdelia na A_1 , A_2 , B_1 , B_2 , výsledné triangulácie budú $A_1 \cup B_2$ a $A_2 \cup B_1$. V skutočnosti je táto operácia najviac náročná - $T: O(n \log n)$. Ďalšia operácia ktorá sa slúži na modifikáciu „populácie“ je unárna operácia „mutácie“ - $T: O(n)$. V každej triangulácii sa pre každú hranu s malou pravdepodobnosťou (zvyčajne $p < 0.01$) spraví preklápanie hrán. Ani tento princíp nezaručí nájdenie globálneho optima. Presný popis genetickej optimalizácie možno nájsť v [17], [19].

Genetická optimalizácia

Vstup: množina vrcholov $V \in E^2$
Výstup: GO triangulácia

```

1. {
2.   inicializuj počiatočnú populáciu  $P_0$ ;
3.   inicializuj čas  $T=1$ ;
4.   while(nie je splnená ukončovacia podmienka) {
5.      $T=T+1$ ;
6.     aplikuj operácie mutácie a prekríženia na celú populáciu;
6.     vyber novú generáciu  $P_T$  z  $P_{T-1}$ ;
7.   }
8.   vráť najlepšie riešenie problému;
9. }
```

Ukončovacou podmienkou môže byť určitý počet generácií alebo malá odlišnosť ohodnotenia generácií. Asymptoticky je to lacná triangulácia - $T: O(n \log n)$, ak si vytvorenie počiatočnej populácie nevyžiada vyššiu časovú náročnosť ako $T: O(n \log n)$. Napriek tomu aj pri voľbe lacných triangulácií (napr. DDT na úrovni pixlov) nám zostáva úloha vyriešiť náročnú operáciu „prekríženia“ triangulácií v množstve generácií. Autori odporúčajú 100 generácií po 50

členov populácie. Kvôli týmto musí byť preskúmaných až 5000 triangulácií, čo je obrovské množstvo a napriek obdivuhodným vlastnostiam nedovolí nám praktické použitie tejto metódy.

Poznámka: Voľba jednotlivých operácií môže byť aj iná, dávajúc veľkú pestrosť GO.

3.2.3 Simulované žihanie s využitím look-ahead stratégie

Ako posledný algoritmus v rámci tohto odseku uvedieme novú modifikáciu simulovaného žihania. Ide o použitie look-ahead techniky na zvýšenie efektivity SA. Ak v klasickom algoritme bola hrana lokálne optimálna, tak s určitou pravdepodobnosťou sme túto lokálnu optimalitu porušili výmenou diagonál. Modifikácia spočíva v tom, ak táto výmena nenastane. Vtedy bude na hranu aplikované look-ahead hľadanie optimality. Očakávame takto zvýšenú rýchlosť konverencie a lepšiu aproximáciu MWT. Pseudokód algoritmu sa vo veľkej časti zhoduje so pseudokódom SA, uvedieme len modifikovanú časť, ktorá v SA zodpovedá riadkom 7-16:

Simulované žihanie s využitím look-ahead – SALA

Vstup: počiatočná triangulácia

Výstup: SA s look-ahead trianguláciou

```
...
7.         if(existuje alternujúca diagonála ku e){
8.             if(striktne konvexný štvoruholník, ktorý
               obsahuje e nie je optimálne triangulovaný){
9.                 vymeň diagonálu;
10.            }
11.        else{
12.            náhodný výber čísla  $\varphi$   $0 \leq \varphi \leq 1$ ;
13.            if( $\varphi \leq e^{-c(e)/t_A}$ )
14.                vymeň diagonálu;
15.            else
16.                look-ahead optimalizácia e;
17.        }
18.    }
...
```

Nastavenie parametrov SA s look-ahead je odlišné od spôsobu v SA, lebo má iné správanie. Ďalším parametrom je stupeň look-ahead prístupu. Úlohou zostáva nájsť ich vhodné nastavenie pomocou experimentov. V našom prípade vystačíme aj s LA prvého stupňa, ale pre inak rozmiestnené body môže byť výhodou LA vyššieho stupňa.

Uvedenú modifikáciu je možné uplatniť aj na iné účely ako rekonštrukciu obrazov.

3.3 Alternatívne prístupy

3.3.1 Ko – triangulácia

Existuje ďalšia možnosť ako vyriešiť problém rekonštrukcie farebných obrázkov pomocou tzv. ko-triangulácie v zmysle článku [36]. Základnou myšlienkou je používať aproximáciu pomocou po častiach lineárnych funkcií vo vyšších dimenziách. Pre N dátových množín, ktoré reprezentujú N rôznych D -rozmerných závislých funkcií, ko-triangulácia zostrojí D -rozmerný po častiach lineárny objekt v $D + N$ rozmernom priestore, a N ortogonálnych projekcií tohto objektu dáva dobrú aproximáciu N dátových množín. Takto získaný D -rozmerný lineárny objekt poskytuje aproximáciu pre N rôznych funkcií definovaných na tom istom obore.

V prípade rekonštrukcie obrazu na rovinných dátach máme zadefinované tri nezávislé funkcie (farebné informácie). V 5D priestore sa zostrojí 2D po častiach lineárna funkcia, tak že ortogonálne projekcie do tých súradnicových osí, ktoré nesú farebnú informáciu, sú trianguláciami. Výsledky neboli relevantné (pre účely rekonštrukcie obrazov), aj preto lebo autori nepoužívali dátovo závislé metódy, ďalej sa touto myšlienkou nebudeme zaoberať.

3.3.2 Vrcholovo založené ohodnotenie

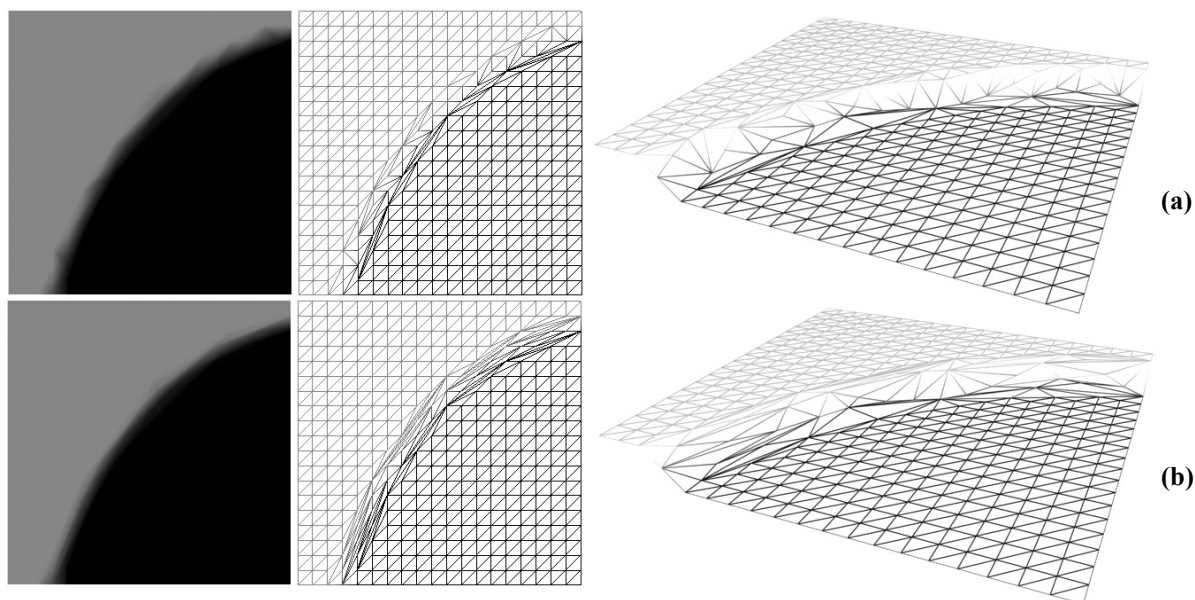
Myšlienku priradovania cien hranám je možné ďalej rozvíjať na ohodnotenie vrcholov. Brown v [5] ukázal metódu, kde vrcholom priradil sumu cien incidentných hrán (alebo sumu štvorcov ich cien). Nevýhodou tohto prístupu je problém s konštrukciou cenových funkcií, ktorá nie je taká intuitívna ako u hranovo založených DDT. Ďalším dôvodom nevyužitia tejto metódy je, že pri rekonštrukcii obrazu primárnym cieľom je rekonštruovať hrany, na čo je vhodnejší princíp ohodnotenia hrán. Efektívne využitie je možné uplatňovať na rekonštrukciu DEM dát.

Princíp získania LOT triangulácie pre vrcholovo založené DDT možno nájsť v [5] a je analógiou Lawsonovej optimalizácie pre DDT. Takto je možné vygenerovať všetky hranovo založené LOT triangulácie, ktoré používajú normu l_1 alebo l_2 , a zároveň vzniknú ďalšie, nové možnosti priradovania cenových funkcií. Napríklad Delaunayova triangulácia je vytvorená, ak za cenu vrchola je braný súčet Sobolevovej semi-normy¹ trojuholníkov v 2.5D obsahujúcich daný vrchol.

¹ Sobolevova semi-norma trojuholníka v DDT je plocha trojuholníka v xy priemete, krát veľkosť gradientu interpolačnej plochy trojuholníka v DDT interpolácii [27].

3.3.3 Quasi-DDT

Nasledujúci nový návrh vytvára novú skupinu triangulačných metód – pomenovanú quasi dátovo závislé triangulácie. Základná idea spočíva v zmene chápania optimálnej triangulácie striktné konvexných štvoruholníkov. Namiesto uvažovania ceny piatich hrán (vytvárajúce hrany a diagonála) je do úvahy braná len cena diagonály. Teda testovanie lokálnej optimálnosti hrany e prebieha na základe uvažovania ceny e a jej alternatívnej hrany. Takáto výmena diagonál skrýva v sebe nebezpečenstvo, že celková váha triangulácie vzrastie. Táto zmena sa premietne do všetkých metód z odseku 3.1 a 3.2, zmenia sa ich vlastnosti, poklesne miera aproximácie MWT, zníži sa efektívnosť heuristik. Napriek uvedeným negatívnym vlastnostiam majú aj svoje pozitívne stránky, ktoré vynikajú v rekonštrukcii obrázkov. V oblastiach, kde sa vyskytujú v obrazoch hrany, vytvárajú priaznivejšie výsledky ako klasické DDT metódy. Ako príklad uvedieme porovnanie medzi LOT a Quasi-LOT - Obrázok 15.



Obrázok 15: Rekonštrukcia hrany pomocou (a) LOT, (b) Quasi-LOT metód pri použití cenovej funkcie SCF.

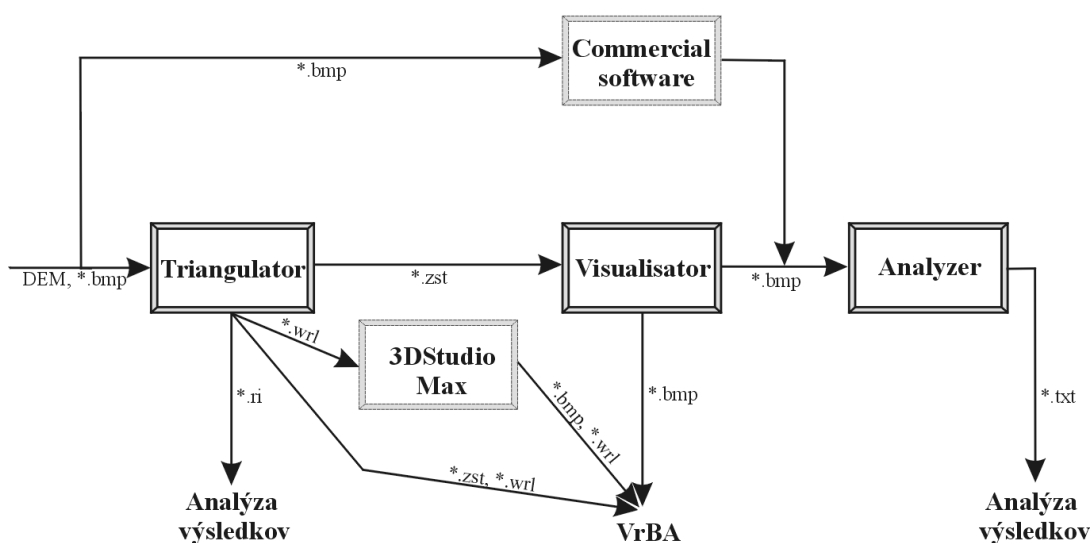
Lokálne optimálna triangulácia v oblasti hrán vytvára tzv. „dvojité hrany“, medzi ktorými vygeneruje vrstvu trojuholníkov, ktoré slúžia na rekonštrukciu hladkých zmien cez hrany. Z teoretického hľadiska je to správny výsledok (lebo snaží vytvárať adekvátny farebný prechod cez hrany), ale práve táto oblasť obsahuje mnoho artefaktov. V prípade Quasi-LOT je vytvorená len jedna hrana a takto je zabránený vznik artefaktov.

Z praktického hľadiska ide o veľmi významnú skupinu metód, ktorá poskytuje alternatívu ku popísaným triangulačným prístupom. Pri rekonštrukcii vytvára artefakty iného charakteru ako klasické DDT metódy a takto v situáciách, kde uvedené metódy vytvárajú nepriaznivé výsledky,

môžu priniesť kvalitnejšiu rekonštrukciu. Asymptotická zložitosť zostáva na úrovni DDT metód. Inšpirácia k týmto myšlienkam je čerpaná z chýb zo zdrojového kódu od *Sederberga* [31].

4 Popis softvérového projektu

Implementácia je rozložená do troch softvérových nástrojov, ktoré boli vyvinuté pod Borland C++ Builder 5.0 pre platformu Microsoft Windows. Tieto aplikácie poskytujú solídne riešenia problematiky, ale existujú možnosti pre ďalšie zvýšenie ich efektívnosti. Vzťah medzi softvérovými nástrojmi je znázornený na obrázku - Obrázok 16.



Obrázok 16: Postup spracovania a prepojenie na projekt Virtual Bratislava.

Úloha jednotlivých nástrojov:

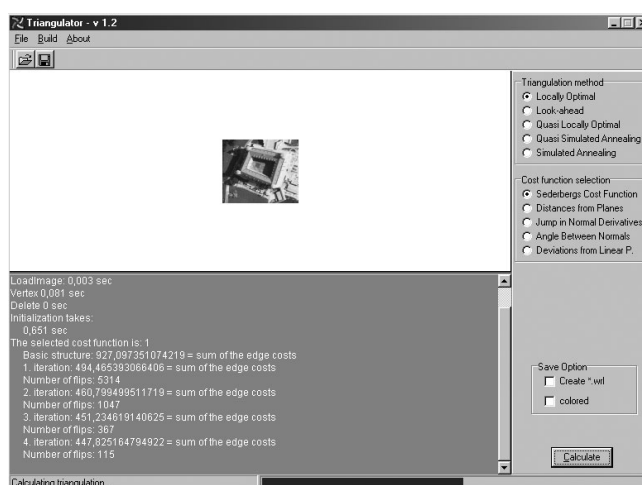
- *Triangulator* je hlavná časť softvérového projektu, ako vstup dostane obraz vo formáte *.bmp a vygeneruje DDT trianguláciu ako výstup.
- Úlohou časti *Visualisator* je vytváranie rekonštruovaných obrázkov na základe natriangulovaných dát, ktoré dostane z komponentu *Triangulator*, výstupom je obrázok vo formáte *.bmp. Využíva OpenGL na podporu hardwareového zrýchlenia renderovania veľkého počtu trojuholníkov, až na výnimky, keď využíva farebný priestor $L*u*v^*$.
- *Analyzer* porovnáva obrázky formátu *.bmp z hľadiska vizuálnej kvality.
- *Commercial software* značí nástroje slúžiace na rekonštrukcie obrazov. Výsledky sa porovnávajú s DDT metódami.
- *3DStudio Max* slúži na vizualizáciu výškových máp.

Vysvetlenie ku skratkám z ilustrácie Obrázok 16:

- *.bmp – značí bitmapové obrázky.
- DEM – digitálna výšková mapa, pre tieto účely bol komponent *Triangulator* špeciálne upravený.
- *.ri – textový súbor, obsahujúci nasledujúce informácie: váha triangulácie a počet výmen diagonál (flip) pri jednotlivých iteráciách, časová náročnosť.
- *.txt – informácie o kvalite porovnaných obrázkov.
- *.wrl – VRML (Virtual Reality Modelling Language) súbor na ukladanie natriangulovaných dát ako výškové mapy.
- *.zst – textový súbor, slúžiaci na ukladanie štruktúry triangulácie.

4.1 *Triangulator*

Najdôležitejšou časťou softvérového projektu je *Triangulator* – Obrázok 17. V postupe spracovania časovo najnáročnejšie výpočty prebiehajú v tomto programe. Implikuje to potrebu navrhnutia efektívnych riešení, a voľbu vhodnej dátovej štruktúry.



Obrázok 17: Softvérový nástroj *Triangulator*.

Pri návrhu sa rozhodovalo medzi dvoma alternatívami. K dispozícii bol softvér využívajúci DAG (directed acyclic graph) štruktúru od *Kolingerovej* [20], ktorá umožňuje riešiť DDT triangulácie pre ľubovoľne rozložené dáta. Na druhej strane dátová štruktúra *Sederberga* [31] vykazovala oveľa rýchlejší priebeh triangulácií na úkor špeciálnej požiadavky na vstupnú množinu bodov (musia byť usporiadané do karteziánskej mriežky). Ďalšou požiadavkou bola ľahká implementovateľnosť algoritmu IPA. Takto vznikol náš návrh na dátovú štruktúru, ktorá

vykazuje adekvátnu rýchlosť a pomerne ľahkú implementovateľnosť existujúcich a navrhnutých metód. Ide o modifikáciu dátovej štruktúry *Sederberga*.

Hlavné triedy dátovej štruktúry:

```
class Vertex{
    public:
        PointF P;
        float v;
        Color color;
        MyList edgeList;
        methods ...
};

class Edge{
    public:
        PointF *p1, *p2, *pA1, *pA2;
        Plane plane1, plane2;
        float cost;
        methods ...
};
```

Každý pixel vstupného obrazu predstavuje jednu premennú typu *Vertex*, ktorý si pamätá pozíciu (*P*); farebnú informáciu (*color*); z súradnice vrcholov (*v*) a zoznam hrán (*edgeList*). Hranové zoznamy typu *MyList* sú organizované ako jednosmerný spájaný zoznam a obsahujú prvky typu *Edge*. Dátový typ *Edge* obsahuje: smerníky na body striktne konvexného štvoruholníka, ktorý obsahuje danú hranu ako diagonálu (**p1, *p2, *pA1, *pA2*); roviny, ktoré reprezentujú trojuholníky obsahujúce danú hranu (*plane1, plane2*); cenové ohodnotenie hrany (*cost*).

Celková triangulácia je hranovo reprezentovaná. Namiesto jedného zoznamu hrán je použitých *n* zoznamov, kde *n* je počet pixelov. Geometrická pozícia vrcholov je zhodná s indexáciou dvojrozmerného pola vrcholov, čo prinesie ďalšie výhody. Adresa zoznamu do ktorej musí byť hrana zaradená je vyrátaná pomocou funkcie *Localize* na základe koncových vrcholov hrany:

```
PointF *Localize(PointF *A, PointF *B){
    if(A->x < B->x)
        return A;
    if(A->x == B->x && A->y < B->y)
        return A;
    return B;
}
```

Po skončení výpočtov je dátová štruktúra prevedená z hranovej do trojuholníkovej reprezentácie, ktorá je potrebná kvôli prevzorkovaniu v programe *Visualisator*. Táto operácia je realizovaná pomocou jediného prechodu cez všetky zoznamy s využitím vlastnosti: každá hrana, ktorá netvorí konvexný obal triangulácie je obsiahnutá práve v dvoch trojuholníkoch.

Uloženie vo forme výškových máp je vyriešené pomocou VRML cez uzol *IndexedFaceSet*. Ďalším výstupom je vlastný formát **.zst* - textový súbor, usporiadaný nasledovne:

int num – počet trojuholníkov
 original.bmp – relativná cesta ku originálnemu obrázku formátu *.bmp
 zoznam trojuholníkov:
 A.x A.y B.x B.y C.x C.y – x a y sú súradnice vrcholov trojuholníka ABC, orientované proti smeru hodinových ručičiek - CCW

Ukážka zo súboru logo.zst:

```
13832
logo.bmp
0 0 1 0 1 1
0 0 1 1 0 1
.....
```

Výhoda formátu *.zst je menšia veľkosť ako v prípade *.wrl. V budúcnosti je plánovaný prechod do binárneho formátu, čo prinesie zmenšenie veľkosti a rýchlejšie načítanie a zápis súboru.

Poznámka: Ako ďalšie možné zrýchlenie výpočtu by bolo využívanie binárnych vyhľadávacích stromov. Uloženie do zoznamu `MyList` má zložitosť $O(1)$, vyhľadanie a zmazanie $O(n)$, pri binárnych stromoch sa tieto časy rovnajú $O(n \log n)$. Vyhľadávanie je častejšie používanou operáciou v *Triangulatore* ako uloženie a zmazanie, na druhej strane priemerná veľkosť zoznamov je len okolo 4 prvkov.

Význam položiek v programe:

Submenu File:

Open – natiahne obrázok formátu *.bmp. Prístupné aj cez: .

Save – uloží triangulované dáta do *.zst formátu (prípadne aj do formátu *.wrl) a informácie o priebehu rekonštrukcie do formátu *.ri. Prístupné aj cez: .

AutoSave – prepínač automatického uloženia dát. Po vyrátaní triangulácie si automaticky uloží dáta do adresára odkiaľ natiahol obrázok.

Exit – ukončí beh programu.

Submenu Build:

All possibilities – vyráta triangulácie s kombinovaním všetkých nastavení (cenových funkcií a metód).

Submenu About:

About – zobrazí informácie o programe.

Položka Save Option:

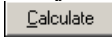
create *.wrl – ak je zapnutá táto položka, tak pri uložení triangulovaných dát okrem *.zst je uložená aj výšková mapa vo formáte *.wrl.

colored – výšková mapa uložená s farebnou informáciou (pri zapnutí) alebo bez nej.

Ďalšie položky:

Triangulation method – umožní výber metódy na základe ktorej bude vyrátaná triangulácia.

Cost function selection – výber cenovej funkcie.

 – tlačidlo slúžiace na spustenie výpočtu triangulácie.

4.2 Visualisator

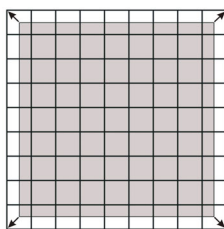
Úlohou programu *Visualisator* – Obrázok 18 – je zobrazovať triangulované dáta čo najefektívnejšie pomocou hardwareového zrýchlenia cez OpenGL. Na optimalizáciu sú používané rozšírenia tohto grafického systému pre indexový prístup ku dátam (GL_VERTEX_POINTER), ktoré sú uložené do pola (GL_VERTEX_ARRAY). Takto je veľkosť dát zhruba polovičná ako pri klasickom prístupe. Ďalším prínosom v procese zmenšenia veľkosti dát by bolo použitie trojuholníkových pásov (triangle stripes) [34]. Tento problém nie je triviálnou záležitosťou, a kvôli tomu sa s touto možnosťou nezaoberalo.



Obrázok 18: Softvérový nástroj *Visualisator*.

Ďalšie zrýchlenie je interpolácia farieb medzi vrcholmi trojuholníkov v xy rovine a nie v 2.5D. Výpočet farebnej informácie pri prevzorkovaní závisí od pomeru vzdialeností od vrcholov, a nie od veľkosti týchto vzdialeností. Kvôli tomu stačí interpolovať s Gouraudovým tieňovaním v xy rovine. Toto znamená rýchlejší rendering a menšie množstvo dát, ktoré musia byť prenesené cez zbernice. Ak interpolácia pri prevzorkovaní nemá lineárny charakter, uvedené zjednodušenie nie je možné. Aktuálny výkon grafických kariet si dovoľuje zobrazovať viac ako 80 miliónov trojuholníkov za sekundu (zavedenie PCI-X zberníc bude indikovať ďalší rast výkonu grafických kariet). Teda manipulácia s obrázkami udržiavanými v natriangulovanej štruktúre je možná v reálnom čase.

V softvéri *Triangulator* sa pracuje so stredmi jednotlivých pixlov, ktoré sú brané ako vrcholy, teda ako body v geometrickom zmysle. V skutočnosti je pixel ale dvojrozmerný objekt, ktorý má svoju plochu. Pri bodovej reprezentácii sa pracuje s menšou oblasťou - Obrázok 19 (vyznačené sivou farbou) – ako pri plošnej.



Obrázok 19: Problém plošnej a bodovej reprezentácie pixla.

Ako riešenie problematiky môžu byť pridané okrajové vrcholy, a na rozšírenú štruktúru sa aplikuje triangulácia. Negatívny dopad takéhoto prístupu je možné zasahovanie do štruktúry triangulácie aj na iných miestach ako sú okraje. V snahe dodržiavania čo najkorektnejšieho prístupu je problém riešenia bez pridaných okrajových vrcholov, je v okrajových oblastiach braná farba pozadia. Pri porovnávaní s perceptuálnymi metrikami sa tento fakt berie do úvahy a okrajové oblasti sa neporovnávajú.

Poznámka: Pri uložení rekonštruovaných obrázkov sa pracuje pomocou frame-buffera, čo určí hornú hranicu veľkosti uložených obrázkov. Veľkosť frame-buffera sa rovná rozlíšeniu obrazovky.

Význam položiek v programe:

Submenu File:

Open – natiahne triangulovaný súbor formátu *.zst. Prístupné aj cez: .

Save – uloží prevzorkovaný obrázok do *.bmp formátu. Prístupné aj cez: .

Close – ukončí beh programu.

Submenu View:

Redraw – prekreslí scénu.

Reset – vráti nastavenia do pôvodného stavu.

Fill mode – zapne vyplňovací mód (Gouraudovo tieňovanie) pri vykresľovaní trojuholníkov. Prístupné aj cez: .

Line mode – zapne hranový mód pri zobrazení- zobrazené sú len hrany triangulácie. Prístupné aj cez: .

Artificial color – farebná informácia z bitmapy je nahradená umelou farbou. Prístupné aj cez: .

Own color – scéna je zobrazená s využitím farebnej informácie. Prístupné aj cez: .

Background color – zobrazí dialógové okno na nastavenie farby pozadia.

Submenu About:

About – zobrazí informácie o programe.

Panel Navigator:

 – slúži na nastavenie miery zmenšovania, zväčšovania. Prístupné cez tlačidlá +,- a cez koliesko myši.

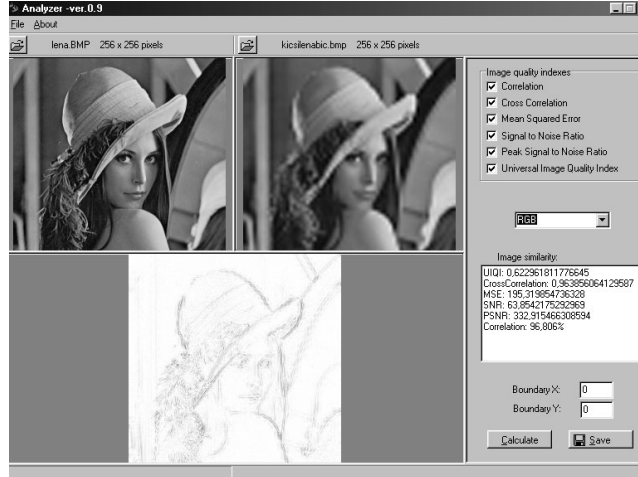
Položka Save Options:

for error measure – uložený obrázok bude (z geometrického hľadiska) vhodný pre porovnanie s perceptuálnymi metrikami.

normal – obrázok bude uložený bez okrajov (ale geometrické umiestnenie pixlov nie je korektné)

4.3 Analyzer

Analyzer – Obrázok 20 – poskytuje porovnávanie pomocou perceptuálnych metrík [7], [35] a vytvára rozdielové obrazy. Spoločná charakteristika použitých porovnávacích prostriedkov: sú matematicky založené, explicitne nevyužívajú vlastnosti HVS, sú nezávislé na podmienkach pozorovania.



Obrázok 20: Softvérový nástroj *Analyzer*.

Matematická definícia použitých perceptuálnych metrík je nasledovná:

Korelácia (C):
$$C = 1 - \frac{\sum_{i,j} |x_{ij} - y_{ij}|}{255 \cdot N}.$$

Křížová korelácia (CC):
$$CC = \left| \frac{\sum_{i,j} x_{ij} y_{ij} - N \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{(\sum_{i,j} x_{ij}^2 - N \bar{x}^2)(\sum_{i,j} y_{ij}^2 - N \bar{y}^2)}} \right|,$$

kde $\bar{x}$ a $\bar{y}$ sú stredné hodnoty:
$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i,j} x_{ij}, \quad \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i,j} y_{ij}.$$

Univerzálny koeficient kvality obrazu (UIQI):
$$Q = \frac{4\sigma_{xy}\bar{x}\bar{y}}{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)},$$

kde $\sigma_x^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i,j} (x_{ij} - \bar{x})^2$, $\sigma_y^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i,j} (y_{ij} - \bar{y})^2$, $\sigma_{xy} = \frac{1}{N-1} \sum_{i,j} (x_{ij} - \bar{x})(y_{ij} - \bar{y})$.

Stredná kvadratická odchýlka (MSE):
$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{i,j} (y_{ij} - x_{ij})^2.$$

Odstup signál-šum (SNR):
$$SNR = \frac{1}{N \cdot MSE} \sum_{i,j} x_{ij}^2.$$

Vrcholový odstup signál-šum (PSNR)
$$PSNR = \frac{1}{MSE} \cdot 255^2.$$

N značí počet pixelov v obrázku, x_{ij} a y_{ij} sú farebné informácie pixelov z originálneho a z rekonštruovaného obrazu.

Význam položiek v programe:

Submenu File:

Open Image1 – otvorí obrázok formátu *.bmp na porovnávanie (originál).

Open Image2 – otvorí obrázok formátu *.bmp na porovnávanie (rekonštruovaný).

Save – uloží rozdielový obrázok. Prístupné aj cez:  Save .

Exit – ukončí beh programu.

Submenu About:

About – zobrazí informácie o programe.

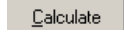
Ďalšie položky:

Image quality indexes – nastavenie, ktoré perceptuálne metriky sa majú vyčíslovať.

 – nastavenie pre výpočet rozdielových obrázkov, výber zobrazenia rozdielu v zložkách R, G, B, RGB.

Boundary X:  – nastavenie počtu pixelov (od okraja obrázkov v horizontálnom smere), ktoré sú vynechané pri vyrátaní perceptuálnych metrík.

Boundary Y:  – nastavenie počtu pixelov (od okraja obrázkov vo vertikálnom smere), ktoré sú vynechané pri vyrátaní perceptuálnych metrík.

 – tlačidlo slúžiace na spustenie výpočtov porovnávania.

5 Analýza výsledkov

Táto kapitola obsahuje porovnávanie výsledkov z hľadiska vizuálnej kvality, podľa miery aproximácie MWT a rýchlosti výpočtov. Poskytuje aj analýzu vzniknutých artefaktov.

5.1 Aplikácia DDT na rekonštrukcie obrazov

Charakteristika porovnávacích kritérií

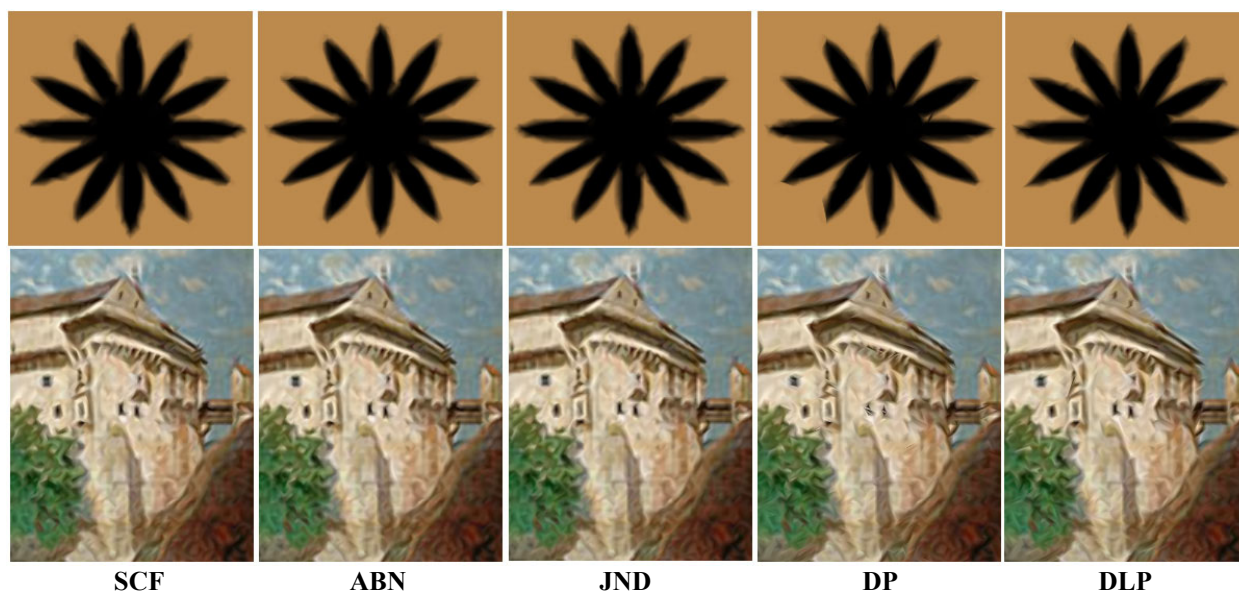
Snahou tejto práce bolo aj porovnávanie výsledkov čo najobjektívnejšie v porovnaní s ostatnými prácami. Autori doterajších porovnávaní na tento účel použili perceptuálne metriky, krížovú koreláciu a svoj HVS.

Zvolili sme použitie rôznych perceptuálnych metrík z článkov [7], [35], popísaných v odseku 4.3. Hlavným nedostatkom použitia perceptuálnych metrík je nutnosť zhody veľkostí porovnaných obrazov. Najprv musí byť obraz prevzorkovaný (v tomto prípade to znamená zmenšenie), potom zväčšený naspäť na veľkosť originálneho obrazu pomocou uvedených rekonštrukčných techník. Výber metódy pre prvý krok, teda pre zmenšenie, znamená problém, lebo výsledok druhej fázy bude závisieť od tohto rozhodnutia. Pri minifikácii táto závislosť nie je až taká signifikantná ako pri magnifikácii, pre tento účel bola preto vybraná bilinéarna interpolácia.

Na odstránenie uvedeného problému môžu byť použité feature-based metódy [4]. Veľkosť porovnaných obrazov nemusí korešpondovať a takto je vynechaný krok, ktorý by výsledky skreslil. Testovanie s feature-based metódami je plánované v budúcnosti.

Analýza cenových funkcií

Snahou bolo potvrdenie výsledkov z [38]² o prevahe SCF nad ostatnými cenovými funkciami. Dospeli sme k tomu názoru, že číselne nie je možné preukázať jasnú prevahu SCF nad ostatnými cenovými funkciami, nájdenie kontrapríkladov v tejto oblasti nie je ťažkou úlohou. Ak sa vo výslednom obraze prejavujú artefakty, je vhodné zvoliť inú cenovú funkciu. Na obrázku – Obrázok 21 – sú ukážky cenových funkcií popísané v odseku 2.2, triangulované pomocou metódy LOT.



Obrázok 21: Porovnanie účinnosti cenových funkcií pri 500% a 300% magnifikácii.

Vizuálna kvalita výsledkov jednotlivých cenových funkcií je adekvátne a veľmi podobná. Najlepší subjektívny dojem vzbudilo oceňovanie na základe SCF. Tabuľka 2 a Tabuľka 2 obsahuje hodnoty korelácií medzi výsledkami z obrazu - Obrázok 21:

	SCF	ABN	JND	DP	DLP
SCF	100	99,718	99,769	99,616	99,68
ABN	99,718	100	99,72	99,638	99,672
JND	99,769	99,72	100	99,636	99,687
DP	99,616	99,638	99,636	100	99,712
DLP	99,68	99,672	99,687	99,712	100

Tabuľka 1: Korelácie medzi výsledkami rôznych cenových funkcií.

² Pod výsledkom testovania je myslený výsledok z vizuálneho porovnania na základe autorov HVS.

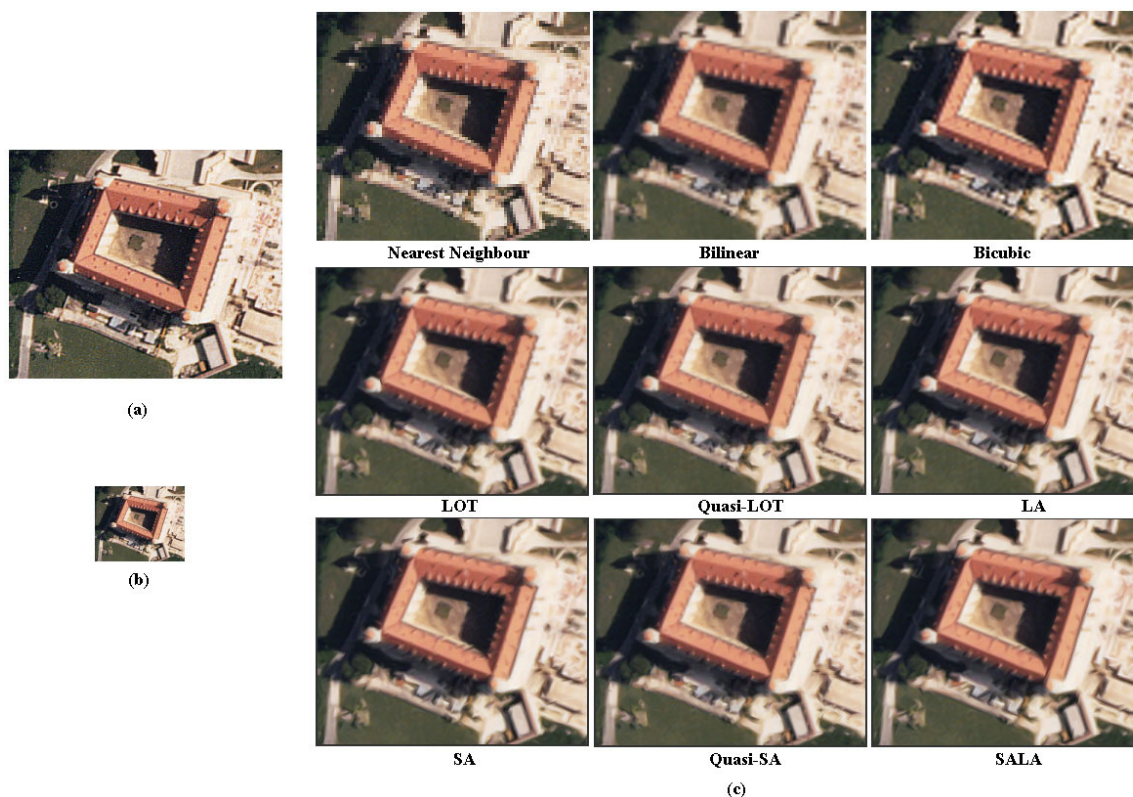
	SCF	ABN	JND	DP	DLP
SCF	100	99,631	99,413	99,18	99,94
ABN	99,631	100	99,553	99,9	99,157
JND	99,413	99,553	100	99,101	99,325
DP	99,18	99,9	99,101	100	99,214
DLP	99,94	99,157	99,214	99,325	100

Tabuľka 2: Korelácie medzi výsledkami rôznych cenových funkcií.

V tabuľkách - Tabuľka 1, Tabuľka 2 - všetky hodnoty sú nad úrovňou 99%. Podľa týchto testov nie je možné si vytvoriť názor, na základe ktorého by sa dali členiť uvedené cenové funkcie do skupín. Počas testovania v ďalších úvahách sa pracovalo predvážne pomocou SCF. Môžeme to považovať za korektné, nepodarilo sa síce ukázať prevahu tejto cenovej funkcie, ale ani opačné tvrdenie sa nepotvrdilo.

Porovnanie medzi DDT a komerčne používanými interpolačnými metódami

Veľmi dôležitou časťou výsledkov sú merania kvality medzi DDT a ostatnými rekonštrukčnými metódami. Boli porovnané DDT metódy proti interpolácii pomocou najbližšieho suseda, bilineárnej a bikubickej interpolácie. Výsledky sú zobrazené na obrázku - Obrázok 22.



Obrázok 22: (a) originálny obraz, (b) zmenšenie originálu, (c) rekonštrukcia pri 304% zväčšení s rôznymi metódami.

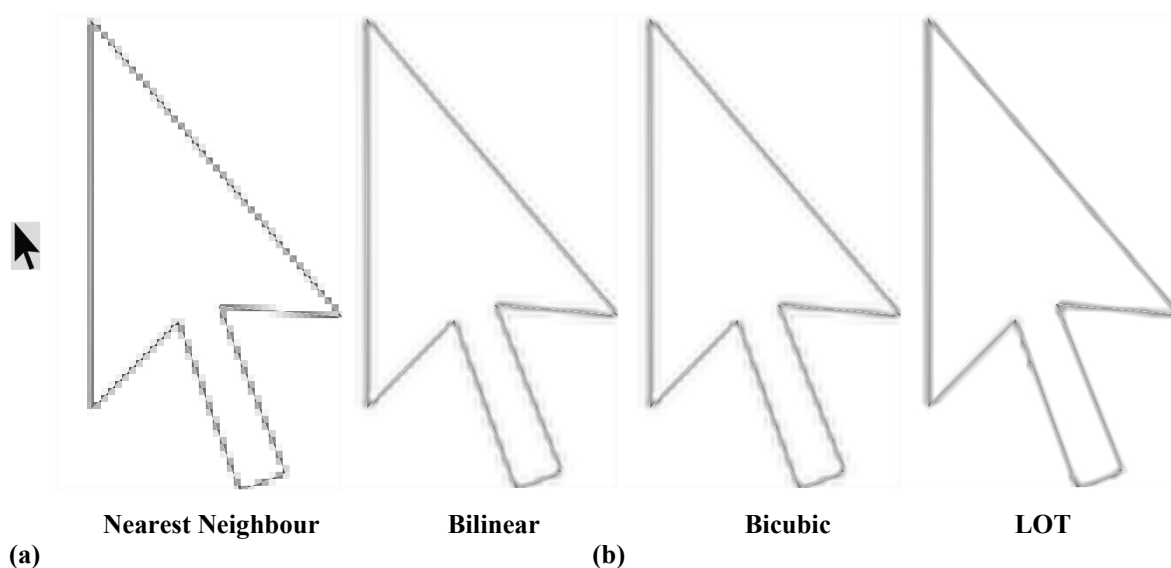
Získané obrázky boli porovnané pomocou perceptuálnych metrík, výsledky sú uvedené v tabuľke - Tabuľka 3. V prvých troch riadkoch sú interpolácie, v ďalších štyroch DDT metódy.

	C	CC	MSE	SNR	PSNR	UIQI
Nearest Neighbour	94,157	0,94609	533,67181	37,82958	121,84454	0,51983
Bilinear	94,406	0,95753	426,64487	47,3194	152,41013	0,52532
Bicubic	94,734	0,96224	375,47754	53,76775	173,17947	0,56977
LOT	94,655	0,9603	396,6821	50,8936	163,9222	0,54845
QLOT	94,615	0,95866	410,98987	49,12185	158,21558	0,53664
SA	94,646	0,9603	396,70306	50,89091	163,91353	0,54414
QSA	94,588	0,95887	409,97525	49,24341	158,60713	0,53114
SALA	94,672	0,96063	392,74142	51,40426	165,56696	0,54716
LA	94,673	0,96082	391,61212	51,55249	166,0444	0,54779

Tabuľka 3: Porovnanie kvality jednotlivých rekonštrukčných metód.

Okrem *MSE*, vyššia hodnota jednotlivých porovnávacích kritérií značí kvalitnejšiu rekonštrukciu. V prípade *MSE* nižšia hodnota zodpovedá kvalitnejšiemu výsledku. Ako vidno z výsledkov, rozdiely sú malé. Bikubická rekonštrukcia vykazuje lepšie výsledky z hľadiska použitých perceptuálnych metrík. Porovnanie C^1 spojitého prístupu s C^0 nie je korektné, v tomto prípade by bolo korektné porovnať s C^1 spojitou metódou, ktorá využíva trianguláciu ako základné štruktúrovanie. Výsledky závisia aj od typu testovaných obrazov (miera zašumenia, miera štruktúrovanosti obsahu obrazu atď.), ako aj od miery zväčšenia. Pre iné testovacie obrazy sme tiež dosiahli podobné výsledky s minimálnymi rozdielmi. Platí, čím väčšia je miera magnifikácie, tým je výraznejšia prevaha DDT metód nad ostatnými.

Rozdielové obrazy dávajú ďalšie informácie, ktoré viacej poukazujú na rozdiely medzi rekonštrukčnými metódami. Na obrázku - Obrázok 23 – sú demonštrované rekonštrukčné chyby jednotlivých prístupov. V komerčne používaných metódach je distribúcia chyby pre HVS viac rušivá ako v prípade DDT rekonštrukcie. Výskyt artefaktov je aj pri triangulačných prístupoch, len sú menej systematicky usporiadané ako pri ostatných metódach, a tak generujú prirodzenejšie výsledky.



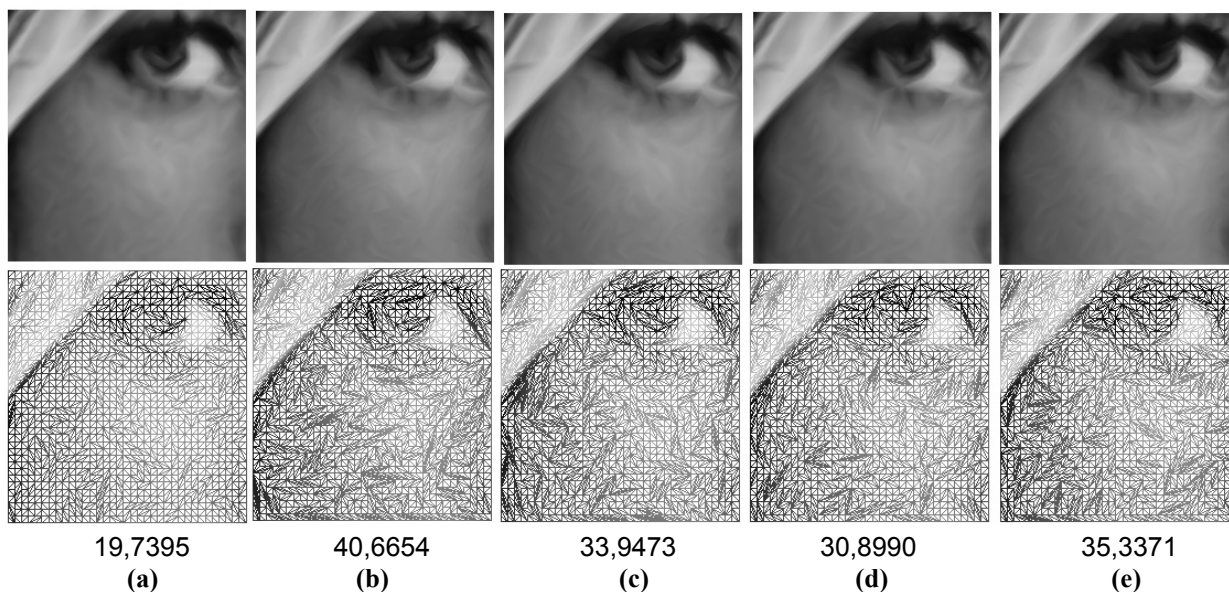
Obrázok 23: Analýza rozdielových obrazov. (a) zmenšený obrázok, (b) rozdielové obrázky.

Rozdielový obraz LOT metódy neobsahuje osovo orientované štruktúry - štvorce, ktoré výrazne znižujú vizuálnu kvalitu. V oblastiach hrán je vytvorená vizuálne príjemná rekonštrukcia.

DDT metódam nevyhovujú zašumené obrazy, v takýchto prípadoch je pravdepodobnosť vzniku rekonštrukčných artefaktov oveľa vyššia (lebo zvyrazňujú aj šum). Veľmi dobré výsledky sú dosiahnuté pre obsahovo štruktúrované obrazy, kde sa vyskytuje množstvo hrán, DDT metódy tu vytvárajú lepšie výsledky ako klasické prístupy. Bol pokus o spracovanie zašumených obrazov pomocou filtračných techník. Pred výpočtom triangulácie sme aplikovali filter na odstránenie šumu. Pri prevzorkovní pochádzala farebná informácia z originálneho obrazu. Takto sa dosiahlo, že šum sa nezvýrazňoval. Hlavným nedostatkom takéhoto prístupu sú neadekvátne zmeny spôsobené filtrovaním aj v oblastiach, kde by sme potrebovali zachovať pôvodnú informáciu. Pixlové posuny farebných informácií v originálnej veľkosti majú nepredvídateľné dôsledky pri zväčšovaní. Ak to nastane v hranovej oblasti, rekonštruované hrany v triangulácii budú posunuté od hrán zodpovedajúcich farebnej informácii, a vzniknú neželané chyby.

Vizuálna kvalita stochastických procesov

Stochastické prístupy pre účely rekonštrukcie obrazov nevyhovujú. Zhoršujúce kroky vytvoria v štruktúre triangulácie také nezvratné zmeny, ktoré sú z hľadiska vizuálnej kvality neakceptovateľné. V oblastiach kde sa nevyskytujú hrany (napríklad jemné farbené prechody) by optimálnym riešením (z hľadiska vizuálnej kvality) bola triangulácia blízka ku regulárnej triangulácii. Tu stochastické algoritmy vytvoria „dlhé a úzke“ trojuholníky, ktoré sa postupom optimalizácie napravia nesprávne - Obrázok 24 (kvôli porovnaniu je uvedená aj LOT).

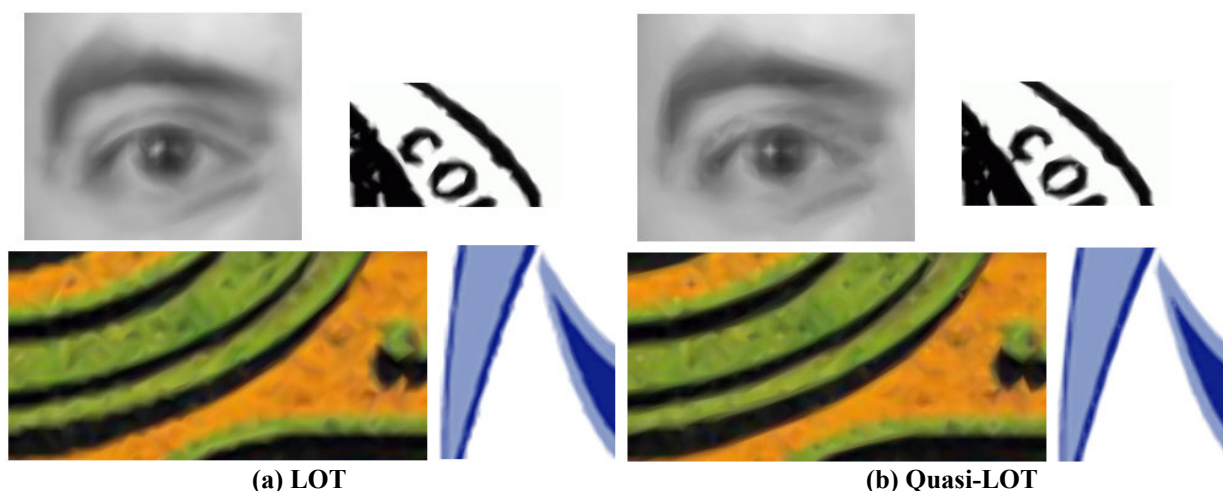


Obrázok 24: 600% zväčšenie obrázku a váha dosiahnutej triangulácie pomocou: (a) LOT, (b) SA so štandardnými nastaveniami, (c) SA $ntemp=40$, (d) SA $r=0.85$, (e) SA $t_0=0.05$.

Metódy, založené na myšlienke simulovaného žihania (SA, SALA, Quasi-SA) so štandardne nastavenými parametrami (uvedené v sekcii 3.2.1) nedávajú adekvátne výsledky. Miera aproximácie MWT sa zlepšuje, ak sa zmenia parametre ako napríklad zníženie štartovacej teploty t_0 , zníženie rýchlosti chladiaceho procesu r , alebo zvýšenie počtu iteračných krokov $ntemp$. Veľmi často sa stane, že úroveň aproximácie je horšia ako pri LOT trianguláciách (pomocou Lawsonovej optimalizačnej procedúry), to sa stalo aj v prípade uvedeného príkladu - Obrázok 24. Perceptuálne metriky vo väčšine prípadov vyhlásia SA za lepšiu ako Quasi-SA.

Quasi-LOT verzus LOT

Porovnanie LOT a Quasi-LOT podľa vizuálnej kvality nie je ľahkou záležitosťou. Perceptuálne metriky vo väčšine prípadov vyhlásia LOT za lepšiu rekonštrukčnú metódu ako QLOT. Rozdiely medzi nimi sú ale minimálne a závisia od typu obrazu. Quasi-LOT produkuje menej artefaktov v oblastiach hrán, na druhej strane LOT vykazuje lepšie výsledky v rekonštrukcii malých detailov. Na obrázku - Obrázok 25 - sú ukázané vybrané časti testovacích obrázkov, na nich sú demonštrované rozdiely medzi testovanými metódami.



Obrázok 25: Vizuálny rozdiel medzi metódami, zobrazené na vybraných ukázkach.

V ukázkach z horného riadku Quasi-LOT produkuje artefakty pri malých detailoch, v spodnom riadku Quasi-LOT vytvára vizuálne priaznivejšie hrany ako LOT.

Otázka existencie relácie medzi váhami dosiahnutých triangulácií zatiaľ nie je uzavretá. Pre výsledky dosiahnuté z experimentov platí ostrá nerovnosť:

$$w(\text{LOT}(\mathbf{V})) < w(\text{Quasi-LOT}(\mathbf{V})).$$

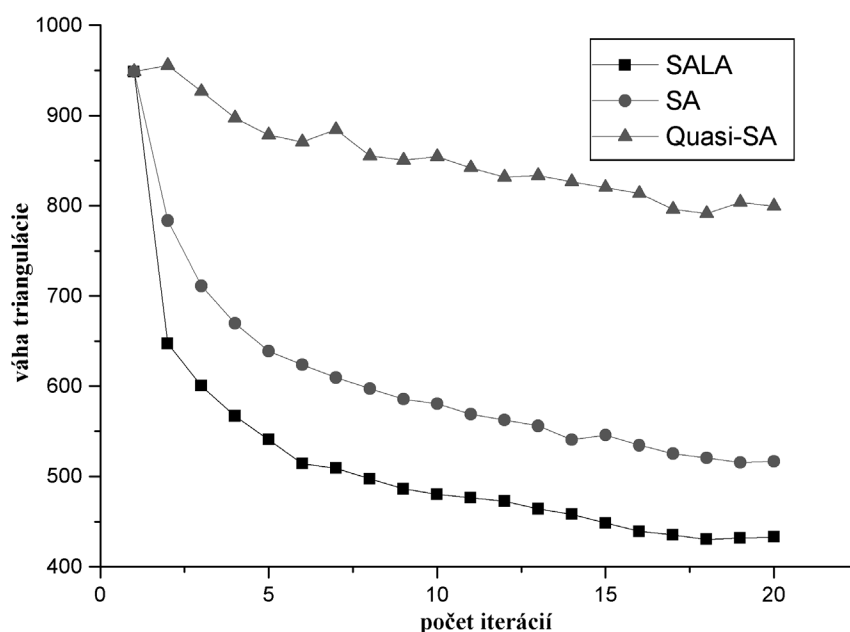
V špeciálnych prípadoch platí aj rovnosť. Najmenším príkladom pre tento prípad je ľubovoľná štvorbodová množina (v ktorej nie sú všetky body kolineárne). Otázna ostáva existencia takej konfigurácie bodov, kde by Quasi-LOT dosiahla nižšiu váhu ako LOT. Nie je možné potvrdiť existenciu relácie preferencie medzi výsledkami porovnaných metód len na základe týchto poznatkov. V prípade existencie relácie by LOT získala prevahu nad Quasi-LOT z hľadiska miery aproximácie MWT.

Asymptotická zložitosť porovnaných metód sa zhoduje. Váha Quasi-LOT nemá takú klesajúcu charakteristiku ako LOT, ale môže sa stať, že po určitom iteračnom kroku sa váha triangulácie zvýši. To značí problémy s konvergenciou, čo by tvrdenie o výpočtovej zložitosti spochybňovalo. Tento problém bol odstránený zastavením procesu, ak sa váha triangulácie po iteračnom kroku zvýši. Takto tvrdenie o asymptotickej zložitosti je korektné.

V našej implementácii vďaka dátovej štruktúre Quasi-LOT dosiahla výrazne rýchlejší priebeh ako LOT (zhruba 10x rýchlejšiu). Pri testovaní lokálnej optimality Quasi-LOT vystačí s dátami uloženými v danej hrane, nakoľko LOT musí pracovať aj s dátami z iných hrán. Situácia sa môže zmeniť pri použití iných dátových štruktúr, ale aj tam by sa mala ukázať prevaha v rýchlosti metódy Quasi-LOT.

Porovnanie simulovaného žihania, SALA a Quasi-SA

Významnosť heuristických metód založených na myšlienke simulovaného žihania je veľká pri aproximácii MWT. Analýzu vizuálnej kvality stochastických metód sme už predviedli, nespomenuli sme ale analýzu priebehu samotných procesov. Naše testovanie prebehlo so štandardne nastavenými parametrami na testovacom obrázku - Obrázok 22, výsledky sú zobrazené na obrázku - Obrázok 26.

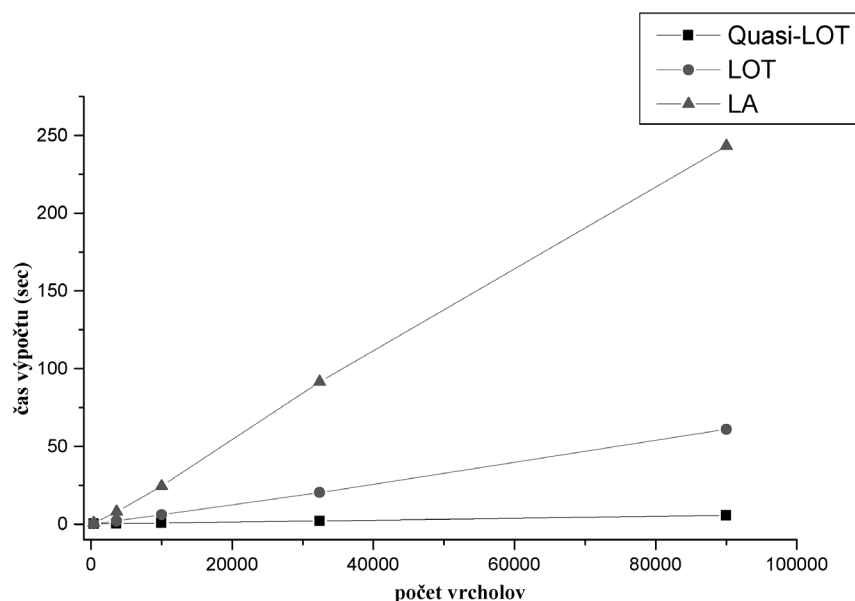


Obrázok 26: Rýchlosť konverencie pre SA, Quasi-SALA a SALA.

So štandardnými nastaveniami testované stochastické procesy nepriniesli adekvátne výsledky. Je to vďaka špeciálnemu rozloženiu dát, a príbuznosti chápania digitálnych obrázkov a Markovových náhodných polí. SALA produkovala najnižšiu celkovú váhu triangulácie spomedzi stochastických procesov. Ukázalo sa aj horšie správanie Quasi-SA ako SA, čo sme očakávali. Nové heuristiky Quasi-SA a SALA môžu priniesť kvalitné výsledky pre inak distribuované dáta.

Rýchlosť metód

Rýchlosť výpočtov závisí od konkrétneho obsahu obrazov, teda je potrebné stanoviť podmienky testovania. Pre tieto účely boli použité časti ortofotomapy Bratislavy – Príloha CD. Výsledky vznikli priemerovaním z výpočtov pre 6 rôznych obrázkov danej veľkosti - Obrázok 27.



Obrázok 27: Zobrazenie závislosti medzi počtom vrcholov (pixlov) a dobou výpočtu

Testované metódy ukázali takmer lineárny charakter. Poradie podľa rýchlosti je nasledovné: Quasi-LOT, LOT a nakoniec LA. Tieto výsledky zodpovedali očakávaniam. Hardwareové podmienky testovania rýchlosti boli: Windows XP Professional, AMD Athlon 1GHz, 384 MB RAM.

Poznámka: Kvôli takmer lineárnemu správaniu testovaných metód praktické použitie navrhnutého algoritmu IPA je obmedzené. Uplatnenie môže nájsť v aplikáciách, kde je potrebný výpočet v reálnom čase a nie je možné sa zaoberať úlohou natriangulovania obrazu ako celku. Taktiež je vhodný pre paralelné výpočty. Odporúčame stanoviť rozmer blokov väčší ako 16x16.

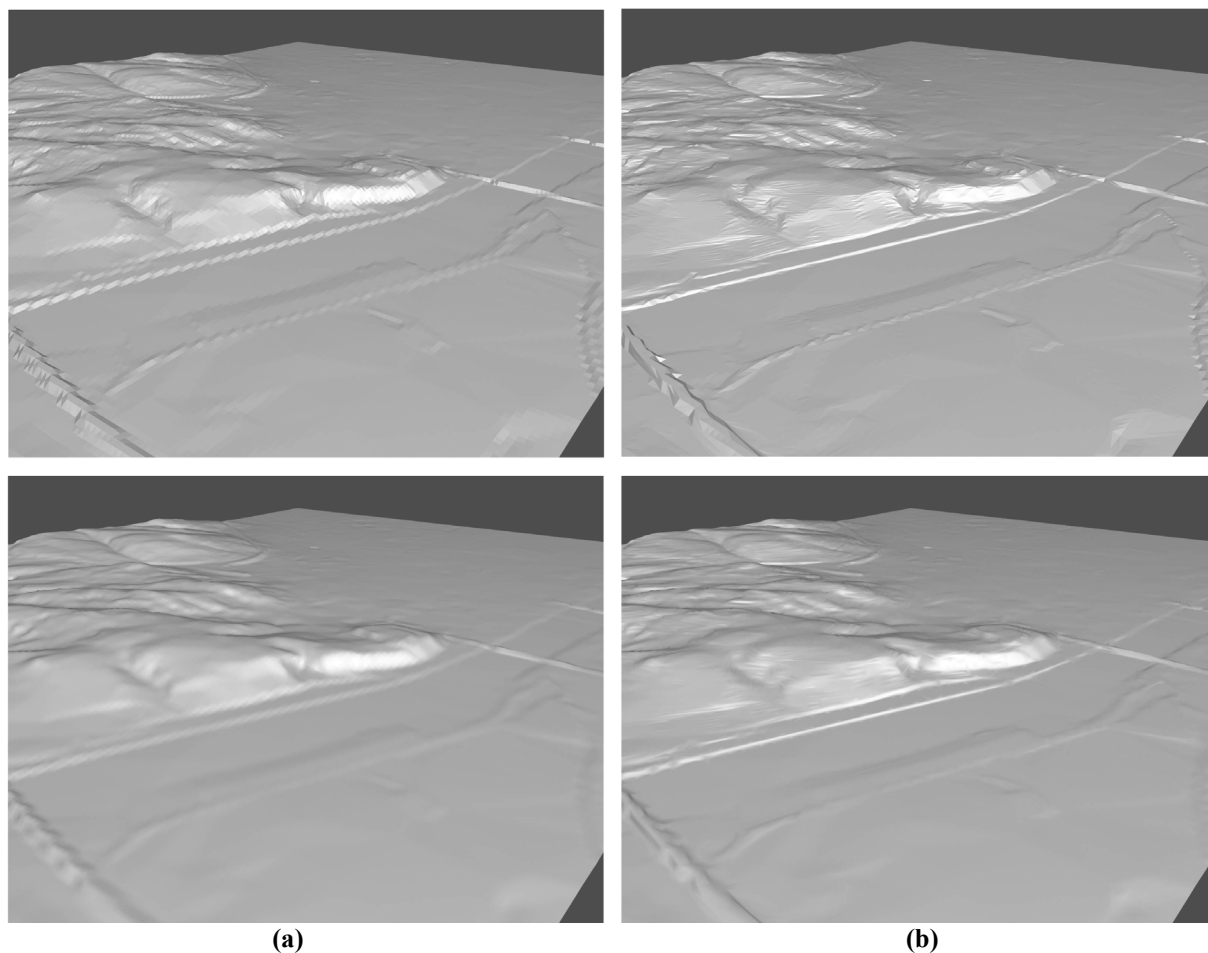
Konklúzia výsledkov

Výsledné DDT triangulácie majú lokálny charakter, čo implikuje, že výpočtovo lacné aproximácie MWT dávajú vizuálne príjemné výsledky. Rozdiel medzi rekonštrukčnými metódami pre účely minifikácie je malý. Pre tieto prípady je výhodnejšie používať rýchle rekonštrukčné metódy, ako napríklad bilineárna interpolácia. Na druhej strane využívanie DDT prístupov na magnifikačné účely prináša výhody. Odporúčame použitie deterministicky založených metód.

Poznámka: Pomocné materiály k uvedeným výsledkom je možné nájsť v prílohách na CD.

5.2 Aplikácia DDT na výškové mapy

Ako už bolo spomínané viackrát, DDT techniky a rekonštrukcia DEM dát majú blízky vzťah. Na získanie jednoduchej C^0 spojitkej rekonštrukcie je často používaná regulárna triangulácia (popísané v odseku 3.). DDT metódy poskytujú vizuálne príjemnejšie výsledky. Na obrázku – Obrázok 23 – je zobrazená časť Bratislavskej výškovej mapy³, rekonštruovaná pomocou regulárnej triangulácie a Quasi-LOT metódy. Modely sú zobrazené konštantným a Phongovým tieňovaným. Použitá cenová funkcia bola SCF.



Obrázok 28: Ukážka z (a) iniciálnej štruktúry, (b) Quasi-LOT triangulácie výškovej mapy Bratislavy.

Ako vidieť, aj pre tento účel dáva Quasi-DDT adekvátny výsledok. Správanie sa LOT a Quasi-LOT je podobné, ako pri rekonštrukcii obrázkov. Porovnanie vývinu váhy triangulácie a počtu výmen diagonál je zobrazená v tabuľke - Tabuľka 4:

³ Dáta poskytol Magistrát mesta Bratislavy.

iterácia	basic	1.	2.	3.	4.	5.
LOT	11590,18	5718,316	5368,225	5264,452	5245,69	5242,373
flips		48919	8740	3100	855	241
Quasi-LOT	11590,18	8165,138	8117,061	8107,067	8104,167	8102,869
flips		55868	9462	2701	654	178
iterácia	6.	7.	8.	9.	10.	11.
LOT	5241,329	5241,282	5241,273	5241,268	5241,263	5241,263
flips	88	39	22	11	6	2
Quasi-LOT	8102,258	8102,153	8102,111	8102,096	8102,096	
flips	68	28	11	3	0	

Tabuľka 4: Informácie o priebehu rekonštrukcie.

Zastavenie procesu LOT po 11. iterácii, napriek tomu, že počet výmen diagonál nebol nulový, je vďaka ochrannému mechanizmu zabránenia vzniku numerických chýb. Mohlo by nastať zacyklenie výpočtu v situácii, ak by došlo k výmenám diagonál na základe numerickej nepresnosti. Ďalšie DEM triangulácie a príslušné materiály je možné nájsť v prílohách na CD.

6 Podnety pre ďalší výskum

Výskumná oblasť dátovo závislých triangulácií je pomerne málo preskúmaná oproti klasickým planárnym trianguláciám. Priestor pre ďalší vývoj pre účely rekonštrukcie obrazov je široký. Do nasledujúceho zoznamu sú zaradené myšlienky, ktoré sú v určitom zmysle spojené s uvedenými prístupmi a môžu slúžiť ako predmet ďalšieho výskumu:

- Možnosť použitia získanej C^0 spojitej, po častiach lineárnej plochy pre aproximácie vyššieho rádu [23].
- Testovať použiteľnosť vrcholovo založených dátovo závislých triangulácií pre rekonštrukčné účely obrázkov.
- Aplikovať mesh decimating techniky na výslednú trianguláciu s cieľom získania kompresie obrazu. Skombinovať pre tieto účely hranovo a vrcholovo založené DDT triangulácie.
- Testovať look-ahead modifikáciu simulovaného žihania pre ľubovoľne rozložené dátové množiny.
- Vyvinúť rýchlostne orientovaný softvérový nástroj predloženého algoritmu IPA.
- Porovnávať výsledky pomocou feature-based metód.

7 Záver

V predloženej práci sme študovali rekonštrukciu obrazu pomocou triangulácií. Cieľom práce bolo porovnávať existujúce metódy a navrhnúť nové metódy.

V prehľade problematiky sme popísali veľké množstvo rekonštrukčných prístupov. Zamerali sme sa na rekonštrukcie pomocou triangulácií. Mnoho spôsobov optimalizácie, získavania informácií z farebných obrázkov, ohodnotenia komponentov, voľba metriky a nastavenie parametrov dávajú obrovský počet možných kombinácií. Časť z týchto možností bola implementovaná. Na rekonštrukciu je možné sa pozerat' z rôznych strán: vizuálna kvalita, miera aproximácie MWT či časová náročnosť. Porovnanie týchto aspektov bolo rozvinuté v piatej kapitole.

Prínosom tejto diplomovej práce sú nové DDT triangulácie: rozdelenie na bloky popísané (IPA) v odseku 3.1.5 a modifikácia optimalizačnej techniky simulované žihanie (SALA) – 3.2.3. Bol uvedený nový, korektný spôsob rekonštrukčného postupu farebných obrazov – 2.1 - a bolo ukázané zlyhanie greedy techniky triangulácie pre účely DDT triangulácií – 3.1.2. Nová skupina metód pomenovaná ako Quasi DDT je predstavená v odseku 3.3.3.

Okrem teoretických zaujímavostí navrhnutých metód sa ukázalo aj ich opodstatnenie z praktického hľadiska. Z hľadiska praktickej využiteľnosti v oblasti rekonštrukcie obrazov najlepšie uspeli z navrhnutých metód IPA a Quasi-LOT metóda. Stochastické metódy nevykazujú také dobré výsledky ako deterministické, ale verím tomu, že SALA a možno aj Quasi-SA môžu nájsť uplatnenie pri riešení iných problematik. Okrem toho bolo poskytnuté aj priblíženie MWT problematiky cez dátovo závislé triangulácie z iného pohľadu, ako sa to prezentuje v existujúcej literatúre.

Napriek tomu, že problém rekonštrukcie obrazu zaťažuje počítačovú grafiku od jej počiatkov, ešte stále nie je uzavretou oblasťou. Veľmi dôležitou úlohou je zaoberať sa ňou a neustále ju vylepšovať, lebo je elementárnou časťou množstva prístupov. Verím tomu, že predkladaná diplomová práca posunie stav problematiky bližšie k cieľu, aby aj táto časť počítačovej grafiky mohla byť vyhlásená za uzavretú. Dúfam, že snaha priblíženia DDT triangulácií k praktickej využiteľnosti cez rekonštrukcie obrazov nájde uplatnenie a softvérové dielo poskytne užitočné výsledky do projektu Virtual Bratislava.

Literatúra

- [1] Alboul L, Kloostreman G, Traas C, van Damme R. *Best Data-Dependent Triangulations*. Technical Report TR-1487-99, University of Twente, 1999.
- [2] Aurenhammer F. Voronoi Diagrams- A Survey of a Fundamental Geometric Data Structure. *ACM Computing Surveys*. Vol. 23, No. 3., pp. 345-405, 1991.
- [3] Barnes J C, Hamman B, Joy K I. An Edge-preserving, Data-Dependent Triangulation Scheme for Hierarchical Rendering. *Scientific Visualization Conference*. Dagstuhl, Germany, 1997.
- [4] Bornik A, Cech P, Ferko A, Perko R. Beyond Image Quality Comparison. *Eurographics*. EG Short, 2003.
- [5] Brown J L. *Vertex based Data Dependent Triangulations*. Computer Aided Geometric Design 8, pp. 239-251, 1991.
- [6] Chalmovianský P, Ferko A, Galbavý R, Niepel L. *Zložitosť geometrických algoritmov*. Univerzita Komenského Bratislava, 2001. ISBN 80-223-1598-2.
- [7] Čech P. Perceptual Metrics and Image Compression. *Proceedings of Spring Conference on Computer Graphics, Budmerice*. pp. 39-40, 2002. ISSN 1335-5694.
- [8] Dyn N, Levin D, Rippa S. Data Dependent Triangulations for Piecewise Linear Interpolation. *IMA Journal of Numerical Analysis* 10. pp. 137-154, 1990.
- [9] Ferko A. *Approaching the Minimum Weight Triangulation Problem*. Habilitation Lecture Notes, Manuscript, 2004.
- [10] Ferko A, Niepel L, Plachetka T. Criticism of Hunting Minimum Weight Triangulation Edges. *Proceedings of the 12th Spring Conference on Computer Graphics*. Budmerice, pp. 259-264, 1996. ISBN 80-223-1032-8.
- [11] Ferko A. Virtual Bratislava & Semantic Web. *IT3T 2002 Invited Talk*. <http://www.sccg.sk/~ferko>, 2002.
- [12] Ford A, Roberts A. *Colour Space Conversions*. Technical Guide, <http://www.poynton.com/PDFs/coloureq.pdf>, 1998.
- [13] Garland M, Heckbert P S. *Fast Polygonal Approximation of Terrains and Height Fields*. Technical Report TRCMU-CS-95-181, Carnegie Mellon University, 1995.
- [14] Glassner A. *Principles of Digital Image Synthesis*. Morgan Kaufmann, San Francisco, 1995. ISBN 1558602763.
- [15] Hanke S, Ottmann T, Schuierer S. The Edge-Flipping Distance of Triangulations. *European Workshop on Computational Geometry*. Muenster, Germany, 1996.

- [16] Heckbert P S, Garland M. Survey of Polygonal Surface Simplification Algorithms. *Multiresolution Surface Modeling Course SIGGRAPH'97*. Course #25, 1997.
- [17] Kolingerová I. Genetic Approach to Data Dependent Triangulations. *Proceedings of Spring Conference on Computer Graphics*. Budmerice, pp. 229-238, 1999.
- [18] Kolingerová I. *Lookahead Search to the Minimum Weight Triangulation*. Manuscript, 2004.
- [19] Kolingerová I, Ferko A. Multicriteria-optimized Triangulations. *The Visual Computer* 17(6). pp. 380-395, 2001.
- [20] Kolingerová I. *Source Code*. 2003.
- [21] Kolingerová I, Žalik B. Improvements to Randomized Incremental Delaunay Insertion. *Computers & Graphics* 26. pp. 477-490, 2002.
- [22] Kreylos O, Hamman B. On Simulated Annealing and the Construction of Linear Spline Approximations for Scattered Data. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*. Vol. 7, No.1., pp. 17-31, 2001.
- [23] Nielson G M. Scattered Data Modeling. *IEEE Computer Graphics & Applications* 13(1). pp. 60-70, 1993.
- [24] Nociar M. *Triangulácie v rovine a teréne*. MSc thesis. Bratislava: Comenius University 2002.
- [25] Preparata F P, Shamos M L. *Computational Geometry an Introduction*. Springer-Verlag, 1985. ISBN 0-387-96131-3.
- [26] Rheingans P. Color Perception and Applications. *SIGGRAPH 97*. Course #33, 1997.
- [27] Rippa S. Minimal Roughness Property of the Delaunay triangulation. *Computer Aided Geometric Design* 7. pp.489-497, 1990.
- [28] Salomon D. *Data Compression: The Complete Reference 2nd Edition - Auxiliary Material*. electronically in www.ecs.csun.edu/~dsalomon/DC2advertis/DComp2Ad.html , 2001.
- [29] Schilling A, Zipf A. Generation of VRML City Models for Focus Based Tour Animations. *WEB '03*. pp. 39-48, 2003.
- [30] Schumaker L L. Computing Optimal Triangulations Using Simulated Annealing. *Computer Aided Geometric Design*. vol. 10 (3-4), pp. 329-345, 1993.
- [31] Sederberg T W. *Source Code*, 2002.
- [32] Su D, Willis P. Image Interpolation by Pixel Level Data-Dependent Triangulation. Submitted to *Computer Graphics Forum*. 10/2002.

- [33] Su D, Willis P. Demosaicing of Colour Images Using Pixel Level Data-Dependent Triangulation. *Theory and Practice of Computer Graphics*. pp. 16-25, 2003.
- [34] Vaněček P, Kolingerová I. Fast Delaunay Stripification. *Proceedings of the Spring Conference on Computer Graphics 2003*, Budmerice, pp. 73-82, 2003. ISBN 80-223-1837-X.
- [35] Wang Z, Bovik A C. A Universal Image Quality Index. *IEEE Signal Processing Letters*. Vol. 9, No.3., pp. 81-84, 2002.
- [36] Weimer H, Warren J, Troutner J, Wiggins W, Shrout J. Efficient Co-Triangulation of Large Data Sets. *IEEE Visualization 98*. pp. 119-126, 1998.
- [37] www.brunel.ac.uk/project-murale - 3D Measurement & Virtual Reconstruction of Ancient Lost Worlds of Europe. June 2002.
- [38] Yu X, Morse B S, Sederberg T W. Image Reconstruction Using Data-Dependent Triangulation. *IEEE Computer Graphics and Applications*. pp. 62-68, 2001.