

UNIVERZITA KOMENSKÉHO
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A
INFORMATIKY



PRÁCA K DIZERTAČNEJ SKÚŠKE

TRIANGULÁCIE V ROVINE, TERÉNE A
PRIESTORE

2006

RNDr. Zsolt Tóth

UNIVERZITA KOMENSKÉHO
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A
INFORMATIKY
KATEDRA ALGEBRY, GEOMETRIE A DIDAKTIKY
MATEMATIKY

PRÁCA K DIZERTAČNEJ SKÚŠKE
TRIANGULÁCIE V ROVINE, TERÉNE A
PRIESTORE

AUTOR: RNDr. ZSOLT TÓTH
ŠKOLITEĽ: Doc. RNDr. ANDREJ FERKO, PhD.

BRATISLAVA, MAREC 2006

Poďakovanie

Úprimne ďakujem svojmu školiteľovi doc. RNDr. Andrejovi Ferkovi, PhD. za jeho odborné vedenie, cenné pripomienky a motiváciu pri tvorbe tejto práce. Dipl.-Ing.Dr.techn. Ivanovi Violovi a Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Meistrovi Eduardovi Gröllerovi za ich cenné konzultácie a užitočné pripomienky.

Vďaka patrí aj mojej rodine a priateľom za ich pochopenie a podporu, ktorú mi poskytli.

Abstrakt

V tejto práci prezentujeme prehľad geometricky založenej techniky, ktorá zachováva významné črty v dátach a je nazývaná dátovo závislá triangulácia. Sú tu predstavené dva nové deterministické prístupy, ktoré majú za úlohu posunúť túto metódu bližšie k reálnemu použitiu. Ponúkame modifikáciu optimalizačného prístupu simulovaného žihania v kombinácii s look-ahead prístupom. Hlavným prínosom je rozšírenie dátovo závislej techniky na rekonštrukciu n -dimenzionálnych dát. Naším cieľom je generovanie n -dimenzionálnej triangulácie, ktorá zachováva vysokofrekvenčné oblasti pomocou topologických zmien. Je to zovšeobecnenie 2D prístupu založeného na dátovo závislých trianguláciách a Lawsonovho optimalizačného procesu. Predstavíme novú cenovú funkciu a zovšeobecnenie existujúcich cenových funkcií n -dimenzií. Na záver uvedieme možnosti ďalšieho výskumu ako projekt dizertačnej práce.

Abstract

In this thesis we present an overview of geometrically based feature preserving reconstruction technique called data dependent triangulation. Two new deterministic algorithms are introduced which shift this reconstruction method closer to real usage. We present a new modification of the optimization technique simulated annealing with generalized look-ahead process. The main result is the extension of the data dependent technique for reconstruction of n -dimensional scattered data. Our goal is to generate an n -dimensional triangulation, which preserves the high frequency regions via local topology changes. It is the generalization of a 2D reconstruction approach based on data-dependent triangulation and Lawson's optimization procedure. We discuss an original cost function and a generalization of known functions for the n -dimensional case. At the end, we introduce future work proposals as a project of dissertation.

Obsah

1	Úvod	1
2	Základné pojmy a problém rekonštrukcie	2
2.1	Základné pojmy a definície	2
2.2	Topologické transformácie v trianguláciach	3
2.3	Problém rekonštrukcie a jej rôzne riešenia	6
3	Optimálne triangulácie	8
3.1	Základný princíp <i>DDT</i> a optimálne triangulácie	8
3.2	Cenové funkcie	10
4	Prehľad optimalizačných techník	13
4.1	Deterministické prístupy	13
4.1.1	Lawsonova optimalizačná procedúra	13
4.1.2	Look-ahead rozšírenie	17
4.1.3	<i>DDT</i> na úrovni pixlov	18
4.2	Stochastické prístupy	19
4.2.1	Simulované žíhanie	19
4.2.2	Genetická optimalizácia	21
4.3	Alternatívne prístupy	22
4.3.1	Ko-triangulácia	22
4.3.2	Vrcholovo založené ohodnotenie	23
5	Predbežné výsledky	24
5.1	Rozdelenie na bloky	24
5.2	Simulované žíhanie s využitím look-ahead stratégie	26
5.3	Quasi - <i>DDT</i>	26
5.4	Rozšírenie <i>DDT</i> do vyšších dimenzií	27
5.4.1	Problém rozšírenia a jeho riešenie	29
5.4.2	Váhové funkcie	29
5.4.3	Optimalizačný proces	31
5.5	Analýza výsledkov	32

5.5.1	Charakteristika porovnávacích kritérií	33
5.5.2	Analýza cenových funkcií	34
5.5.3	<i>DDT</i> a konvolučné techniky	35
5.5.4	Vizuálna kvalita stochastických procesov	36
5.5.5	Analýza nových algoritmov	36
5.5.6	Aplikácia <i>DDT</i> na syntetické 3D dáta	37
5.5.7	Zhrnutie	38
6	Projekt dizertačnej práce	48
6.1	Porovnanie 3D <i>DDT</i> s výsledkami iných techník	48
6.2	Kompresia tetrahedrálnych sietí pomocou <i>DDT</i>	49
6.3	Skvalitnenie rekonštrukcie digitálneho obrazu	51
	Literatúra	51
	A Aktivita	56

Zoznam obrázkov

2.1	Triangulácia striktne konvexného štvoruholníka pred a po aplikovaní preklápacej operácie.	4
2.2	Ilustrácia topologických transformácií 2–3 preklápania a 3–2 preklápania.	4
2.3	Ilustrácia topologickej transformácie 4 – 4 preklápania.	5
2.4	Projekcia tetrahedronu do roviny (v strede) a pohľady z antipodálnych bodov projekcie (ľavá a pravá časť).	6
2.5	600% magnifikácia pomocou konvolučnej techniky (vľavo) a geometricky založenej techniky (vpravo).	7
3.1	Priebeh rekonštrukcie pomocou metódy DDT	10
3.2	Výsledok po použití vhodnej a nevhodnej cenovej funkcie.	11
3.3	Ilustrácia pre výpočet cenovej funkcie.	11
4.1	Dve rôzne DT triangulácie množiny.	14
4.2	Vyhovujúca a nevyhovujúca triangulácia v zmysle vety 4.1.1, 4.1.2.	15
4.3	Lawsonova optimalizačná procedúra - pseudokód.	16
4.4	Závislosť hrán v LOP (vľavo) a v LAT (vpravo).	17
4.5	Look-ahead triangulácia - pseudokód.	17
4.6	Základná štruktúra pre DDT na úrovni pixlov.	18
4.7	DDT triangulácia na úrovni pixlov - pseudokód.	19
4.8	Simulované žíhanie - pseudokód.	20
4.9	Genetická optimalizácia - pseudokód.	22
5.1	Štruktúra segmentovania obrazu na bloky.	25
5.2	Look-ahead prvého stupňa hrany <i>e</i>	25
5.3	Triangulácia pomocou rozdelenia na bloky - pseudokód.	26
5.4	Simulované žíhanie s využitím look-ahead - pseudokód.	27
5.5	Rekonštrukcia hrany pomocou LOP (horný riadok), Quasi-LOP (dolný riadok) metódy pri použití cenovej funkcie SCF	28
5.6	Príklad korektnej tetrahedralizácie vzhľadom na varianciu stien.	30
5.7	Zovšeobecnený Lawsonov optimalizačný proces - pseudokód.	39
5.8	Porovnanie účinnosti cenových funkcií pri 300% magnifikácii.	40

5.9	Rekonštrukcia pri 256% zväčšení rôznymi metódami.	41
5.10	Rekonštrukcia pri 512% zväčšení rôznymi metódami.	42
5.11	Rekonštrukčné výsledky zo stochastických prístupov. SA (vľavo) a SA-LA (vpravo).	43
5.12	600% zväčšenie pomocou rôznych DDT techník. Zobrazená je aj trojuholníková sieť a výšková mapa triangulácie. LOP - vľavo, SA - stred, SALA - vpravo.	44
5.13	Vizuálny rozdiel medzi metódami, zobrazené na vybraných ukážkach. LOP - vľavo, Quasi-LOP - stred, GLOP - vpravo.	45
5.14	Quasi-LOP triangulácia výškovej mapy Bratislavy. Dáta poskytol Magistrát mesta Bratislavy.	45
5.15	Rekonštrukčné výsledky pomocou stochastických prístupov.	46
5.16	Rýchlosť konverencie pre SA , Quasi-SA a SALA	46
5.17	Rekonštrukčné výsledky pre syntetické volumetrické dáta. Trilineárna interpolácia (vľavo) a 3D DDT (vpravo).	47
5.18	Rekonštrukčné výsledky pre syntetické volumetrické dáta. Trilineárna interpolácia (hore) a 3D DDT (dole).	47
6.1	Návrh použitia perceptuálnych metrík pre porovnávanie volumetrických dát.	49
6.2	Náčrt algoritmu na stratovú kompresiu volumetrických dát zachovávajúci významné príznaky.	50

Kapitola 1

Úvod

Optimálne triangulácie majú širokú škálu použiteľnosti v počítačovej grafike ako aj v iných vedných odboroch. Cieľom tejto práce je zamerať sa na špeciálnu skupinu optimálnych triangulácií nazývaných *dátovo závislé triangulácie*. Hlavným účelom ich použitia je rekonštrukcia po častiach lineárnych funkcií definovaných nad diskretnými dátami.

Cieľom tejto práce je rozširovať poznatky o dátovo závislých trianguláciach, sumari- zovať existujúce teoretické vedomosti a navrhnúť možnosti ďalšieho výskumu. Hlavným dosiahnutým výsledkom je zovšeobecnenie tejto techniky pre účely rekonštrukcie funkcií nad n -dimenzionálnou doménou pomocou simpliciaanej dekompozície domény.

Aplikačná oblasť dátovo závislých triangulácií je veľmi rozsiahla, napríklad rekonštrukcia digitálneho obrazu v 2D, rekonštrukcia medicínskych dát v 3D, rekonštrukcia v čase sa meniacich volumetrických dát v 4D, atď. Vhodným nastavením je možné ju prispôbiť ľubovoľnému rekonštrukčnému problému. Je nezávislá od rozmiestnenia funkčných hodnôt a môže slúžiť aj na vektorizáciu dát. Raz vytvorená triangulácia poskytuje základnú štrukturalizáciu dát, v ktorej môžeme získať neznámu funkčnú hodnotu ľubovoľnou metódou interpolácie.

Práca je členená do piatich častí. V druhej kapitole sú zavedené základné poj- my a je definovaná úloha rekonštrukcie. Tretia kapitola sa zaoberá popisom dátovo závislých triangulácií a ich vzťahom k optimálnym trianguláciám. Prehľad optimali- začných techník je poskytnutý v štvrtej kapitole. Piata kapitola obsahuje predbežné výsledky: popis vlastných rozšírení a analýzu výsledkov. Posledná, šiesta kapitola ob- sahujú projekt dizertačnej práce.

Kapitola 2

Základné pojmy a problém rekonštrukcie

Cieľom druhej kapitoly je zavedenie základných pojmov a poskytnutie prehľadu rôznych rekonštrukčných techník. Ďalej obsahuje krátky popis topologických transformácií pre triangulácie, ktoré budú použité v tejto práci.

2.1 Základné pojmy a definície

Definícia 2.1.1. [PS85] Konvexná množina $V \in \mathbf{R}$ je množina takých bodov, pre ktoré platí:

$$\forall x, y \in V \text{ platí } \lambda x + (1 - \lambda)y \in V, \quad \forall \lambda \in \langle 0, 1 \rangle. \quad (2.1)$$

Konvexným obalom množiny V ozn. $\mathbf{CH}(V)$ sa nazýva najmenšia konvexná množina obsahujúca množinu bodov V .

Definícia 2.1.2. [PS85] Konvexný obal $k + 1$ afinne nezávislých bodov v $\mathbf{E}^n$ sa nazýva k -simplexom označené ako σ_k , kde $0 \leq k \leq n$. Ľubovoľná podmnožina týchto bodov je tiež simplexom, tieto množiny sa nazývajú stenou simplexu σ_k .

Definícia 2.1.3. [ES92] Množina simplexov v $\mathbf{E}^n$ sa nazýva simplicialny komplex ozn. $\mathcal{C}$, ak spĺňa nasledujúce vlastnosti:

- (i) Stena ľubovoľného simplexu z $\mathcal{C}$ patrí do $\mathcal{C}$.
- (ii) Pre simplexy platí $\sigma_k, \sigma_l \in \mathcal{C}$, $0 \leq k, l \leq n$ platí $\sigma_k \cap \sigma_l = \sigma_{k \cap l}$.

Definícia 2.1.4. [ES92] Nech je daná množina $V \in \mathbf{E}^n$. Trianguláciou množiny V budeme nazývať simplicialny komplex $\mathcal{C}$, ktorý spĺňa nasledujúce vlastnosti:

- (i) Každá 0-stena (vrchol) $\mathcal{C}$ je bod z V .
- (ii) Priestor pokrytý s $\mathcal{C}$ je $\mathbf{CH}(V)$.

Trianguláciu množiny V budeme označovať $T(V)$.

Kvôli odhadu efektívnosti algoritmov je potrebné si zaviesť nasledujúce pojmy:

Definícia 2.1.5. [PS85] *Asymptotická zložitosť* - $O(f(n))$ označuje množinu všetkých funkcií $g(n)$, pre ktoré existujú kladné konštanty n_0 a C tak, že platí $|g(n)| < C \cdot f(n)$ pre všetky $n > n_0$.

Definícia 2.1.6. [PS85] *Dolná hranica zložitosti* - $\Omega(f(n))$ označuje množinu všetkých funkcií $g(n)$, pre ktoré existujú kladné konštanty n_0 a C tak, že platí $|g(n)| > C \cdot f(n)$ pre všetky $n > n_0$.

Pre rovinné triangulácie platia nasledujúce vzťahy:

Veta 2.1.1. *Dolná hranica časovej zložitosti ľubovoľnej triangulácie N bodov v rovine je $\Omega(N \log N)$.*

Dôkaz. (náčrt) Vyplýva to z dolnej hranice zložitosti usporiadania N reálnych čísel, pre ktoré platí odhad $\Omega(N \log N)$.

Tvrdenie 2.1.1. [PS85] *Počet hrán a trojuholníkov triangulácie danej množiny v rovine je rovnaký a platí:*

$$\begin{aligned} \text{Card}(\mathbf{e}) &= 3 \cdot (\text{Card}(\mathbf{V}) - 1) - \text{Card}(\mathbf{CH}(\mathbf{V})) \\ \text{Card}(\mathbf{T}) &= 2 \cdot (\text{Card}(\mathbf{V}) - 1) - \text{Card}(\mathbf{CH}(\mathbf{V})), \end{aligned} \tag{2.2}$$

kde $\text{Card}()$ značí mohutnosť množiny, $\mathbf{e}$ je množinou hrán, $\mathbf{V}$ značí množinu vrcholov, $\mathbf{CH}(\mathbf{V})$ - konvexný obal a $\mathbf{T}$ množinu trojuholníkov v triangulácii.

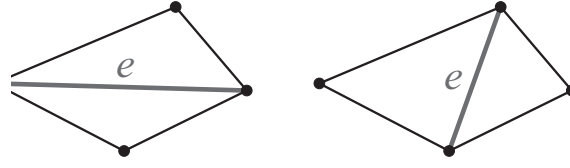
Dôkaz. Dôkaz tvrdenia vyplýva z dobre známej Eulerovej formuly.

2.2 Topologické transformácie v trianguláciách

Je potrebné zaviesť aj ďalšie pojmy, ktoré súvisia s topologickými transformáciami triangulácií. Najprv sa pozrieme na transformácie, týkajúce sa rovinných triangulácií.

Definícia 2.2.1. *Nech je daná triangulácia množiny $V \in \mathbf{E}^2$, uvažujme štvoruholníky vytvorené z dvoch trojuholníkov triangulácie $T(V)$, ktoré obsahujú spoločnú hranu ako svoju diagonálu. Striktne konvexným štvoruholníkom sa v takejto štruktúre nazýva konvexný štvoruholník, v ktorom všetky trojice bodov sú nekolineárne.*

Definícia 2.2.2. *Nech platia predpoklady z predchádzajúcej definície. Topologickú transformáciu, ktorá vymení diagonály v striktne konvexných štvoruholníkoch budeme nazývať preklápaním (flip). Situácia je znázornená na Obrázku 2.1.*



Obrázok 2.1: Triangulácia striktně konvexného štvoruholníka pred a po aplikovaní preklápacej operácie.

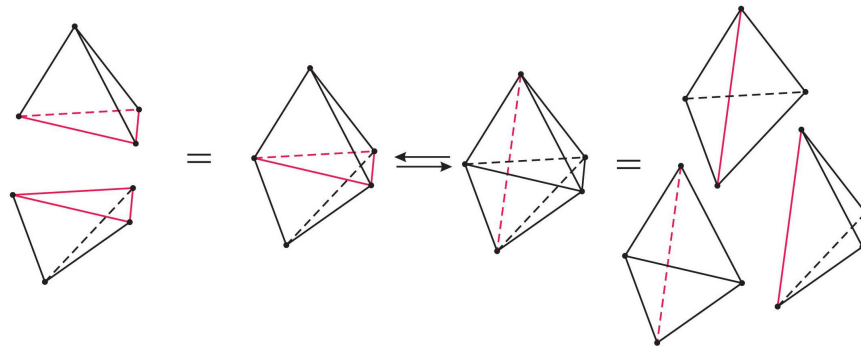
Nech je daná množina všetkých možných triangulácií pre daný vstup ako rovinný graf, kde vrcholmi sú jednotlivé konfigurácie (triangulácie) a hranami sú topologické transformácie. Tento graf budeme nazývať *grafom triangulácie*. Pre rovinný prípad platí nasledujúce tvrdenie:

Tvrdenie 2.2.1. *Graf triangulácie pre rovinné prípady s transformáciou preklápania je súvislý.*

Dôkaz. Dôkaz tohto tvrdenia a odhad počtu potrebných preklápaní na transformáciu medzi dvoma trianguláciami možno nájsť v [HOS96].

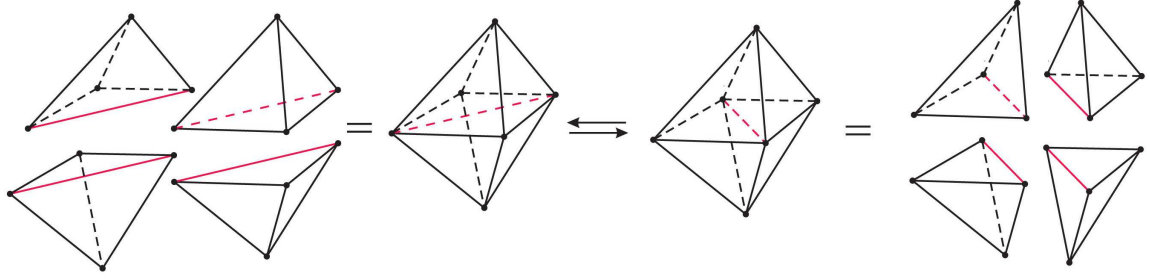
Vo vyšších dimenziách topologické transformácie sú zložitejšie, a existuje viac ich druhov. Je to vďaka rozličným vlastnostiam triangulácií v 2D a vo vyšších dimenziách. Najprv sa pozrieme na situáciu v 3D, kde sa používajú nasledujúce transformácie:

- (i) Pre päťicu bodov v $\mathbf{R}^3$ formujúce konvexnú bipyramídu - Obrázok 2.2 - spoločná stena (2–stena) môže byť nahradená so spoločnou hranou (1–stena). Táto operácia sa nazýva *2 – 3 preklápanie* (2 – 3 flip). Opačný postup sa nazýva *3 – 2 preklápanie* (3 – 2 flip). Pomocou týchto operácií sa zmení počet tetrahedronov (3–simplex), počet hrán a stien triangulácie danej štruktúry. Situáciu znázorňuje Obrázok 2.2.



Obrázok 2.2: Ilustrácia topologických transformácií 2 – 3 preklápania a 3 – 2 preklápania.

- (ii) Degenerovaným prípadom je špeciálna konfigurácia šiestich bodov, ktoré formujú štyri susedné tetrahedrony. Nech štyri zo šiestich bodov sú koplanárne a formujú striktné konvexný štvorholník, pričom ostatné dva body sú rozdelené rovinou, ktorá je definovaná koplanárnou štvoricou bodov. V takom prípade je možné danú šesticu vrcholov natriangulovať dvomi rôznymi spôsobmi - Obrázok 2.3. Táto transformácia sa nazýva *4 – 4 preklápanie* (4 – 4 flip).

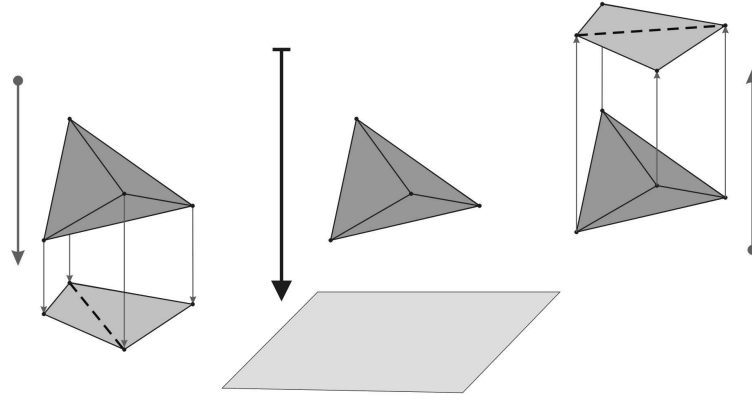


Obrázok 2.3: Ilustrácia topologickej transformácie 4 – 4 preklápania.

Zovšeobecnenie popísaných preklápacích transformácií sa vo vyšších dimenziách nazýva *bistellárne preklápania* (bistellar flip). Teoretická opodstatnenosť týchto transformácií je založená na Radonovej teórii [ES92] z oblasti konvexnej geometrie. Každá transformácia z radu bistellárnych preklápaní môže byť popísaná pomocou projekcie simplexu $\sigma_{n+1} \in \mathbf{E}^{n+1}$ do hyperroviny. Pohľady z antipodálnych bodov projekcie určujú simplicialné komplexy pred a po bistellárnom preklápaní. Projekcie, ktoré spôsobujú degenerované prípady v projektovanej štruktúre sa dajú popísať ako bistellárne preklápania nižších dimenzií. Na základe tejto teórie rozlišujeme nasledujúce prípady:

- (i) Nech je daný simplicialný komplex $\mathcal{C}$ v $\mathbf{E}^n$ pozostávajúci z n σ_n simplexov, ktoré majú spoločnú hranu (1–stenu). Ak $\mathcal{C}$ má $n + 2$ vrcholov (0–stien) a je konvexným, tak existujú práve dva spôsoby triangulácie $\mathcal{C}$. Prvá konfigurácia obsahuje spoločnú hranu (1–stenu). Druhá konfigurácia nahradí spoločnú hranu s hyperstenou ($(n - 1)$ –stena), ktorá je formovaná z vrcholov, ktoré nie sú incidentné s odstránenou hranou.
- (ii) Všetky ostatné možnosti sú degenerované prípady a dajú sa popísať pomocou bistellárnych preklápaní nižšej dimenzie.

Do skupiny bistellárnych preklápaní patria aj operácie pridávania a odstránenia vrcholov v trianguláciách. Tieto prípady nastanú, ak v projekcii vrchol padne do vnútra σ_{n-1} . Uvedený princíp platí aj pre popísané 2D a 3D topologické transformácie. Napríklad projekcia tetrahedrónu do roviny popisuje topologickú transformáciu v 2D, ilustrácia - Obrázok 2.4.



Obrázok 2.4: Projekcia tetrahedronu do roviny (v strede) a pohľady z antipodálnych bodov projekcie (ľavá a pravá časť).

Na rozdiel od rovinných triangulácií vo vyšších dimenziách nie je dokázané, že graf triangulácií s použitím bistellárnych preklápaní je súvislý. Bolo to dokázané len pre trianguláciu konvexných mnohostenov v 3D, dôkaz možno nájsť v [Bes01].

2.3 Problém rekonštrukcie a jej rôzne riešenia

Rekonštrukcia je veľmi dôležitá úloha, ktorá sa vyskytuje pri práci s diskretnými dátami. Znamená to určenie funkčnej hodnoty v ľubovoľnom bode z dostupných diskretných vzoriek. Matematická formulácia vyzerá nasledovne:

Definícia 2.3.1. Pre danú množinu bodov $\mathbf{V} = \{x_i = (x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,n})\}_{i=1}^m$ v $\mathbf{E}^n$ je definovaná množina funkčných hodnôt:

$$F(x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,n}) = z_i, \quad z_i \in \mathbf{R}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.3)$$

Rekonštrukcia je získanie $F(x_j)$, kde $x_j \notin \mathbf{V}$. V odbornej terminológii množina $\mathbf{V}$ a na nej definované vzorky funkcie $F(x)$ sa nazývajú množinou rozptýlených dát (*scattered data*).

Vzhľadom na to, že rekonštrukcia je často len medzikrokom v postupe rôznych operácií a simulácií, je dôležité, aby bola vykonaná čo najkvalitnejšie. Meranie kvality a určenie adekvátnosti vybranej techniky je závislé od aplikačnej oblasti. Zvyčajne sa však vyžaduje čo najpresnejšia rekonštrukcia významných črt, ktoré nesú dôležitú informáciu o správaní funkcie $F(x)$. Takými oblasťami sú miesta, kde $F(x)$ má v jednom smere veľkú deriváciu v porovnaní s inými smermi. V terminológii spracovaní obrazu to znamená vysokofrekvenčné oblasti, t.j. rekonštrukciu hrán; pri rekonštrukcii 3D medicínskych dát (napr. získané pomocou počítačovej tomografie - CT alebo iným spôsobom) získanie vhodne rekonštruovaných izoplôch, atď.

V závislosti od organizácie množiny V rozlišujeme dáta organizované do karteziánskej mriežky (*cartesian grid*), ináč budeme hovoriť o neštrukturovaných dát (*unstructured grid*)¹. Bez nároku na úplnosť uvedieme najčastejšie použité rekonštrukčné techniky.

Pre dáta organizované do karteziánskej mriežky najčastejším spôsobom rekonštrukcie je použitie tzv. *konvolučných techník*. Tenzorový súčin 1D rekonštrukčných filtrov alebo výber iného jadra však nezabezpečuje kvalitnú rekonštrukciu. Rekonštrukčné chyby nastanú v rekonštrukcii črt, ktoré majú inú orientáciu ako súradnicové osi karteziánskej mriežky. Výhodou konvolučných techník je možnosť využitia grafických akceleratorov [Vio02] a nízka časová náročnosť.

Na rekonštrukciu neštrukturovaných dát sa používajú rôzne numerické metódy. Krátky prehľad numerických rekonštrukčných metód možno nájsť v [Nie93]. Výsledok týchto prístupov je často vo forme analytických vyjadrení, čo zhoršuje prácu so spojitou reprezentáciou a zvyšuje náročnosť vyčíslenia rekonštruovaných hodnôt. Otáznou je aj kvalita rekonštrukcie.

Cieľom tejto práce je vylepšenie geometricky založenej techniky z 2D a jej zovšeobecnenie do vyšších dimenzií. Základná myšlienka je založená na použití triangulácie ako základ rekonštrukčnej siete. Pomocou topologických zmien táto technika je schopná prispôbiť trojuholníkovú sieť k črtám reprezentovaným v dátach a takto zvýšiť kvalitu rekonštrukcie. Obrázok 2.5 zobrazuje rekonštrukčný výsledok konvolučnej techniky a geometricky založenej techniky pre aplikačnú oblasť rekonštrukcie obrazu.



Obrázok 2.5: 600% magnifikácia pomocou konvolučnej techniky (vľavo) a geometricky založenej techniky (vpravo).

¹Existuje dôkladnejšie rozdelenie, napr. v literatúre [vBSF05], ale pre účely tejto práce stačí uvedený spôsob.

Kapitola 3

Optimálne triangulácie

Rekonštrukcia rozptýlených dát pomocou triangulácií znamená použitie triangulácie množiny $\mathbf{V}$ ako rekonštrukčnú sieť. Nové hodnoty sa získajú ako barycentrické kombinácie dát z vrcholov triangulácie. Z vlastností triangulácií je jasné, že triangulácia ako rozklad oboru hodnôt funkcie $F(x)$, určuje jednoznačne nové hodnoty. Každý bod z $\mathbf{CH}(\mathbf{V})$ leží práve v jednom simplexe σ_n , alebo na hranici viacerých simplexov σ_n , teda funkčná hodnota môže byť jednoznačne určená. Okrem barycentrickej kombinácie dát z vrcholov (C^0 prístup) je možné používať aj iné spôsoby rekonštrukcie. Tieto metódy vytvárajú rekonštrukciu funkcie $F(x)$ vyššieho rádu ($C^n, n \geq 1$) a pritom používajú triangulácie ako základné štruktúrovanie dát (napr. trojuholníkové splajny).

Spôsob triangulácie určuje kvalitu rekonštrukcie, a teda je dôležité, aby jej topológia bola prispôbena k správaniu $F(x)$. Triangulácia s požadovanými vlastnosťami sa nazýva *dátovo závislá triangulácia* (*data dependent triangulation*, ozn. **DDT**) a bola predstavená autormi Dyn a spol. v [DLR90]. V nasledujúcej časti sa budeme venovať vlastnostiam tejto triangulácie.

3.1 Základný princíp **DDT** a optimálne triangulácie

Definícia 3.1.1. Dátovo závislá triangulácia množiny $\mathbf{V} = \{x_i = (x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,n})\}_{i=1}^m$ v $\mathbf{E}^n$ je taká triangulácia, kde topológia triangulácie je závislá od funkcie:

$$F(x) = \{F(x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,n}) = z_i, \quad i = 1, \dots, m\}. \quad (3.1)$$

DDT umožní konštruovať triangulácie na základe ďalších poznatkov, ktoré sú pri vytváraní triangulácií reprezentované ako ďalší rozmer - funkčné hodnoty. V skutočnosti znamenajú trianguláciu v nD ale aj v $(n + 0.5)D$, kde $0.5D$ reprezentuje dimenziu pre funkčné hodnoty. Topologicky sú to ekvivalentné triangulácie. Pôvodná myšlienka bola predstavená pre rovinné triangulácie, teda pre $n = 2$, kde $2.5D$ objekt predstavuje terén. Táto kapitola bude zameraná na tento prípad.

Filozofia **DDT** je založená na priradení tzv. *cenových funkcií* k simplexom v triangulácií na základe geometrických alebo iných vlastnostiach. Minimalizáciou sumy

všetkých cenových funkcií dosiahneme trianguláciu so špeciálnymi vlastnosťami. Pri voľbe vhodných cenových funkcií sa to prejavuje výskytom dlhých, úzkych trojuholníkov v oblastiach, kde to rekonštrukcia $F(x)$ vyžaduje. Na tento účel existujúce triangulácie nedávajú také uspokojivé riešenia, aké poskytuje **DDT**. Prehľad optimálnych triangulácií možno nájsť v prehľadových prácach [BE95, Ede00].

Na praktické účely v existujúcich prístupoch sa používa ohodnotenie hrán. Definície, ktoré sú uvedené nižšie, sú založené na použití hranovo založených cenových funkcií:

Definícia 3.1.2. Váhou (cenou) hrany e budeme označovať číslo $c(e) \in \mathbf{R}$.

Definícia 3.1.3. Váha triangulácie $\mathbf{T}(\mathbf{V})$ je súčtom dĺžok všetkých jej hrán:

$$c(\mathbf{T}(\mathbf{V})) = \sum_{e \in \mathbf{T}(\mathbf{V})} \|c(e)\|. \quad (3.2)$$

V tejto práci bude použitá l_1 norma, teda súčet absolútnych hodnôt.

Poznámka. Existujú prístupy, kde za váhu triangulácie sa berú súčty v iných metrikách [DLR90], najúspešnejšou je hore uvedená l_1 norma.

Definícia 3.1.4. Triangulácia s minimálnou váhou (*minimum weight triangulation* ozn. **MWT**) množiny bodov $\mathbf{V}$ je triangulácia, ktorej váha je spomedzi všetkých triangulácií minimálna:

$$c(\mathbf{MWT}(\mathbf{V})) = \sum_{e \in \mathbf{MWT}(\mathbf{V})} \|c(e)\| = \min\{c(\mathbf{T}(\mathbf{V}))\}, \quad \forall \mathbf{T}(\mathbf{V}). \quad (3.3)$$

Hrany patriace vždy do **MWT**: najlacnejšia hrana a tie hrany, ktoré nepretína žiadna iná hrana (napr. hrany na konvexnom obale).

Definícia 3.1.5. Hrana $e \in \mathbf{T}(\mathbf{V})$ sa nazýva lokálne optimálna, ak pre štvoruholník vytvorený z trojuholníkov zdieľajúcich hranu e platí jedno z nasledujúcich tvrdení:

- (i) nie je striktne konvexný
- (ii) je striktne konvexný a je optimálne triangulovaný.

Definícia 3.1.6. Lokálne optimálna triangulácia ozn. **LOT** množiny $\mathbf{V}$ je triangulácia, v ktorej každá hrana, ktorá nepatrí do hranice konvexného obalu, je lokálne optimálna.

Definícia 3.1.7. Neutrálna výmena diagonál v triangulácii je taký proces, pri ktorom sa hrana e vymení za druhú diagonálu v striktne konvexnom štvoruholníku, ktorá e obsahuje ako svoju diagonálu, pričom váha triangulácie sa nemení.

Definícia 3.1.8. Nech hrana e je diagonálou striktne konvexného štvoruholníka, vytvoreného s trojuholníkmi obsahujúcimi e ako spoločnú hranu. Druhú diagonálu budeme nazývať alternatívnou diagonálou hrany e .

Vo všeobecnosti nájdenie globálnej optimálnej triangulácie (ako **MWT**) vyžaduje vyšetrenie exponenciálneho množstva triangulácií, čo pri väčšom množstve dát je časovo veľmi náročné. Problém nájdenia **MWT** pre **DDT** je zovšeobecnením **MWT** pre rovinné triangulácie, len v rovinných prípadoch za cenovú funkciu hrán je zvolená dĺžka hrany v danej metrike. Pre rovinné prípady bolo nedávno dokázané NP-ťažkosť nájdenia **MWT** [MR06]. Existujú ale rôzne výsledky o podgrafoch, aproximáciách a heuristikách [Fer04]. V prípade **DDT** kvôli špeciálnemu oceneniu jednotlivých hrán (alebo iných komponentov) len časť z týchto výsledkov je použiteľná.

DDT patrí do skupiny optimálnych triangulácií. Väčšina optimálnych triangulácií však môže byť vytvorená pomocou **DDT** v závislosti od voľnosti chápania priradenia cien k jednotlivým komponentom triangulácie a od zvolenej optimalizačnej techniky. Ide o veľmi efektívny nástroj na vytváranie optimálnych triangulácií. Priebeh výpočtu **DDT** je načrtnutý na Obrázku 3.1.



Obrázok 3.1: Priebeh rekonštrukcie pomocou metódy **DDT**.

V nasledujúcej časti sa budeme zaoberať popisom hranovo založených cenových funkcií.

3.2 Cenové funkcie

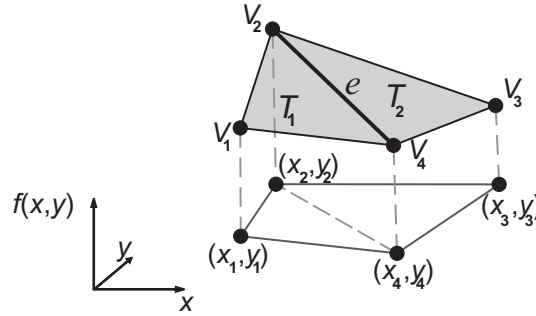
Vhodná voľba cenových funkcií je dôležitá, záleží na tom kvalita výstupu. Použitie nevhodnej funkcie je zobrazené v pravej časti Obrázku 3.2, aplikačná oblasť je rekonštrukcia obrazu. Za funkčné hodnoty boli zvolené intenzity pixlov. Pre farebné obrázky sa používa tiež intenzita alebo prístup uvedený v našej predchádzajúcej práci [Tót04b], ktorý využíva transformáciu do perceptuálne lineárneho farebného modelu.

Nižšie uvedené cenové funkcie používajú nasledujúcu závislosť od funkčných hodnôt: každá hrana **DDT** triangulácie množiny V , ktorá netvorí $CH(V)$ je ohodnotená po-

Test Test

Obrázok 3.2: Výsledok po použití vhodnej a nevhodnej cenovej funkcie.

mocou informácií získaných práve zo štyroch bodov, ktoré sú vrcholmi trojuholníkov obsahujúcich danú hranu. Situáciu znázorňuje Obrázok 3.3. T_1 a T_2 sú trojuholníky v triangulácii danej množiny, obsahujú hranu e ako svoju spoločnú hranu a sú popísané lineárnymi funkciami $P_1(x, y)$, $P_2(x, y)$.



Obrázok 3.3: Ilustrácia pre výpočet cenovej funkcie.

$$\begin{aligned} P_1(x, y) &= a_1x + b_1y + c_1 \\ P_2(x, y) &= a_2x + b_2y + c_2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Pomocou polynómov 3.4 popíšeme cenové funkcie, ktoré možno nájsť v [BGM04, DLR90, YBS01].

ABN (*angle between normals*) je hodnotou kosínusu uhla medzi normálami trojuholníkov T_1 a T_2 :

$$c^{ABN}(e) = n_1 \cdot n_2, \quad (3.5)$$

kde n_1 a n_2 značia normály trojuholníkov T_1 a T_2 .

JND (*jump in normal derivatives*) je zmena v normálach derivácií P_1 a P_2 cez hranu e :

$$c^{JND}(e) = \|n_x(a_1 - a_2) + n_y(b_1 - b_2)\|, \quad (3.6)$$

kde $(n_x, n_y)^\top$ je jednotkový vektor v $\mathbf{E}^2$, ktorý je ortogonálny na smer hrany e .

DLP (*deviations from linear polynomials*) meria chybu medzi lineárnymi polynómami

P_1 a P_2 v bodoch v_3 a v_1 :

$$c^{DLP}(e) = \|h\| ,$$

$$h = \begin{bmatrix} |P_1(x_3, y_3) - f(x_3, y_3)| \\ |P_2(x_1, y_1) - f(x_1, y_1)| \end{bmatrix} . \quad (3.7)$$

DP (*distances from planes*) meria vzdialenosť vrcholov v_1 a v_3 od P_2 a P_1 :

$$c^{DP}(e) = \|g\| , \quad g = \begin{bmatrix} \text{dist}(P_1, v_3) \\ \text{dist}(P_2, v_1) \end{bmatrix} , \quad (3.8)$$

$$\text{dist}(P_j, v_k) = \frac{|P_j(x_k, y_k) - f(x_k, y_k)|}{(a_j^2 + b_j^2 + 1)^{1/2}} .$$

SCF (*Sederberg's cost function*) je založená na meraní uhla medzi gradientmi P_1 a P_2 , váhované s veľkosťou gradientov:

$$c^{SCF}(e) = \|\nabla P_1\| \cdot \|\nabla P_2\| - \nabla P_1 \cdot \nabla P_2 , \quad (3.9)$$

$$\|\nabla P_i\| = (a_i^2 + b_i^2)^{1/2} .$$

Na aproximáciu **SCF** funkcie môže byť použitá nasledujúca cenová funkcia, jej vyčíslenie je lacnejšie ozn. **SCF-Apr**:

$$c^{SCF-Apr} = (|a_1| + |b_1|) \cdot (|a_2| + |b_2|) - (a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2) . \quad (3.10)$$

Pre účely rekonštrukcie obrazu podľa výsledkov testov Yu a spol. [YBS01] je najúspešnejšia **SCF**. Okrem uvedených cenových funkcií existujú aj ďalšie prístupy, ktoré priradujú cenu rôznym komponentom (vrcholom, hranám, trojuholníkom) na základe geometrických alebo iných vlastností [AKTD99, Bro91, DLR90].

Kapitola 4

Prehľad optimalizačných techník

Väčšina existujúcich **DDT** triangulácií je konštruovaná iteračným procesom, preto voľba úvodnej triangulácie hrá dôležitú úlohu. Zvyčajne sa používa Delaunayova triangulácia [Aur91], ktorej vybrané vlastnosti popíšeme v nasledujúcej časti.

4.1 Deterministické prístupy

Deterministické metódy značia skupinu algoritmov, kde každý krok je jednoznačne určený a náhodné kroky sú neprípustné. Uvedené algoritmy sú aproximáciou **MWT** (s výnimkou algoritmu, ktorý je uvedený v kapitole ako posledný), čo znamená, že je možné určiť kvalitu (mieru) aproximácie.

4.1.1 Lawsonova optimalizačná procedúra

Lawsonova optimalizačná procedúra (LOP) slúži na vytváranie lokálne optimálnej triangulácie. Jej konštrukcia a výsledná štruktúra je úzko spájaná s *Delaunayovou trianguláciou* - ozn. **DT**, ktorá patrí medzi historicky prvé a významné triangulácie aproximujúce **MWT**. V prvej časti tejto podkapitoly sa najprv budeme venovať vlastnostiam a konštrukčným technikám **DT**, ktoré potom budeme využívať pre **LOP**.

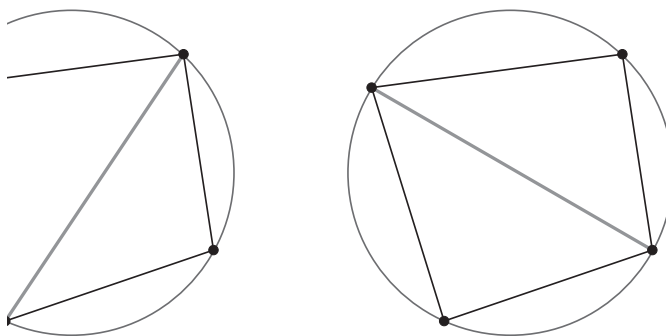
V praxi sa **DT** často používa na rôzne účely nielen v počítačovej grafike ale aj v iných odboroch. Najčastejšie sa definuje pomocou Voronoiových diagramov na základe princípu duality medzi týmito dvoma štruktúrami. Táto dualita a ďalšie vlastnosti sú podrobne popísané v Aurenhammerovej prehľadovej práci [Aur91].

Definícia 4.1.1. [Rip90] Majme množinu bodov $V = (v_i \in \mathbf{E}^n; i = 1, \dots, m)$, prvky množiny V budeme nazývať generátory. Voronoiova oblasť, bodu v_i je množina bodov, ktorá je bližšia (v danej metrike) ku v_i ako ku iným bodom z V . Zostrojením Voronoiovej oblasti pre každý bod z množiny rozdelíme celý priestor na disjunktné oblasti, ktoré majú spoločné len hranice. Dve Voronoiove oblasti sa nazývajú susedné, ak majú spoločnú

hranicu vo výslednej štruktúre. Spojením generátorov susedných Voronoiových oblastí získame trianguláciu množiny V , ktorú budeme nazývať Delaunayova triangulácia.

DT má optimálnu časovú zložitosť a vlastnosti, kvôli ktorým je často používaná na rekonštrukciu alebo aproximáciu. Myšlienka Voronoiových diagramov je generalizovaná pre priestory E^n , $n \in \mathbf{N}$, a teda k nej existuje aj príslušná duálna Delaunayova štruktúra (napr. v E^3 Delaunayova tetrahedralizácia). V nasledujúcej časti sa budeme zaoberať s prípadom $n = 2$.

Poznámka. V prípade kocirkularity štyroch (alebo viac) bodov z množiny V , **DT** nie je jednoznačne určená - Obrázok 4.1. V takomto prípade pre danú množinu generátorov (ktoré sú kocirkulárne) zvolíme ľubovoľnú trianguláciu. Konečným počtom neutrálnych preklápaní vieme dostať z jednej **DT** druhú **DT** [HOS96].



Obrázok 4.1: Dve rôzne **DT** triangulácie množiny.

Uvedieme dôležité vlastnosti **DT** triangulácií v rovine (existujú ich zovšeobecnenia aj vo vyšších dimenziách):

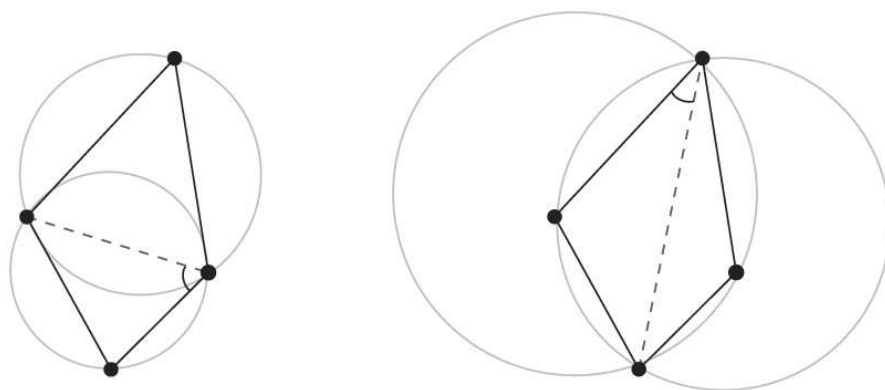
Veta 4.1.1. (Kritérium prázdneho kruhu) *Triangulácia $T(V)$ množiny bodov V v rovine je **DT** práve vtedy, ak opísaná kružnica ľubovoľného jej trojuholníka neobsahuje vo svojom vnútri bod z V .*

Dôkaz. Dôkaz tohto tvrdenia možno nájsť v knihe [PS85].

Veta 4.1.2. (Maximalizácia minimálneho uhla) ***DT** maximalizuje minimálny uhol v každom trojuholníku ako aj v celej triangulácii.*

Vlastnosť z Vety 4.1.2 znamená v praxi generovanie najviac rovnakouhlejších (equiangular) triangulácie. Triangulácia s danou vlastnosťou sa dlho považovala za vhodnú pre interpoláciu, panovala taká myšlienka, že triangulácie, ktoré obsahujú “úzke” trojuholníky, nie sú vhodné pre rekonštrukciu. Kritériá prázdneho kruhu a maximalizácie minimálneho uhla sú ekvivalentné - Obrázok 4.2.

Lokálna optimálnosť v **DT** (na základe Vety 4.1.1 a 4.1.2 je iná ako lokálna optimálnosť v prípade **DDT**). Je to kvôli špeciálnemu oceňovaniu hrán v **DDT**. Napriek tomu



Obrázok 4.2: Vyhovujúca a nevyhovujúca triangulácia v zmysle vety 4.1.1, 4.1.2.

niektoré existujúce efektívne nástroje na vytváranie **DT** pomôžu pri vytváraní lokálne optimálnych triangulácií pre **DDT**. Ich výstupy nebudú mať charakteristické vlastnosti **DT**, okrem aproximácie **MWT**. Zmena v nasledujúcich algoritmoch je práve v priradení cien k hranám.

Napriek pomerne malému počtu známych algoritmov v zmysle **DDT** triangulácie, pre vytváranie **LOT** triangulácií máme možnosť výberu z troch algoritmov. Asymptoticky najlepšie správanie má Dwyerov algoritmus s $T : O(n \log n)$. Ide o rozdeľuj a panuj (divide & conquer) metódu. Jej numerická stabilita je otázna v niektorých prípadoch a je aj z hľadiska implementovateľnosti náročnejšia ako ostatné metódy. Očakávaná časová náročnosť je $T : O(n \log \log n)$.

Ďalším spôsobom konštrukcie **LOT** je algoritmus používajúci postupné pridávanie vrcholov. Jeho zložitosť $T : O(n^2)$ nie je optimálna, ale pre rovnomerne rozložené body ukazuje lineárne správanie. Pre tento spôsob treba kvôli rýchlej lokalizácii pri pridávaní vrcholov používať špeciálne dátové štruktúry, čo zvyšuje pamäťovú náročnosť. Vzniklo veľa modifikácií, presný popis týchto metód a nové vylepšenie z hľadiska časovej a pamäťovej zložitosti možno nájsť v práci Kolingerovej a Žalika [KZ01].

Nasledujúci, tretí algoritmus nazývaný *Lawsonova optimalizačná procedúra* (známa aj ako lokálne optimalizačná procedúra alebo preklápací algoritmus) patrí medzi obľúbené nástroje na konštrukciu triangulácií. Je to iteračná procedúra založená na testovaní lokálnej optimálnosti hrán. Pseudokód algoritmu je znázornený na Obrázku 4.3.

Je výhodné držať si zoznam hrán, ktoré je potrebné testovať na lokálnu optimalitu. Najprv sú do zoznamu zaradené všetky hrany, odkiaľ po testovaní hrana je odstránená. Ak sa hrana vymení za alternatívnu diagonálu, tak do zoznamu sa zaradia hrany, ktoré vytvárajú striktné konvexný štvoruholník, v ktorej výmena diagonál prebehla. V každom iteračnom kroku sa testuje zoznam kandidátnych hrán, proces skončí, ak zoznam je prázdny. Pre naše účely najviac vyhovuje práve tento spôsob konštrukcie **LOT** pre **DDT**.

Poznámka. Výsledná triangulácia **LOP** je **DT**, ak oceňovanie hrán vyhovuje kritériu

Lawsonova optimalizačná procedúra - *LOP*

Vstup: počiatočná triangulácia

Výstup: lokálne optimálna triangulácia - *LOT*

```

1  {
2    while(triangulácia nie je lokálne optimálna){
3      if(hrana  $e$  nie je lokálne optimálna)
4        vymeň  $e$  s alternatívnou diagonálou;
5    }
6  }
```

Obrázok 4.3: Lawsonova optimalizačná procedúra - pseudokód.

prázdneho kruhu - Veta 4.1.1, ináč hovoríme o triangulácii vytvorenou *LOP*.

Veta 4.1.3. [Noc02] *LOP* je konečný, maximálny počet preklápaní je $O(n^2)$.

Dôkaz. Počet možných triangulácií danej množiny je konečný, a s každou iteráciou sa zmenší váha triangulácie. Hrana, ktorá raz bola odstránená sa už nevyskytne v triangulácii počas priebehu optimalizácie.

Táto rýchla iteratívna metóda nemusí vždy nájsť globálne optimum. V prípade rekonštrukcie obrazu vďaka dobrej počiatočnej triangulácii možno očakávať nadštandardné správanie. Problém pri *LOT* trianguláciách je, že sa nedá rozhodnúť, či dané riešenie je optimálne. Na riešenie tejto otázky by bolo potrebné preskúmať všetky možné triangulácie. *MWT* je tiež lokálne optimálna triangulácia. Ak by to tak nebolo, tak vymenením diagonál vo vnútri striktné konvexných štvoruholníkov by sme dosiahli trianguláciu s menšou váhou než *MWT*, čo je spor.

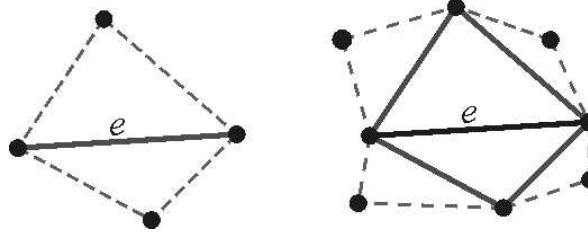
Veta 4.1.4. [Noc02] Pre ľubovoľnú množinu bodov V platí, že hrana, ktorá sa nachádza v každej *LOT* množiny V , je určite v *MWT*. Naopak ak platí, že hrana sa nenachádza v žiadnej *LOT* množiny V , potom nemôže patriť do *MWT*.

Táto veta platí aj pre *DDT*. Tvrdenie priamo vyplýva z lokálnej optimality *MWT*. Dôsledkom toho je rozdelenie hrán na tri disjunktné množiny: hrany vyskytujúce sa v každej *LOT*, hrany, ktoré nie sú v žiadnej *LOT*, hrany, ktoré sa vyskytujú len v niektorých *LOT*. Takto získame doteraz najväčší známy podgraf *MWT* nazývaný *LMT-skeleton* [Noc02].

Pri rovinných trianguláciách je cieľom získať súvislý podgraf *MWT*, ktorý obsahuje v sebe len také netriangulované oblasti, ktoré sa dajú reprezentovať ako jednoduchý polygón [CFGuN01]. Jednoduché polygóny v rovine vieme optimálne triangulovať v čase $T : O(n^3)$ Gilbertovým algoritmom [Gil79]. LMT-skeleton negarantuje vo všeobecnosti tieto predpoklady a táto problematika zostáva otvorená. Pre *DDT* triangulácie nie je možné zovšeobecniť Gilbertov algoritmus.

4.1.2 Look-ahead rozšírenie

Yu a spol. v [YBS01] poskytli tzv. *look-ahead* (ozn. **LAT**) rozšírenie **LOP**. Zmenou oproti originálnemu algoritmu (**LOP**) je prípad, keď testovaná hrana e je lokálne optimálna. V takom prípade sa vyšetruje lokálna optimalita hrán, ktoré vytvárajú striktné konvexný štvoruholník obsahujúci e ako svoju diagonálu - Obrázok 4.4.



Obrázok 4.4: Závislosť hrán v **LOP** (vľavo) a v **LAT** (vpravo).

Výber vhodnej triangulácie look-ahead štruktúry (ktorá je vytvorená z ôsmich bodov) vytvorenej výmenou diagonál prebieha na základe súčtu cien 13 hrán v danej metrike. Takto dosiahneme globálne optimálnu trianguláciu look-ahead štruktúry. Pseudokód algoritmu je znázornený na Obrázku 4.5.

Look-ahead triangulácia - **LAT**

Vstup: počiatočná triangulácia

Výstup: look-ahead triangulácia

```

1  {
2    while(zmena váhy triangulácie nie je 0){
3      if(ak hrana  $e$  nie je lokálne optimálna)
4        vymen  $e$  s alternatívnou diagonálou;
5      else
6        vyrieš lokálnu optimalitu hrán striktné konvexného štvoruholníka, ktorý obsahuje
         $e$  ako svoju diagonálu;
7    }
8  }
```

Obrázok 4.5: Look-ahead triangulácia - pseudokód.

V **LAT** počet iterácií je konečný z dôvodu, že počet triangulácií je konečný, a pri každej iterácii sa zmenší celková váha. Uvedený algoritmus konverguje rýchlejšie a zvyčajne dosahuje lepšie aproximačné správanie ako **LOP**. Globálne optimum však ani v tomto prípade nie je garantované. Vo všeobecnosti platí:

$$w(\mathbf{MWT}(\mathbf{V})) \leq w(\mathbf{LAT}(\mathbf{V})) \leq w(\mathbf{LOP}(\mathbf{V})). \quad (4.1)$$

V testoch z článku [YBS01] **LAT** produkovalo v každej iterácii lacnejšiu trianguláciu než **LOP**, čo sa dalo čakať zo spôsobu konštrukcie triangulácie. Autori poznamenali,

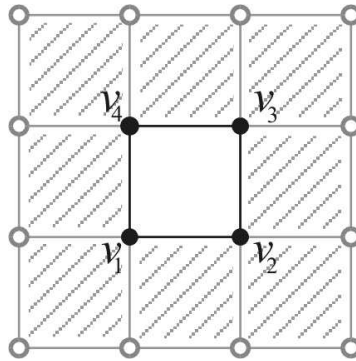
že niekedy už po prvej iterácii je výsledok dostatočne kvalitný. Aplikačná oblasť bola rekonštrukcia obrazu.

Poznámka. Uvedený look-ahead princíp budeme značiť ako look-ahead prvého stupňa. Generalizácia tejto myšlienky na hlbšie prehľadávanie môže priniesť kvalitnejšiu rekonštrukciu a rýchlejšiu konvergenciu. Cena za to je väčšia zložitosť. Otázkou je však efektivita pre rovnomerne rozložené dáta. V takomto prípade síce možno očakávať rýchlejšiu konvergenciu k riešeniu. Môže sa nastať ale situácia že, look-ahead nižšieho rádu s väčším počtom iteračných krokov môže produkovať z hľadiska kvality porovnateľné výsledky.

Poznámka. Okrem uvedeného look-ahead prístupu existujú aj iné formy využitia tejto myšlienky. Kolingerová v [Kol04] predstavila aproximáciou planárnej **MWT**, ktorá skombinuje myšlienku greedy s look-ahead vyhľadávaním pridaných hrán.

4.1.3 **DDT** na úrovni pixlov

Nasledujúca metóda je stavaná na rekonštrukciu obrazov. Je možné ju používať aj na rekonštrukciu rozptýlených dát, kde namerané hodnoty hľadanej funkcie formujú karteziánsku mriežku. **DDT** na úrovni pixlov pracuje nasledovne: rozdelí obraz na štvorce pozostávajúce zo štyroch susedných pixlov a vo vnútri týchto štvorcov sa potom vyrieši problém **MWT** - Obrázok 4.6.



Obrázok 4.6: Základná štruktúra pre **DDT** na úrovni pixlov.

Triangulácia vytvorených štvorcov (napr. $v_1v_2v_3v_4$) prebieha na základe jednoduchého testu. Bude to diagonála, ktorej diferencia funkčných hodnôt koncových bodov je menšia, teda:

$$\min(|f(v_1) - f(v_3)|, |f(v_2) - f(v_4)|) . \quad (4.2)$$

Rozšírením tejto myšlienky je vnímanie digitálneho obrazu ako Markovovho náhodného poľa [Wik06]. To znamená že funkčná hodnota každého pixelu závisí od funkčných hodnôt susedných pixelov a nezávisí od ostatných. To je predpokladom tzv. lokálnej

stacionarity, ktorá ale neplatí vo všeobecnosti. Pre prípady, kde sa v obraze vyskytne hrana pomôže kvalitnejšie rekonštruovať dáta. V zmysle zavedenej štruktúry to znamená zohľadnenie riadenia triangulácií ôsmich susedných štvorcov (zašráfované oblasti - Obrázok 4.6), pri výbere diagonály. Pseudokód algoritmu je znázornený na Obrázku 4.7.

DDT na úrovni pixlov

Vstup: digitálny obraz

Výstup: **DDT** triangulácia na úrovni pixlov

```

1  {
2    vytvor štruktúru štvorcov;
3    for(pre všetky štvorce)
4      trianguluj štvorce optimálne;
5    for(pre všetky štvorce)
6      if(riadenie triangulácie okolitých štvorcov je signifikantné && riadenie triangulácie
       skúmaného štvorca je opačné){
7        vymeň diagonálu;
8      }
9  }
```

Obrázok 4.7: **DDT** triangulácia na úrovni pixlov - pseudokód.

Časová náročnosť výpočtov pre uvedeného prístupu je na úrovni bilineárnej interpolácie, čo umožňuje použitie v reálnom čase. Kvalita výsledkov je nižšia než pri doteraz spomínaných **DDT** metódach, ale ešte stále je nad úrovňou bilineárnej interpolácie. Cieľom uvedenej techniky nie je dosiahnutie **MWT**, ale rýchla realizácia, presný popis metódy sa nachádza v článku [SW04]. Konkrétne využite tejto myšlienky pre zlepšenie výstupov z digitálnych kamier bolo uvedené v [SW03].

4.2 Stochastické prístupy

Stochastické metódy sa snažia nájsť globálne optimálne riešenie pomocou náhodných krokov. Snahou je dosiahnuť riešenie, ktoré je bližšie ku optimu ako to umožnia existujúce deterministické prístupy. Riadenie náhodných krokov prebieha pomocou nastavenia parametrov. Úspešnosť a rýchlosť nájdenia optima je silne závislá na nastavení týchto parametrov.

4.2.1 Simulované žihanie

Najznámejším stochastickým prístupom pre triangulácie je *simulované žihanie* (*simulated annealing*) - ozn. **SA** [KH01, Sch93]. Ide o iteratívnu techniku, ktorá je založená

na poznatkoch o priebehu fyzikálnych procesov v prírode. Triangulácia **MWT** je analógiou dosiahnutia globálne minimálneho energetického stavu kryštálov tekutín, pomocou postupného chladenia. Vhodným nastavením konverguje rýchlejšie ako metódy, ktoré vždy berú do úvahy len najlepšie riešenia.

SA je založená na pravdepodobnosti a snaží sa vyhýbať lokálne optimálnym riešeniam, ktoré môžu vzbudzovať dojem globálnej optimality. Obeťami takýchto pomýlení sa často stávajú výsledky, ktoré poskytujú deterministické metódy. V každom iteračnom kroku sú akceptované zlepšujúce i zhoršujúce kroky. *Krokom* budeme nazývať výmenu diagonál v striktnie konvexnom štvoruholníku. Pri každom iteračnom kroku je nastavená hranica možných zlepšujúcich krokov. Zhoršujúce kroky sa akceptujú náhodne a rastúcim počtom iteračných krokov sa znižuje pravdepodobnosť ich vykonania (toto sa nazýva “*chladiaci proces*”). Pseudokód algoritmu je znázornený na Obrázku 4.8.

Simulované žihanie - SA

Vstup: počiatočná triangulácia

Výstup: **SA** triangulácia

```

1  {
2    for(k=1; k ≤ ntemp; k++){
3       $t_A = r^k t_0$ ;
4      for(l=1; l ≤ nlimit; l++){
5        while(počet dobrých krokov ≤ glimit){
6          vyber náhodne hranu  $e$  z triangulácie;
7          if(existuje alternujúca diagonála ku  $e$ ){
8            if(striktnie konvexný štvoruholník, ktorý obsahuje  $e$ , nie je optimálne
triangulovaný){
9              vymeň diagonálu;
10             }
11             else{
12               náhodný výber čísla  $\phi$ ,  $0 \leq \phi \leq 1$ ;
13               if( $\phi \leq e^{-c(e)/t_A}$ )
14                 vymeň diagonálu;
15             }
16           }
17         }
18       }
19     }
```

Obrázok 4.8: Simulované žihanie - pseudokód.

Vysvetlenie parametrov k uvedenému pseudokódu:

- *ntemp* - počet iterácií (v koľkých krokoch je teplota znížená), štandardné nastavenie je okolo 20.

- *nlimit*, *glimit* - počet vykonaných krokov v každej iterácii, počet vykonaných správnych krokov v každej iterácii. Zvyčajne sa volia tieto čísla ako 5 alebo 10 násobok počtu hrán v triangulácii.
- t_0, t_A - štartovacia teplota (zvyčajne 0.1), aktuálna teplota.
- r - rýchlosť “*chladenia*”, jeho hodnota je zvyčajne 0.95 alebo 0.9.
- Pod označením terminológiou “*dobrý krok*” sa rozumie taká výmena diagonál, ktorá zredukuje celkovú váhu triangulácie.

Simulované žihanie je veľmi citlivé na nastavenie parametrov. Ak sa spraví príliš veľa správnych krokov na začiatku, tak s veľkou pravdepodobnosťou sa nájde len lokálne optimum. Zvolením štartovacej teploty sa dá nastaviť rýchlosť konvergenzie. Pri zvolení rýchlejšej konvergenzie sa preskúša menej možností, čím sa zvýši pravdepodobnosť, že metóda nájde len lokálne optimum. Na druhej strane pomalá konvergenzia znamená veľkú časovú náročnosť. Vzhľadom na špeciálne rozloženie bodov je rozumné experimentovať s nastaveniami **SA**, lebo uvedené hodnoty parametrov boli navrhnuté pre všeobecný prípad.

Myšlienka simulovaného žihania je popísaná v [KH01, Sch93], kde možno nájsť aj jej použitie pri kompresii obrazu. Barnes a spol. v [BHJ99] skombinovali simulované žihanie so zjemňovaním siete (*mesh refinement*).

4.2.2 Genetická optimalizácia

Genetická optimalizácia - ozn. **GO** - ponúka možnosť ako skombinovať rôzne kritériá (jednak optimalizačné metódy, ako aj rôzne cenové funkcie). Je to kombinácia deterministickej a stochastickej metódy, založená na napodobňovaní evolúcie.

Ako prvý krok sa vygeneruje množina triangulácií, napríklad doteraz popísanými algoritmi. Táto množina sa v terminológii nazýva “*úvodná populácia*”. Ku každému prvku vygenerovanej množiny je priradená pravdepodobnosť podľa toho, ako dobre aproximujú cieľový stav, **MWT**. V každom iteračnom kroku sa vytvára nová populácia. Počet členov v každej generácii počas celého procesu je konštantný. Prvky sú vybrané z prechádzajúcej generácie podľa ich pravdepodobnostných hodnôt. To spôsobí, že lepšie triangulácie sa tam vyskytujú viackrát a nevhodné sa eliminujú. Binárna operácia “*prekríženia*” (*crossover*) je jednou z výhodných vlastností **GO**. Ako aj názov hovorí, ide o skombinovanie dvoch triangulácií, o výmenu genetickej informácie (náhodne sa vyberajú triangulácie, ktoré sa dostávajú do tejto fázy). Priebeh vyzerá nasledovne: obidve triangulácie sú rozdelené priamkou a potom sa skombinujú časti, ktoré zostali na rôznych stranách po rozdelení. Ak sme mali triangulácie **A** a **B**, tak sa náhodnou priamkou rozdelia na **A**₁, **A**₂, **B**₁, **B**₂ výsledné triangulácie budú **A**₁ ∪ **B**₂ a **A**₂ ∪ **B**₁. V skutočnosti je táto operácia najviac náročná - $T : O(\log n)$. Ďalšia operácia ktorá sa slúži na modifikáciu populácie je unárna operácia “*mutácie*” - $T : O(n)$. V každej

triangulácii sa pre každú hranu s malou pravdepodobnosťou (zvyčajne $p < 0.01$) spraví preklápanie hrán. Ani tento princíp nezaručí nájdenie globálneho optima. Zvolenie takej úvodnej generácie triangulácií, ktorá veľmi dobre aproximuje daný problém skrýva v sebe nebezpečie, že nájdeme len lokálne optimum. Rôznorodosť zrýchli konvergenciu riešenia. Presný popis **GO** možno nájsť v [Kol99, KF01].

Genetická optimalizácia - **GO**

Vstup: množina vrcholov $V \in E^2$

Výstup: **GO** triangulácia

```

1  {
2    inicializuj počiatočnú populáciu  $P_0$ ;
3    inicializuj čas  $T = 1$ ;
4    while(nie je splnená ukončovacia podmienka){
5       $T = T + 1$ ;
6      aplikuj operácie mutácie a prekríženia na celú populáciu;
7      vyber novú generáciu  $P_T$  z  $P_{T-1}$ ;
8    }
9    vráť najlepšie riešenie problému;
10 }
```

Obrázok 4.9: Genetická optimalizácia - pseudokód.

Ukončovacou podmienkou môže byť určitý počet generácií alebo malá odlišnosť ohodnotenia generácií. **GO** je asymptoticky lacná triangulácia - $T : O(n \log n)$, ak si vytvorenie počiatočnej populácie nevyžiada vyššiu časovú náročnosť ako $T : O(n \log n)$. Napriek tomu aj pri voľbe lacných triangulácií (napr. **DDT** na úrovni pixlov) zostáva úloha vyriešiť náročnú operáciu prekríženia triangulácií v množstve generácií. Autori odporúčajú 100 generácií po 50 členov populácie. Kvôli týmto musí byť preskúmaných až 5000 triangulácií, čo je obrovské množstvo a napriek obdivuhodným vlastnostiam nedovolí praktické použitie tejto metódy.

Poznámka. Voľba jednotlivých operácií môže byť aj iná, dávajúc veľkú pestrosť **GO**.

4.3 Alternatívne prístupy

4.3.1 Ko-triangulácia

Odlišný spôsob rekonštrukcie farebných obrazov cez triangulácie bol popísaný v článku [WWT*98] pomocou tzv. *ko-triangulácii*. Základnou myšlienkou je použitie aproximácie pomocou po častiach lineárnych funkcií vo vyšších dimenziách. Pre N dátových množín, ktoré reprezentujú N rôznych D -rozmerných závislých funkcií, ko-triangulácia zostrojí

D –rozmerný po častiach lineárny objekt v $D + N$ rozmernom priestore, a N ortogonálnych projekcií tohto objektu dáva dobrú aproximáciu N dátových množín. Takto získaný D –rozmerný lineárny objekt poskytuje aproximáciu pre N rôznych funkcií definovaných na tom istom obore.

V prípade rekonštrukcie obrazu na rovinných dátach máme zadefinované tri nezávislé funkcie (farebné informácie). V 5D priestore sa zostrojí 2D po častiach lineárna funkcia tak, že ortogonálne projekcie do tých súradnicových osí, ktoré nesú farebnú informáciu, sú trianguláciami. Výsledky neboli relevantné (pre účely rekonštrukcie obrazov), aj preto lebo autori nepoužívali dátovo závislé metódy. Ďalej sa touto myšlienkou nebudeme zaoberať.

4.3.2 Vrcholovo založené ohodnotenie

Myšlienku priraďovania cien hranám je možné ďalej rozvíjať na ohodnotenie vrcholov. Brown v [Bro91] ukázal metódu, kde vrcholom priradil sumu cien incidentných hrán (alebo sumu štvorcov ich cien). Nevýhodou tohto prístupu je problém s konštrukciou cenových funkcií, ktorá nie je taká intuitívna ako u hranovo založených **DDT**.

Princíp získania **LOT** triangulácie pre vrcholovo založené **DDT** možno nájsť v [Bro91] a je analógiou **LOP** pre **DDT**. Takto je možné vygenerovať všetky hranovo založené **LOP** triangulácie, ktoré používajú normu l_1 alebo l_2 , a zároveň vzniknú ďalšie, nové možnosti priraďovania cenových funkcií. Napríklad **DT** je vytvorená, ak za cenu vrchola je braný súčet Sobolevovej semi-normy¹ trojuholníkov v 2.5D obsahujúcich daný vrchol.

¹Sobolevova semi-norma trojuholníka v **DDT** je plocha trojuholníka v xy priemete, krát veľkosť gradientu interpolačnej plochy trojuholníka v **DDT** interpolácii [Rip90].

Kapitola 5

Predbežné výsledky

Algoritmy popísané v nasledujúcej časti sú výsledkom z našich publikovaných prác [Tót04b, Tót04a, TVFG05].

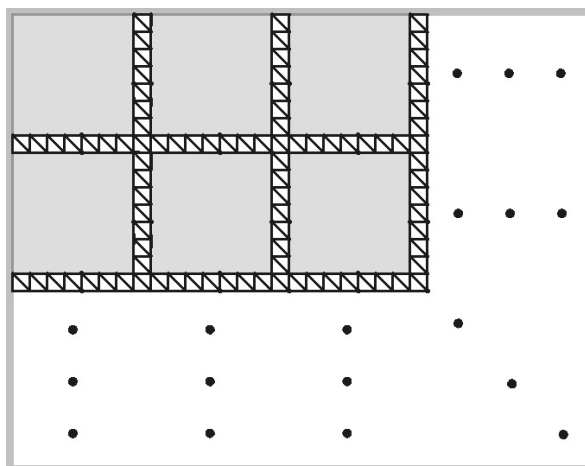
5.1 Rozdelenie na bloky

Nasledujúci návrh sa snaží skombinovať výhodné vlastnosti existujúcich prístupov. Cieľom je vytvorenie takej štrukturalizácie dát, ktorá umožní reálne použitie **DDT** triangulácií, a pritom nedegraduje ich rekonštrukčné vlastnosti, ako napríklad **DDT** na úrovni pixelov. Hlavnou aplikačnou oblasťou je rekonštrukcia obrazov.

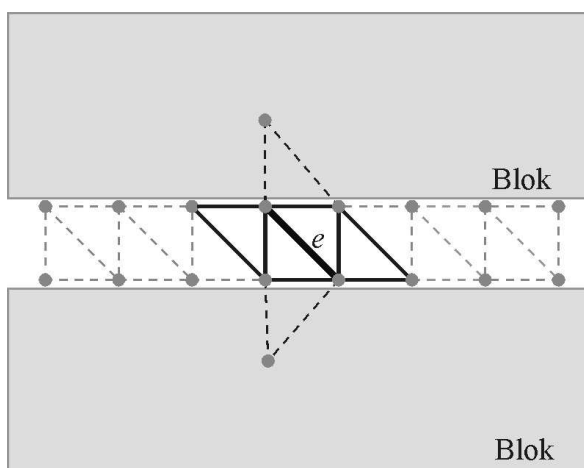
Euklidovská dĺžka hrán v 2D priemete uvedených triangulácií je málo rozptýlená pre aplikačnú oblasť rekonštrukcie obrazov. Teda tieto triangulácie majú skôr lokálny charakter, extrémne dlhé hrany sa v nich vyskytujú len výnimočne. Na tomto základe je postavená myšlienka rozdeliť obraz na bloky - obdĺžniky, pričom každý bod musí ležať práve v jednom bloku. Vo vnútri jednotlivých blokov sa vyrieši aproximácia **MWT** už známymi metódami, alebo sa vygenerujú všetky možnosti a vyberie sa z nich **MWT**. Ako počiatočná štruktúra medzi blokmi bude braná regulárna triangulácia - Obrázok 5.1.

Úlohou je prepojiť jednotlivé bloky takým spôsobom, aby vzbudzovali vizuálne príjemný dojem, a pritom by neboli výpočtovo náročné. Na tento účel použijeme jeden look-ahead (prvého stupňa) prechod cez množinu hrán, ktoré nepatria do žiadneho bloku a v počiatočnej (regulárnej) triangulácii majú inú orientáciu ako súradnicové osi. Tento zoznam budeme nazývať *zoznamom aktívnych hrán*. Ide o diagonály štvorcov, ktoré sa využívajú na prepájanie blokov. Zoberme konkrétnu hranu e zo spomínaného zoznamu - Obrázok 5.2. Look-ahead optimalizácia prvého stupňa hrany e nemení ostatné hrany zo zoznamu aktívnych hrán, a prepojí susediace bloky. Pseudokód algoritmu je znázornený na Obrázku 5.3.

Veľkosťou a spôsobom triangulácie jednotlivých blokov je možné riadiť výpočtovú zložitosť. Príliš malý blok indikuje horšiu kvalitu, veľké bloky môžu spomaliť výpočet.



Obrázok 5.1: Štruktúra segmentovania obrazu na bloky.



Obrázok 5.2: Look-ahead prvého stupňa hrany e .

Rozdelenie na bloky je vhodné na paralelné výpočty. Veľmi praktická je vlastnosť, že jednotlivé bloky môžu byť vyrátané postupne. V takomto prípade je potrebné spraviť “zošívanie” so susednými blokmi už spomínaným spôsobom. Ak sa obraz rozdelí na také veľkosti blokov, ktoré je možné vyrátať v reálnom čase, tak táto metóda môže byť uplatnená v širokej škále aplikácií. Jednotlivé bloky je možné triangulovať rôznymi algoritmami, napríklad môžeme určiť prioritu jednotlivých blokov pomocou hranových detektorov.

Uvedený prístup je možné aplikovať len na dáta, ktoré sú organizované do karteziánskej mriežky ako obraz alebo digitálne výškové mapy (*digital elevation map* - DEM). V iných prípadoch prichádza ku strate výhody rýchleho prepojenia blokov.

Triangulácia pomocou rozdelenia na bloky

Vstup: digitálny obraz

Výstup: triangulácia

```

1  {
2    rozdeľ obraz na bloky;
3    trianguluj jednotlivé bloky;
4    vytvor regulárnu trianguláciu medzi blokmi;
5    vytvor zoznam aktívnych hrán;
6    for(pre hrany zo zoznamu aktívnych hrán)
7      aplikuj look-ahead krok prvého stupňa;
8  }
```

Obrázok 5.3: Triangulácia pomocou rozdelenia na bloky - pseudokód.

5.2 Simulované žíhanie s využitím look-ahead stratégie

Zvýšenie efektivity **SA** je myšlienkou ďalšieho nového prístupu. Ide o kombináciu **LA** a **SA** prístupov, kvôli tomu budeme označovať túto metódu ako simulované žíhanie s využitím look-ahead stratégie, ozn. **SALA**.

V klasickom **SA**, ak bola hrana lokálne optimálna, tak s určitou pravdepodobnosťou sa táto lokálna optimalita porušila výmenou diagonál. Modifikácia spočíva v tom, ak táto výmena nenastane. Vtedy bude na hranu aplikované look-ahead hľadanie optimality. Takto je možné očakávať zvýšenie rýchlosti konverencie a lepšiu aproximáciu **MWT**. Pseudokód algoritmu **SALA** sa vo veľkej časti zhoduje so pseudokódom **SA**, uvedieme len modifikovanú časť, ktorá v **SA** zodpovedá riadkom 8 – 17 - Obrázok 5.4.

Nastavenie parametrov **SALA** je odlišné od spôsobu v **SA**, lebo má iné správanie. Novým parametrom je stupeň look-ahead prístupu. Úlohou zostáva nájsť ich vhodné nastavenie pomocou experimentov. V prípade rekonštrukcie obrazu stačí použitie look-ahead optimalizácie hrany prvého stupňa, ale pre inak rozmiestnené body môže byť výhodou look-ahead optimalizácia vyššieho stupňa.

Uvedenú modifikáciu je možné uplatniť aj na iné účely ako rekonštrukciu obrazov.

5.3 Quasi - DDT

Zmena chápania optimálnej triangulácie striktné konvexných štvoruholníkov vedie k vytváraniu novej skupiny triangulačných metód - pomenované **Quasi-DDT**. Namiesto uvažovania ceny piatich hrán (vytvárajúce hrany a diagonála) je do úvahy braná len cena diagonály. Testovanie lokálnej optimálnosti hrany e prebieha na základe uvažovania ceny e a jej alternatívnej hrany. Takáto výmena diagonál skrýva v sebe nebezpečenstvo,

Simulované žíhanie s využitím look-ahead - *SALA***Vstup:** počiatočná triangulácia**Výstup:** *SALA* triangulácia

```

7      if(existuje alternujúca diagonála ku  $e$ ){
8          if(striktne konvexný štvoruholník, ktorý obsahuje  $e$  nie je optimálne triangu-
          lovaný){
9              vymeň diagonálu;
10         }
11     else{
12         náhodný výber čísla  $\phi$ ,  $0 \leq \phi \leq 1$ ;
13         if( $\phi \leq e^{-c(e)/t_A}$ )
14             vymeň diagonálu;
15         else
16             look-ahead optimalizácia  $e$ ;
17     }
18 }
```

Obrázok 5.4: Simulované žíhanie s využitím look-ahead - pseudokód.

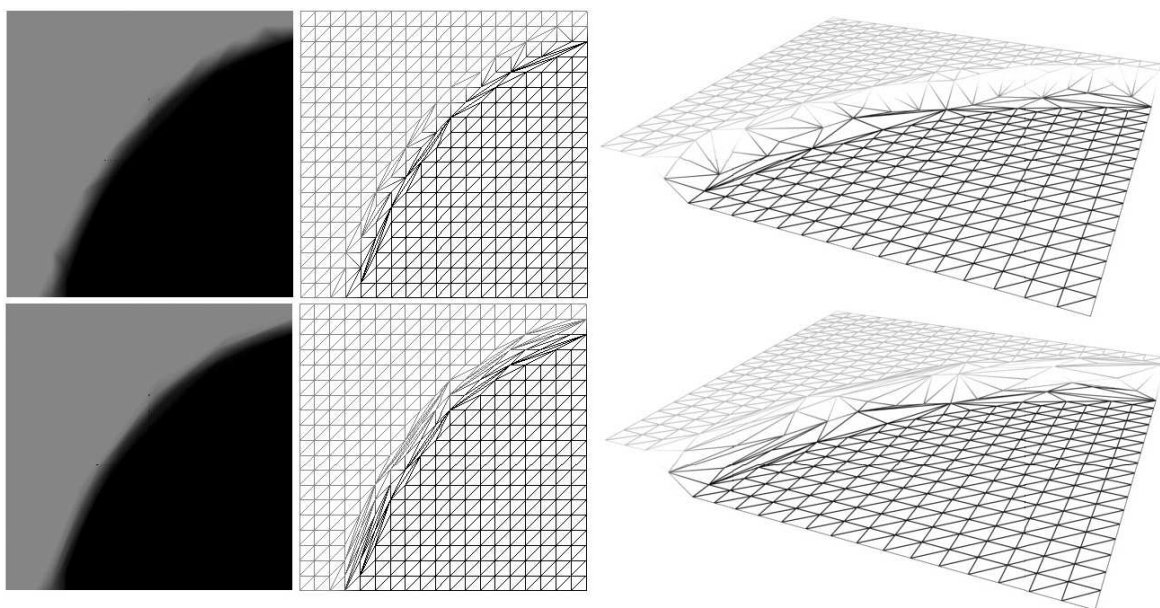
že celková váha triangulácie vzrastie. To znamená pokles miery aproximácie *MWT*, zníži sa efektívnosť heuristík, nastanú problémy s konvergenciou a poruší sa matematický model rekonštrukcie. Napriek uvedeným negatívnym vlastnostiam majú praktický význam pre oblasť rekonštrukciu obrazov. V oblastiach, kde sa vyskytujú v obrazoch hrany, v niektorých prípadoch vytvárajú priaznivejšie výsledky ako klasické *DDT* metódy. Ako príklad uvedieme porovnanie medzi *LOP* a *Quasi-LOP* - Obrázok 5.5.

LOP v oblasti hrán vytvára tzv. “*dvojité hrany*”, medzi ktorými vygeneruje vrstvu trojuholníkov, ktoré slúžia na rekonštrukciu hladkých zmien cez hrany. Z teoretického hľadiska je to správny výsledok (lebo sa snaží vytvárať adekvátny farebný prechod cez hrany), ale práve táto oblasť obsahuje mnoho artefaktov. V prípade *Quasi-LOP* je vytvorená len jedna hrana a takto sa zabráni vzniku artefaktov.

Z praktického hľadiska ide o významnú skupinu metód, ktorá poskytuje alternatívu ku popísaným triangulačným prístupom. Pri rekonštrukcii vytvára artefakty iného charakteru ako klasické *DDT* metódy. V situáciách, kde uvedené metódy vytvárajú nepriaznivé výsledky, môžu priniesť kvalitnejšiu rekonštrukciu.

5.4 Rozšírenie *DDT* do vyšších dimenzií

V porovnaní s rovinným prípadom optimálne triangulácie vo vyšších dimenziách sú menej preskúmané. Je to aj vďaka rozličným (zložitejším) vlastnostiam a menšej aplikačnej oblasti. Optimálnym 3D trianguláciám sú venované časti prehľadových prác [BE95, Ede00].



Obrázok 5.5: Rekonštrukcia hrany pomocou **LOP** (horný riadok), **Quasi-LOP** (dolný riadok) metódy pri použití cenovej funkcie **SCF**.

Pri rovinných trianguláciách sme popísali vzťah **DT** a **LOP**. Pre 3D prípad však zovšeobecnie tohto optimalizačného prístupu zlyhá vo vytváraní **DT**. Špeciálne upravená modifikácia s postupným pridávaním vrcholov vytvorí **DT** pre 3D, bolo to predstavené v článku od Joe [Joe91]. Tento modifikovaný algoritmus ale nevyhovuje našim cieľom. Vo všeobecnosti **DT** vo vyšších dimenziách nemajú také priaznivé vlastnosti ako v 2D, kde sa využívajú na rôzne simulácie pomocou metódy konečných prvkov. Vo vyšších dimenziách sa často využívajú ako úvodné triangulácie, ktoré sú ďalej optimalizované, aby sa z nich odstránili simplexové nevhodného tvaru. Vytváranie vhodných triangulácií v 3D pre metódu konečných prvkov je popísané v článkoch [MJ02, MTG04].

Triangulácie zachovávajúce významné črty vo volumetrických dátach boli použité v prácach Marchesin a spol. [MDM04] a Roxborough a Nielson [RN00]. Cieľom použitých prístupov bola aproximácia pôvodnej dátovej množiny s menším počtom dát. Použili na to zjemňovanie siete kombinované s metódou rozdelenia najdlhšej hrany (*longest edge split method*). Dôsledkom toho tvar výsledných tetrahedronov je limitovaný kongruentnými kópiami tetrahedronov zo začiatkovej štruktúry. Naším cieľom ale nie je aproximovať dané dáta, ale korektne ich rekonštruovať. Kvôli tomu poznatky z uvedených zdrojov sa nedajú použiť v prípade n -dimenzionálnej **DDT**.

DDT pre 3D prípad boli predstavené v práci Lee [Lee00]. Bola použitá optimalizačná technika simulované žihanie na získanie **DDT**, a používala sa topologická transformácia 3 – 2 preklápanie. Za cenu triangulácie je braný súčet cenových funkcií priradených k stenám¹. Uvedené výsledky takéhoto zovšeobecnenia do 3D nie sú

¹Počet stien v 3D je závislý od spôsobu triangulácie, čo otvára diskusiu o matematickej korektnosti

presvedčivé.

Rozšírenie **DDT** do vyšších dimenzií uvedené v tejto kapitole je výsledkom našej výskumnej činnosti [TVFG05].

5.4.1 Problém rozšírenia a jeho riešenie

Existujúce prístupy **DDT** z 2D sú založené na konštantnom počte simplexov podľa Tvrdenia 2.2. Vo vyšších dimenziách také tvrdenie neplatí, počet k –simplexov $k = 1, \dots, n$ sa mení v závislosti od spôsobu triangulácie. Nie je možné priradiť cenovú funkciu k jednotlivým k –simplexom, tak aby sa dalo korektne minimalizovať súčet cenových funkcií. Hľadáme také riešenie, ktoré je nezávislé od topologických transformácií, ktoré zmenia počet k –simplexov.

Vrcholovo založené **DDT** vyhovujú stanoveným cieľom, lebo počet vrcholov (0–simplexov) nezávisí od spôsobu triangulácie. Návrh cenových funkcií v 2D pre ohodnotenie vrcholov nie je ľahký a intuitívny. Vo vyšších dimenziách sa táto úloha stáva ešte komplikovanejšou a zatiaľ neexistuje jej riešenie. Spôsob optimalizácie je tiež otvorenou otázkou.

Z vlastností triangulácií vyplýva, že $\mathbf{CH}(\mathbf{V})$ sa nezmení topologickými transformáciami. Teda objem $\mathbf{CH}(\mathbf{V})$ zostáva nezmenený, čo vedie k myšlienke váhovať objem n –simplexov. Na základe ich vlastností, ako vystihujú významné črty reprezentované v dátach, by mala byť priradená váhová funkcia. Nižšia váha bude znamenať lepšie správanie. To znamená, že úloha n –dimenzionálnej **DDT** je minimalizáciou váhovaného objemu triangulácie:

$$c(\mathbf{T}(\mathbf{V})_{optimal}) = \min_{\mathbf{T}(\mathbf{V}) \in \Omega} \left(\sum_{\sigma_n \in \mathbf{T}(\mathbf{V})} (V(\sigma_n) \cdot w(\sigma_n)) \right), \quad (5.1)$$

kde σ_n je n –simplex, $V(\sigma_n)$ je objem n –simplexu a k nemu priradená váha je ozn. $w(\sigma_n)$.

Uvedená formulácia je ekvivalentá problému **MWT** z 2D. Minimalizácia predstaveným spôsobom je nezávislá od spôsobu triangulácie množiny $\mathbf{V}$. Napriek tomu uvedená myšlienka je použiteľná len v prípade, ak vieme nájsť vhodné váhové funkcie. Ich hľadaniu je venovaná nasledujúca časť práce.

5.4.2 Váhové funkcie

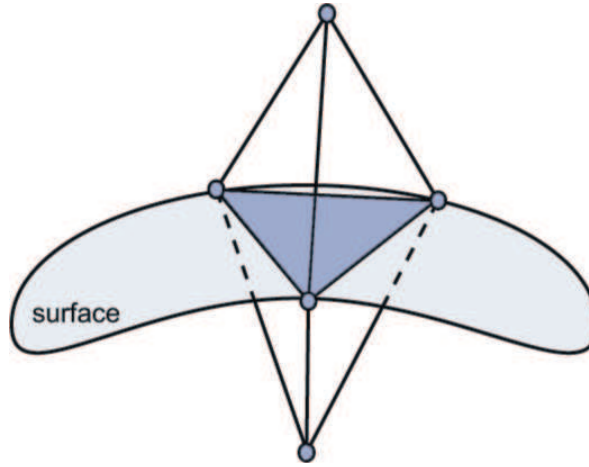
Určenie vhodných váhových funkcií je závislé od aplikačnej oblasti. Vo všeobecnosti sa ale bude preferovať riešenie, ktorý rekonštruje vysokofrekvenčné oblasti, dbá na kvalitnú rekonštrukciu častí medzi rôznymi oblasťami v dátach.

Jeden z možných prístupov je založený na variancii dát. Snaha zachovať oblasti s nízkou varianciou znamená korektnú rekonštrukciu vysokofrekvenčných oblastí. Pre uvedenú optimalizáciu.

triangulácie to znamená generovanie hyperstien $((n-1)$ -simplexov) s nízkou varianciou. Teda váhová funkcia je založená na variancii funkčných hodnôt z vrcholov n -simplexu:

$$w(\sigma_n) = \text{Variance}(z_{n_1}, z_{n_2}, \dots, z_{n_{n+1}}), \quad (5.2)$$

kde $w(\sigma_n)$ je váhová funkcia pre n -simplex σ_n a z_n , $i = 1, \dots, n+1$ sú funkčné hodnoty priradené k vrcholovom n -simplexu. Situácia je ilustrovaná pre prípad v 3D - Obrázok 5.6. Pre danú päťicu bodov existujú dva spôsoby triangulácie (zobrazené na Obrázku 2.2). Voľba načrtnutá na Obrázku 5.6 - produkuje nižší váhovaný objem ako druhá možná konfigurácia, a lepšie vystihuje črty reprezentované v dátach.



Obrázok 5.6: Príklad korektnej tetrahedralizácie vzhľadom na varianciu stien.

Ďalšou možnosťou je použitie existujúcich cenových funkcií z 2D. Cenové funkcie popísané v odseku 3.2 sú založené na vlastnosti, že každá hrana (ktorá nie je $\mathbf{CH}(\mathbf{V})$) je obsiahnutá práve v dvoch trojuholníkoch. Vo vyšších dimenziách každá hyperstena $((n-1)$ -stena), neležiaca v $\mathbf{CH}(\mathbf{V})$ je obsiahnutá práve v dvoch n -simplexoch, a teda existuje štruktúra $n+2$ vrcholov (vytvorená z dvoch n -simplexov), ktorá je analogická k prípadu z 2D. V 3D to znamená že pre každú stenu existujú dva tetrahedrony, a vytvorená štruktúra je bipyramída. Pre tieto hypersteny môžu byť 2D cenové funkcie pôvodne určené pre oceňovanie hrán jednoducho zovšeobecnené do vyšších dimenzií. Našou snahou je však určenie váhovej funkcie pre n -simplex, ale máme k dispozícii informácie len o hyperstenách. Vo všeobecnosti platí že každý n -simplex obsahuje práve $n+1$ hyperstenu $((n-1)$ -simplexov). Ak za váhovú funkciu berieme priemer zovšeobecnených cenových funkcií určených pre $n+1$ hyperstien, tak dostaneme váhovú funkciu s hľadanou vlastnosťou. Ako konkrétny príklad uvedieme zovšeobecnenie **SCF** - popísané pre 2D prípad v odseku 3.2, budeme ju ozn. ako **GSCF**. Pre n -dimenzionálny prípad GSCF meria uhol medzi gradientmi nadrovín, ktoré obsahujú n -simplexy zdieľajúce spoločnú $(n-1)$ -stenu v $(n+1)$ -dimenzionálnom priestore (obor hodnôt a funkčná hodnota) násobené veľkosťami gradientov:

$$c^{GSCF}(\sigma_{n-1}) = \|\nabla P_1\| \cdot \|\nabla P_2\| \cdot (1 - \cos(\alpha)) = \|\nabla P_1\| \cdot \|\nabla P_2\| - \nabla P_1 \cdot \nabla P_2, \quad (5.3)$$

kde $\nabla P_1, \nabla P_2$ sú gradienty nadrovín v $(n+1)$ D obsahujúce dané n -simplexy, $\|\nabla P_1\|$ a $\|\nabla P_2\|$ sú veľkosti gradientov, a α je uhol medzi nimi. Rovnice hyperrovín $P_1(x)$ a $P_2(x)$ sú:

$$P_i(x) = a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \dots + a_{i,n}x_n + a_{i,n+1}, \quad i = \{1, 2\}. \quad (5.4)$$

Gradienty hyperrovín sú dané nasledujúcim vzťahom:

$$\nabla P_i = (a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n}), \quad i = \{1, 2\}, \quad (5.5)$$

a veľkosti gradientov sú:

$$\|\nabla P_i\| = \sqrt{a_{i,1}^2 + a_{i,2}^2 + \dots + a_{i,n}^2}, \quad i = \{1, 2\}. \quad (5.6)$$

Pre daný n -simplex váhová funkcia, ktorá používa generalizované cenové funkcie, vyzerá nasledovne:

$$w(\sigma_n) = \frac{\sum_{\sigma_{n-1} \in \sigma_n} c^{GSCF}(\sigma_{n-1})}{n+1}. \quad (5.7)$$

Ostatné cenové funkcie môžu byť generalizované podobným spôsobom, ako sme to uviedli pre **SCF**. Geometrické vlastnosti môžu byť tiež obsiahnuté vo váhových funkciách. Napríklad tvar hyperstien môže byť použitý ako faktor pri priemerovaní.

5.4.3 Optimalizačný proces

Matematický model **DDT** techniky a váhové funkcie sú určené pre n -dimenzionálny prípad. Zostáva určenie a popis optimalizačného procesu, ktorý bude vytvárať trianguláciu s požadovanou vlastnosťou. Pre tento účel uvedieme zovšeobecnenie **LOP**, ktoré bude vytvárať lokálne optimálne riešenia vo vyšších dimenziách, budeme ju ozn. **GLOP**.

V 2D prípade v **LOP** sa používala topologická transformácia preklápania, vo vyšších dimenziách sa budú používať bistellárne preklápania (popísané v odseku 2.2). Vzhľadom na to, že vo vyšších dimenziách nie je dokázaná spojitost grafu triangulácií s použitím bistellárnych preklápaní, zavedieme pojem *množina topologických transformácií* ozn. $\mathbf{T}_K$. Táto množina bude obsahovať topologické transformácie, vzhľadom na ktoré bude vykonaná optimalizácia. Znamená to všeobecnejší popis. $\mathbf{T}_K$ môže byť zvolená ľubovoľne², konvergencia algoritmu bude nezávislá od voľby. V každom kroku sa zníži váhovaný objem a existuje triangulácia s minimálnym váhovaným objemom. Uprednostňujeme voľbu takej množiny $\mathbf{T}_K$, pre ktorú graf triangulácie je spojitý a jednotlivé topologické transformácie majú za úlohu odstrániť špecifický k -simplex, kde $k = 1, \dots, n-1$, a zmenia topológiu n -simplexov obsahujúcich odstránený k -simplex. Voľba bistellárnych preklápaní sa zdá byť vhodnou, aj napriek nedokázanej spojitosti grafu triangulácie. Vzhľadom na to, že pojem lokálnej optimality bol definovaný v 2D pre hrany, je potrebné predefinovať daný pojem:

² $\mathbf{T}_K$ môže obsahovať také topologické transformácie, ktoré zmenia trianguláciu množiny $\mathbf{V}$ na inú trianguláciu $\mathbf{V}$. Počet vrcholov sa nemôže zmeniť, pridanie alebo odstránenie vrcholov je zakázané.

Definícia 5.4.1. *Nech je daná triangulácia $\mathbf{T}(\mathbf{V})$ pre n -dimenzionálne rozptýlené dáta, k -simplex $k = 1, \dots, n - 1$ z $\mathbf{T}(\mathbf{V})$ sa nazýva lokálne optimálna vzhľadom na danú $\mathbf{T}_K$ a cenovú funkciu, ak platí jedno z nasledujúcich tvrdení:*

- (i) *daný k -simplex nemôže byť odstránený z triangulácie pomocou topologickej transformácie z množiny $\mathbf{T}_K$.*
- (ii) *existuje topologická transformácia z množiny $\mathbf{T}_K$, ktorá odstráni daný k -simplex (budeme hovoriť že daný k -simplex je preklápatelný), ale cena triangulácie sa nezníži po aplikovaní transformácie.*

N -dimenzionálna triangulácia sa nazýva lokálne optimálna ozn. **LOT**, ak aplikácia topologickej transformácie z $\mathbf{T}_K$ nezníži jej váhovaný objem.

Základný princíp **GLOP** techniky je identický s princípom techniky **LOP**. Takisto vyžaduje úvodnú trianguláciu, navrhujeme použitie **DT** kvôli vhodným vlastnostiam. Cez iteračné kroky sa odstraňujú k -simplexy $k = 1, \dots, n - 1$ z triangulácie, ktoré nie sú lokálne optimálne, pokiaľ sa nedosiahne **LOT**. Podobne ako pri rovinnom prípade je možné urýchliť algoritmus pomocou zoznamu k -simplexov, ktorých lokálna optimalita sa mohla zmeniť v priebehu optimalizácie. Takto nie je potrebné vyšetrovať lokálnu optimalitu všetkých k -simplexov v každom iteračnom kroku. Pseudokód algoritmu je znázornený na Obrázku 5.7.

Popísaný algoritmus konverguje, lebo v každom iteračnom kroku sa zníži váhovaný objem a počet možných triangulácií je konečný. Iná voľba $\mathbf{T}_K$ môže urýchliť konvergenciu algoritmu a zvýšiť mieru aproximácie **MWT**. Pre 3D prípad vhodným rozšírením bistellárnych preklápaní môže byť špeciálna transformácia odstránenie hrany (nazývané *edge-removal*). Slúži na odstránenie hrany z 3D triangulácie nezávisle od počtu tetrahedronov ktoré ju obsahujú (na rozdiel od 3 – 2 preklápania). Môže sa skladať zo série bistellárnych preklápaní. Popis tejto topologickej transformácie ako aj návod efektívnej optimalizácie je uvedený v publikácii [She02].

Namiesto **GLOP** môžeme používať aj iné optimalizačné techniky pre **DDT**, ako napríklad **SA**. V prípade **GO** treba predefinovať operáciu “*prekríženia*”. Podľa nášho odhadu zovšeobecnenie look-ahead techniky je tiež možné, ale je komplikovanejšou úlohou ako v prípade **SA** alebo **GO**.

5.5 Analýza výsledkov

Nasledujúca časť práce obsahuje analýzu správania sa popísaných algoritmov ako porovnávanie rekonštrukčných výsledkov pre aplikačnú oblasť rekonštrukcie obrazu. Na konci kapitoly je uvedený príklad 3D **DDT** rekonštrukcie pre syntetické dáta. Algoritmy pre 2D prípad sú implementované v prostredí Borland C++ Builder 5.0 pre platformu Microsoft Windows. Pre 3D prípad sme implementovali v Microsoft Visual

Studio .NET 2003 s použitím softvérových knižníc *CGAL* 3.01 (*Computational Geometry Algorithms Library*) [CGA04] a *VTk* 5.0 (*Visualization ToolKit*) [Kit06a].

5.5.1 Charakteristika porovnávacích kritérií

Objektívne hodnotenie kvality rekonštrukcie je náročnou úlohou, ktorá je závislá od aplikačnej oblasti. Práve kvôli tomu je dôležité stanoviť kritériá, na základe ktorých budeme rozlišovať výsledky jednotlivých prístupov.

Váha triangulácie

Z matematického hľadiska dôležitú informáciu dáva dosiahnutá váha výslednej triangulácie. Nižšia váha potvrdzuje kvalitu optimalizačného procesu, a je vhodná na porovnanie medzi triangulačnými prístupmi. Problémom sú porovnávania s inými prístupmi ako napr. s konvolučnými technikami. Takisto nie je možné určiť na základe tejto informácie adekvátnosť voľby cenovej funkcie. Pozitívnu stránkou je nezávislosť od aplikačnej oblasti.

Perceptuálne metriky

Vo väčšine prípadov pre jednotlivé aplikačné oblasti existujú metódy, ktoré majú za úlohu porovnať výsledky rekonštrukcií. Pre aplikačnú oblasť rekonštrukciu obrazu sme si zvolili použitie tzv. *perceptuálnych metrík* z článkov [Cec02, WB02]. Hlavným nedostatkom použitia perceptuálnych metrík je nutnosť zhody veľkostí porovnaných obrazov. Najprv musí byť obraz prevzorkovaný (v tomto prípade to znamená zmenšenie), potom zväčšený naspäť na veľkosť originálneho obrazu pomocou uvedených rekonštrukčných techník. Rekonštruované obrazy sa porovnávajú s originálom. Matematická definícia použitých perceptuálnych metrík je nasledovná:

Korelácia(C):

$$C = 1 - \frac{\sum_{i,j} |x_{ij} - y_{ij}|}{255 \cdot N} . \quad (5.8)$$

Křížová korelácia (CC):

$$CC = \left| \frac{\sum_{i,j} x_{ij}y_{ij} - N\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{(\sum_{i,j} x_{ij}^2 - N\bar{x}^2)(\sum_{i,j} y_{ij}^2 - N\bar{y}^2)}} \right| , \quad (5.9)$$

kde $\bar{x}$ a $\bar{y}$ sú stredné hodnoty:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i,j} x_{ij} , \quad \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i,j} y_{ij} . \quad (5.10)$$

Univerzálny koeficient kvality obrazu (UIQI):

$$UIQI = \frac{4\sigma_{xy}\bar{x}\bar{y}}{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)} , \quad (5.11)$$

kde:

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \frac{1}{N-1} \sum_{i,j} (x_{ij} - \bar{x})^2, \quad \sigma_y^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i,j} (y_{ij} - \bar{y})^2, \\ \sigma_{xy} &= \frac{1}{N-1} \sum_{i,j} (x_{ij} - \bar{x})(y_{ij} - \bar{y}) . \end{aligned} \quad (5.12)$$

Stredná kvadratická odchýlka (MSE):

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{i,j} (y_{ij} - x_{ij})^2 . \quad (5.13)$$

Odstup signál-šum (SNR):

$$SNR = \frac{1}{N \cdot MSE} \sum_{i,j} x_{ij}^2 . \quad (5.14)$$

Vrcholový odstup signál-šum (PSNR):

$$PSNR = \frac{1}{MSE} \cdot 255^2 . \quad (5.15)$$

N značí počet pixelov v obrázku, x_{ij} a y_{ij} sú farebné informácie pixelov z originálneho a z rekonštruovaného obrazu.

5.5.2 Analýza cenových funkcií

V predchádzajúcich kapitolách sme hovorili o závislosti vhodnej voľby cenových funkcií od aplikačnej oblasti. Naša voľba padla na testovanie cenových funkcií popísaných v odseku 3.2 pre rekonštrukciu obrazu. Snahou bolo potvrdenie výsledkov z [YBS01] o prevahe **SCF** nad ostatnými cenovými funkciami. Dospeli sme k názoru, že číselne nie je možné preukázať jasnú prevahu **SCF** nad ostatnými cenovými funkciami, nájdenie kontrapríkladov v tejto oblasti nie je ťažkou úlohou. Ak sa vo výslednom obraze prejavujú artefakty, je vhodné zvoliť inú cenovú funkciu. Na Obrázku 5.8 sú ukážky triangulácií pomocou metódy **LOP** pre jednotlivé cenové funkcie.

Vizuálna kvalita výsledkov jednotlivých cenových funkcií je veľmi podobná. Najlepší subjektívny dojem vzbudilo oceňovanie na základe **SCF**. Tabuľka 5.1 obsahuje hodnoty korelácií medzi výsledkami z Obrázku 5.8.

V Tabuľke 5.1 všetky hodnoty sú nad úrovňou 99%. Podľa výsledkov týchto testov nie je možné jednoznačne určiť poradie podľa kvality výstupu. Počas testovania sme ďalej použili prevažne **SCF**. Tento výber môžeme považovať za korektný, nakoľko sa nepodarilo ukázať jednoznačnú prevahu ani jednej cenovej funkcie.

	SCF	ABN	JND	DP	DLP
SCF	100	99,631	99,413	99,18	99,94
ABN	99,631	100	99,553	99,9	99,157
JND	99,413	99,553	100	99,101	99,325
DP	99,18	99,9	99,101	100	99,214
DLP	99,94	99,157	99,214	99,325	100

Tabuľka 5.1: Korelácie medzi výsledkami rôznych cenových funkcií.

5.5.3 *DDT* a konvolučné techniky

Zaujímavou časťou výsledkov sú merania kvality medzi **DDT** a konvolyčne založenými rekonštrukčnými technikami. Na Obrázkoch 5.9, 5.10 sú zobrazené výsledky rekonštrukcie pomocou rôznych prístupov pri 256% a 512% zväčšení. Medzi **DDT** prístupmi sú štyri nami navrhnuté a tri existujúce, konvolyčné techniky sú zastúpené bilineárnou a bikubickou interpoláciou, ako ďalšia technika je uvedená aj interpolácia pomocou najbližšieho suseda.

Výsledky rekonštrukcií sme porovnali pomocou perceptuálnych metrík, a sú uvedené v Tabuľkách 5.2, 5.3.

	C	CC	MSE	SNR	PSNR	UIQI
nearest neighbour	93,819	0,94845	420,247	42,522	154,730	0,60865
bilinear	93,908	0,95819	378,391	47,226	171,846	0,61769
bicubic	94,520	0,95977	363,132	49,211	179,067	0,64617
LOP	93,978	0,95989	370,307	48,257	175,598	0,63381
LAT	93,961	0,95901	374,339	47,737	173,706	0,63063
Quasi-LOP	93,960	0,95850	374,606	47,703	173,582	0,62230
GLOP	93,950	0,95772	377,807	47,299	172,112	0,61884
SA	93,955	0,95863	375,823	47,549	173,020	0,61799
Quasi-SA	93,946	0,95762	378,499	47,213	171,797	0,60635
SALA	93,982	0,95951	370,600	48,219	175,459	0,62228

Tabuľka 5.2: Porovnanie kvality rekonštrukčných výsledkov z Obrázku 5.9.

Okrem MSE, vyššia hodnota jednotlivých porovnávacích kritérií značí kvalitnejšiu rekonštrukciu. V prípade MSE nižšia hodnota zodpovedá kvalitnejšiemu výsledku. Rozdiely hodnôt v Tabuľkách 5.2, 5.3 nie sú veľké. Vo väčšine prípadov najlepšie výsledky ukazuje bikubická interpolácia. Nasledujú ju deterministicky založené **DDT** metódy, potom stochastické **DDT** prístupy. Najhoršiu kvalitu preukazuje bilineárna interpolácia spolu s interpoláciou pomocou najbližšieho suseda.

Výsledky rekonštrukcie závisia aj od typu testovaných obrazov (miera zašumenia, miera štruktúrovanosti obsahu obrazu, atď.), ako aj od miery zväčšenia. Čím väčšia

	C	CC	MSE	SNR	PSNR	UIQI
nearest neighbour	96,819	0,96156	218,803	75,140	297,185	0,39002
bilinear	97,270	0,97232	159,171	103,291	408,523	0,42317
bicubic	97,239	0,97596	133,722	122,948	486,268	0,45031
LOP	97,177	0,97444	144,548	113,740	449,850	0,43660
LAT	97,184	0,97413	145,306	113,147	447,504	0,43563
Quasi-LOP	97,159	0,97382	147,911	111,154	439,621	0,42840
GLOP	97,143	0,97325	150,840	108,995	431,085	0,42422
SA	97,128	0,97348	149,245	110,161	435,694	0,42406
Quasi-SA	97,850	0,97253	154,912	106,130	419,754	0,41478
SALA	97,151	0,97366	147,753	111,273	440,093	0,42693

Tabuľka 5.3: Porovnanie kvality rekonštrukčných výsledkov z Obrázku 5.10.

je miera magnifikácie, tým je výraznejšia prevaha **DDT** metód nad inými technikami. Výskyt artefaktov je aj pri triangulačných prístupoch, ale sú menej systematicky usporiadané ako pri konvolučných technikách, a tak pôsobia menej rušivo.

DDT metódam nevyhovujú zašumené obrazy, v takýchto prípadoch je pravdepodobnosť vzniku rekonštrukčných artefaktov oveľa vyššia (lebo zvýrazňujú aj šum). Veľmi dobré výsledky sú dosiahnuté pre obsahovo štruktúrované obrazy, kde sa vyskytuje množstvo hrán. Predspracovanie na odstránenie šumu môže byť dôležitou úlohou pri presadení **DDT** techniky do komerčnej sféry.

5.5.4 Vizuálna kvalita stochastických procesov

Pri použití stochastických prístupov pre účely rekonštrukcie obrazov sa často vytvárajú artefakty. Zhoršujúce kroky vytvoria v štruktúre triangulácie také nezvratné zmeny, ktoré sú z hľadiska vizuálnej kvality neakceptovateľné. V oblastiach, kde sa nevyskytujú hrany (napríklad jemné farbené prechody), by optimálnym riešením (z hľadiska vizuálnej kvality) bola triangulácia blízka ku **DT**. Tu stochastické algoritmy vytvoria dlhé a úzke trojuholníky, ktoré sa postupom optimalizácie napravia nesprávne - Obrázok 5.12 (kvôli porovnaniu je uvedený aj rekonštrukčný výsledok z **LOP**). Pre porovnanie sú na Obrázku 5.11 zobrazené výsledky **SA** a **SALA**. **SALA** zvyčajne vytvára menšie množstvo artefaktov v oblastiach hrán ako **SA**. Pre iné účely ako rekonštrukcia obrazu stochastické prístupy môžu vytvárať triangulácie so žiadanou vlastnosťou.

5.5.5 Analýza nových algoritmov

Nasledujúca časť obsahuje analýzu výsledkov z implementovaných nových algoritmov.

Porovnanie *LOP*, *Quasi-LOP* a *GLOP*

Porovnanie *LOP*, *Quasi-LOP* a *GLOP* podľa vizuálnej kvality je ťažkou úlohou. Perceptuálne metriky vo väčšine prípadov vyhlásia *LOP* za lepšiu rekonštrukčnú metódu ako *GLOP*, a *Quasi-LOP* zvyčajne za nimi zaostáva. Rozdiely sú ale minimálne a závisia od typu obrazu. *GLOP* a *Quasi-LOP* produkujú menej artefaktov v oblastiach hrán, na druhej strane *LOP* vykazuje lepšie výsledky v rekonštrukcii malých detailov. Na Obrázku 5.13 sú zobrazené rekonštrukčné výsledky spomínaných metód, v oblastiach hrán nové metódy vytvárajú vizuálne kvalitnejšiu rekonštrukciu.

Na základe porovnania dosiahnutej váhy triangulácií nie je možné preferovať žiadnu z uvedených metód. Otázka existencie relácie medzi váhami dosiahnutých triangulácií zatiaľ nie je uzavretá.

Budeme preferovať *GLOP* a *LOP* z hľadiska matematickej korektnosti pred *Quasi-LOP*, pri ktorej konvergencia algoritmu nie je zaručená. To ale neznamená, že pre praktické účely nie je vhodná. Na Obrázku 5.14 je zobrazená časť Bratislavskej výškovej mapy, rekonštruovaná pomocou *Quasi-LOP* metódy. Použitá cenová funkcia bola *SCF*. Pozitívnou stránkou *Quasi-LOP* je rýchlosť výpočtov. V našej implementácii dosiahla výrazne rýchlejší priebeh ako *LOP* (zhruba 10×). *GLOP* z hľadiska rýchlosti je zhruba na úrovni *Quasi-LOP*. Rozdiely v rýchlostiach výpočtu sú vďaka inému chápaniu lokálnej optimality a rozdielnej cenovej funkcii.

Porovnanie *SA*, *Quasi-SA* a *SALA*

Z hľadiska aproximácie *MWT* je význam heuristických metód založených na myšlienke simulovaného žihania veľký. Analýzu vizuálnej kvality stochastických metód pre rekonštrukciu obrazu sme už predviedli, nespomenuli sme ale analýzu priebehu samotných procesov. Naše testovanie prebehlo so štandardne nastavenými parametrami na testovacím Obrázku 5.15, výsledky sú zobrazené na Obrázku 5.16.

So štandardnými nastaveniami parametrov testované stochastické procesy nepri niesli adekvátne výsledky. Je to vďaka špeciálnemu rozloženiu dát, a príbuznosti chápania digitálnych obrazov a Markovových náhodných polí. *SALA* produkovala najnižšiu celkovú váhu triangulácie spomedzi stochastických procesov. Ukázalo sa aj horšie správanie *Quasi-SA* ako *SA*, čo sme očakávali. Nové heuristiky *Quasi-SA* a *SALA* môžu priniesť kvalitné výsledky pre iné typy rekonštrukčných úloh ako je rekonštrukcia obrazu.

5.5.6 Aplikácia *DDT* na syntetické 3D dáta

Testovanie výsledkov pre zovšeobecnené *DDT* do vyšších dimenzií je vo fáze spracovania. Ponúkame výsledky rekonštrukcie syntetických 3D dát pomocou trilineárnej interpolácie a pri použití 3D *DDT* založenej na váhovaní s varianciou - Obrázok 5.17,

5.18. Rekonštruované volumetrické dáta mali rozlíšenie $32 \times 32 \times 32$. Na zobrazenie sme použili knižnicu *VTK* 5.0 [Kit06a].

V prípade **DDT** techniky artefakty nie sú tak relevantné ako v prípade trilineárnej interpolácie, kde sa prejavujú artefakty na plochách, ktoré nie sú rovnobežné s x , y alebo z osou. V budúcnosti plánujeme porovnávať tieto techniky na medicínskych dátach z *CT*.

5.5.7 Zhrnutie

Z hľadiska aplikačnej oblasti rekonštrukcie obrazu môžeme povedať že výsledné **DDT** triangulácie majú lokálny charakter. Teda výpočtovo lacné aproximácie **MWT** dávajú vizuálne príjemné výsledky. Tieto pozorovania platia aj pre rekonštrukčné úlohy, kde dáta majú charakter Markovových náhodných polí. Z hľadiska rekonštrukcie obrazov využívanie **DDT** prístupov na magnifikačné účely prináša výhody. Odporúčame použitie deterministicky založených metód. Stochastické metódy sú vhodné pre rekonštrukčné úlohy, kde miera aproximácie **MWT** je dôležitá.

Zovšeobecnený Lawsonov optimalizačný proces - *GLOP*

Vstup: rozptýlené dáta

Výstup: *LOT* tetrahedralizácia

```

1  {
2    vytvor počiatočnú tetrahedralizáciu  $T(V)$ ;
3     $Cost = c(T(V))$ ;
4     $oldCost = Cost + 1$ ;
5     $List_{active} = \{\forall \sigma_k \in T(V), k = 1, \dots, n-1\}$ ;
6     $List_{candidate} = \emptyset$ ;
7    while( $Cost < oldCost$ ){
8      for(pre všetky členy  $List_{active}$ ){
9        if(ak nie je lokálne optimálna){
10         použi transformáciu z  $T_K$ ;
11         odstráň z  $List_{active}$ ;
12         for(všetky  $\sigma_k$ , ktorých lokálna optimalita mohla zmeniť){
13           if( $\sigma_k$  nepatrí do  $List_{active}$  a  $List_{candidate}$ )
14             pridaj  $\sigma_k$  do  $List_{candidate}$ ;
15         }
16       }
17     else
18       odstráň  $\sigma_k$  z  $List_{active}$ ;
19     }
20      $oldCost = Cost$ ;
21      $Cost = c(T(V))$ ;
22      $List_{active} = List_{candidate}$ ;
23      $List_{candidate} = \emptyset$ ;
24   }
25 }
```

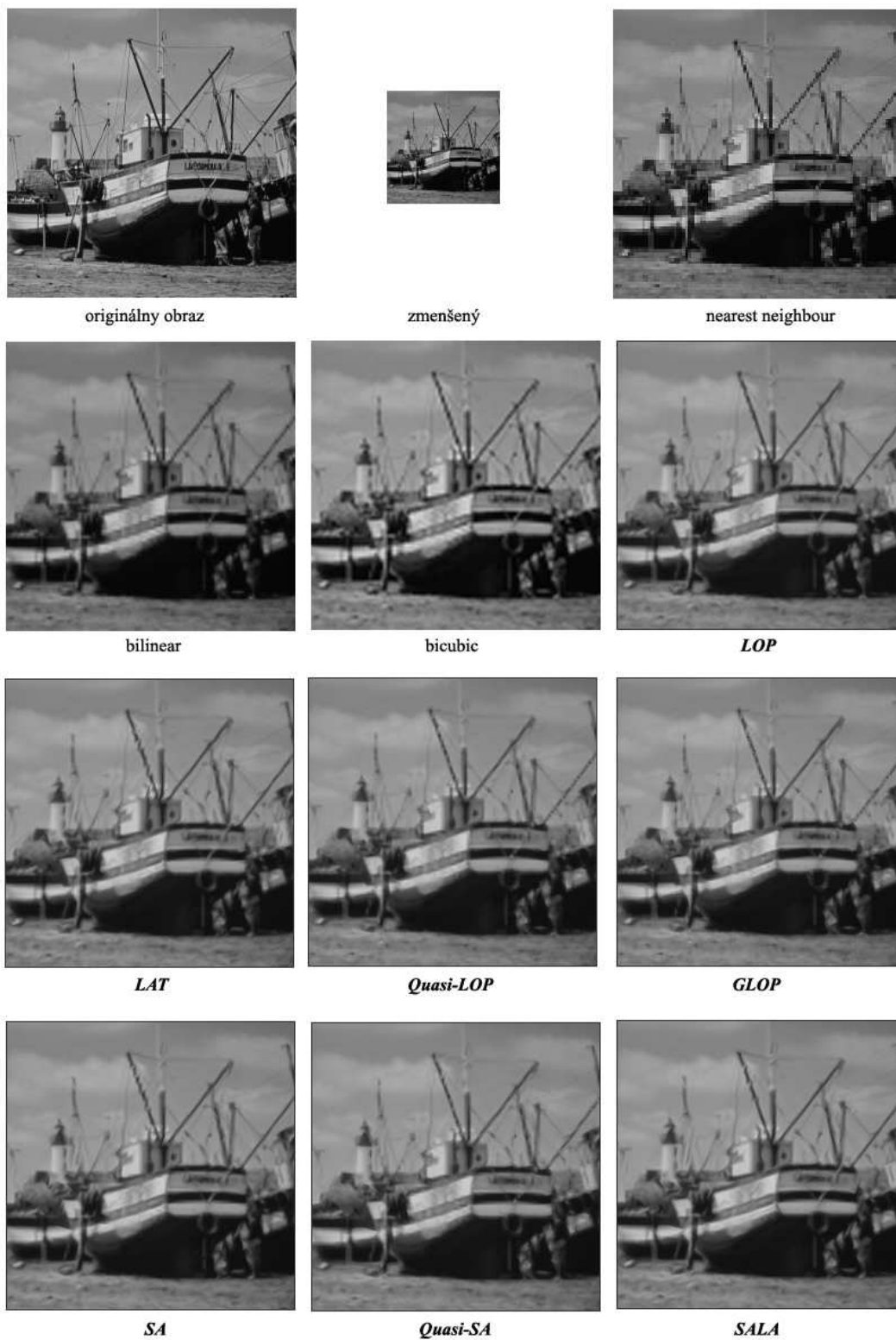
$List_{active}$ - zoznam k -simplexov, ktoré sú testované v danom iteračnom kroku

$List_{candidate}$ - zoznam k -simplexov, ktorých lokálna optimalita mohla zmeniť

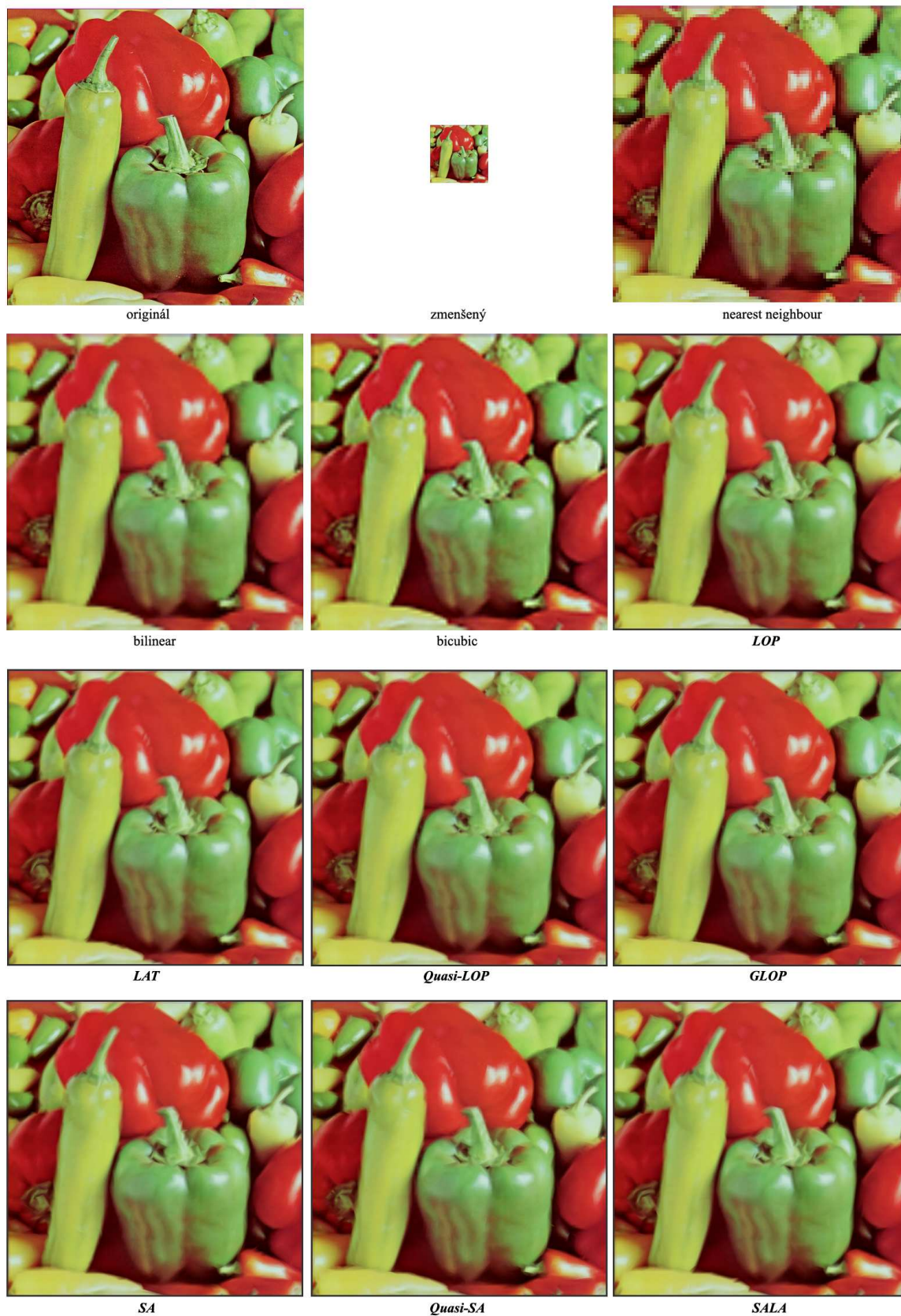
Obrázok 5.7: Zovšeobecnený Lawsonov optimalizačný proces - pseudokód.



Obrázok 5.8: Porovnanie účinnosti cenových funkcií pri 300% magnifikácii.



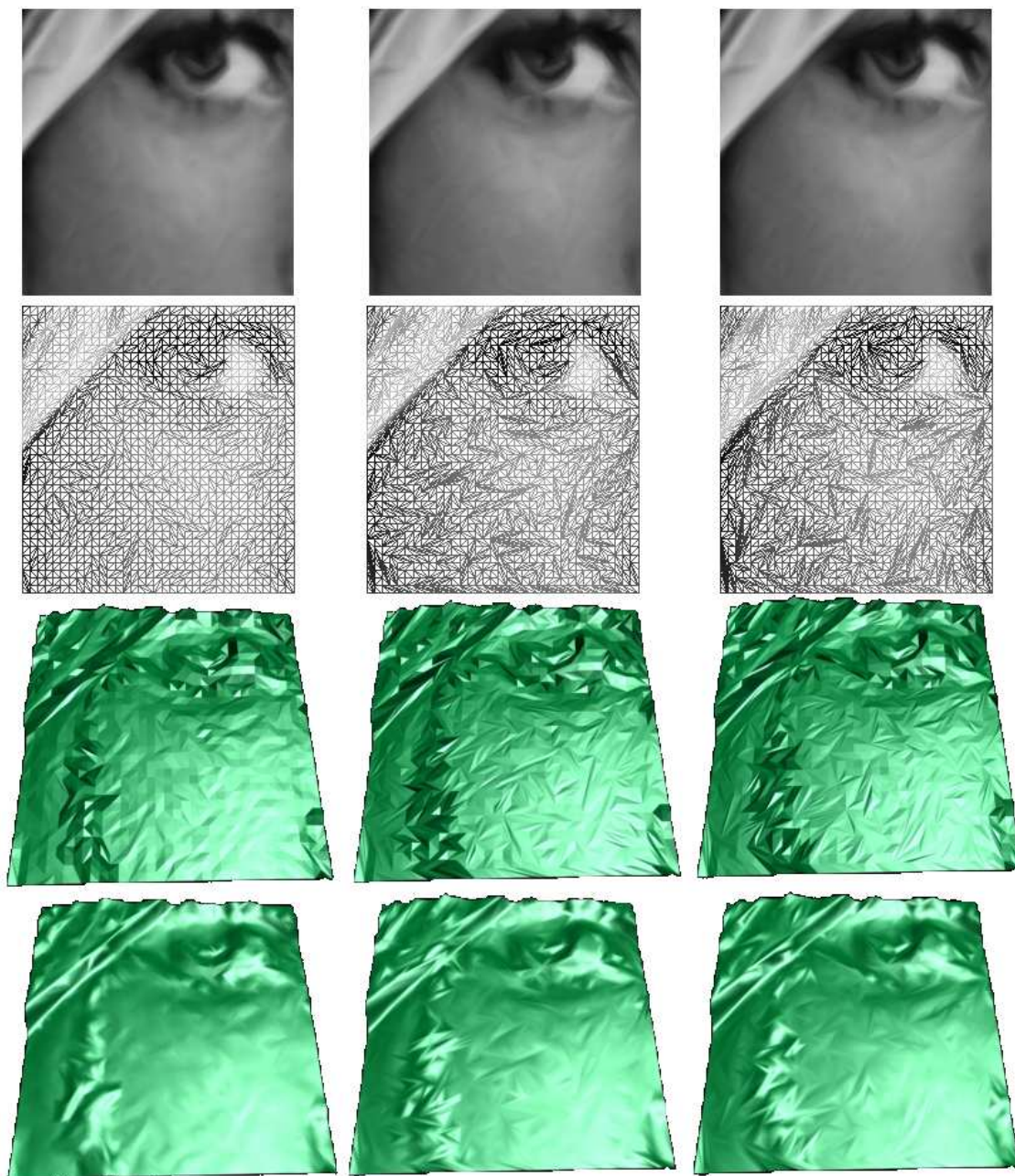
Obrázok 5.9: Rekonštrukcia pri 256% zväčšení rôznymi metódami.



Obrázok 5.10: Rekonštrukcia pri 512% zväčšení rôznymi metódami.



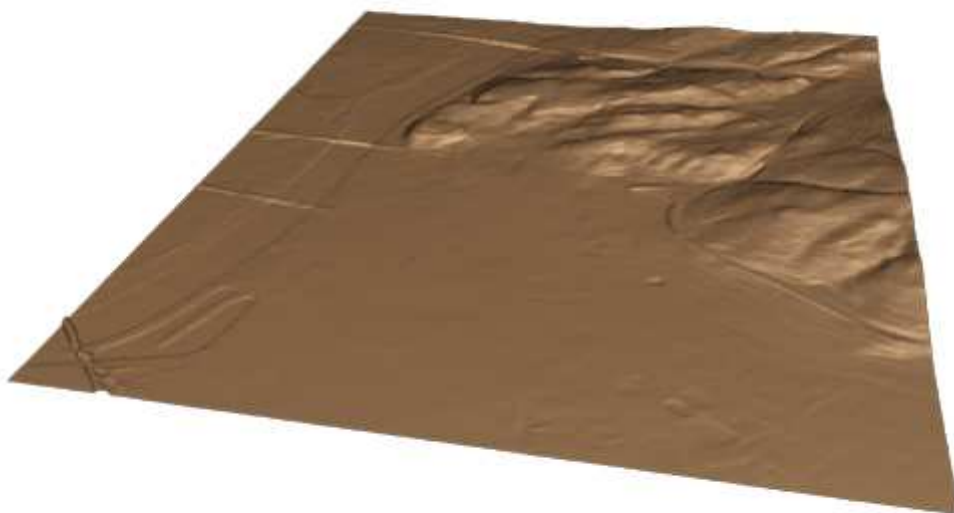
Obrázok 5.11: Rekonštrukčné výsledky zo stochastických prístupov. ***SA*** (vľavo) a ***SALA*** (vpravo).



Obrázok 5.12: 600% zväčšenie pomocou rôznych **DDT** techník. Zobrazená je aj trojuholníková sieť a výšková mapa triangulácie. **LOP** - vľavo, **SA** - stred, **SALA** - vpravo.



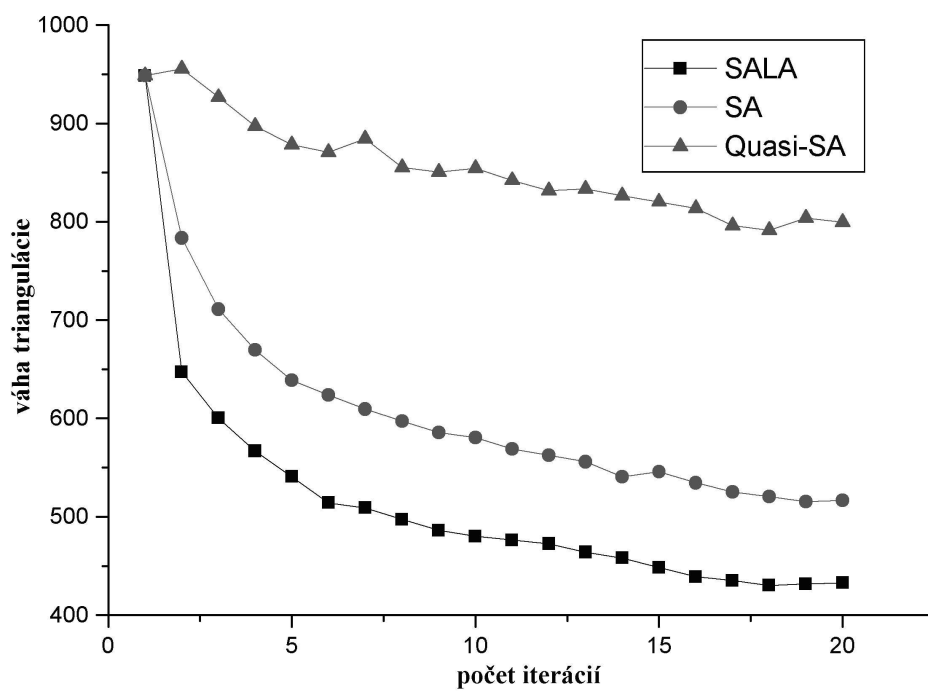
Obrázok 5.13: Vizuálny rozdiel medzi metódami, zobrazené na vybraných ukážkach. **LOP** - vľavo, **Quasi-LOP** - stred, **GLOP** - vpravo.



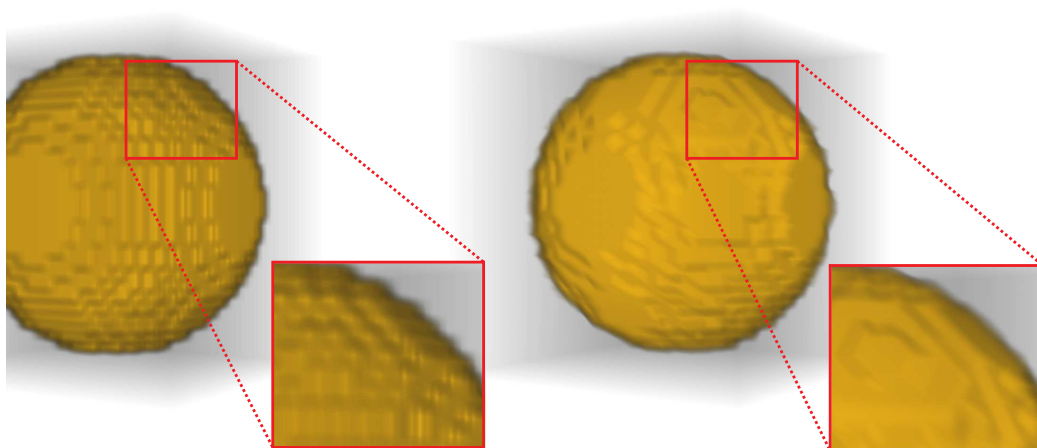
Obrázok 5.14: **Quasi-LOP** triangulácia výškovej mapy Bratislavy. Dáta poskytol Magistrát mesta Bratislavy.



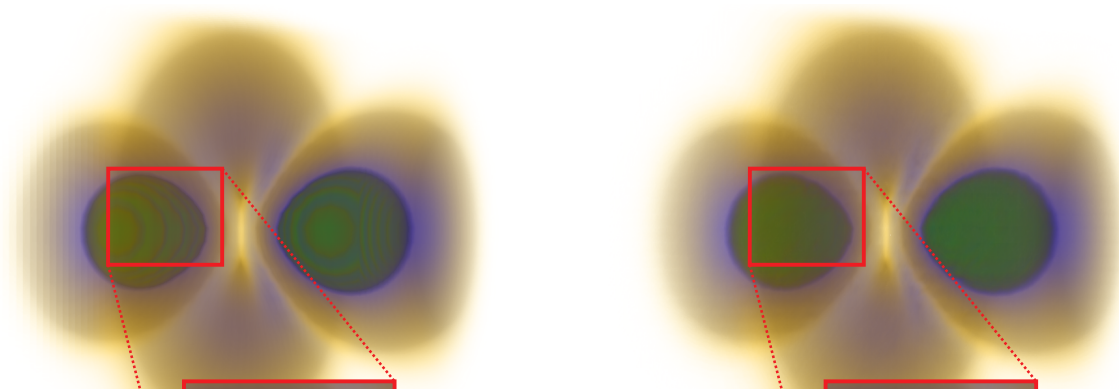
Obrázok 5.15: Rekonštrukčné výsledky pomocou stochastických prístupov.



Obrázok 5.16: Rýchlosť konverencie pre *SA*, *Quasi-SA* a *SALA*.



Obrázok 5.17: Rekonštrukčné výsledky pre syntetické volumetrické dáta. Trilineárna interpolácia (vľavo) a 3D **DDT** (vpravo).



Obrázok 5.18: Rekonštrukčné výsledky pre syntetické volumetrické dáta. Trilineárna interpolácia (hore) a 3D **DDT** (dole).

Kapitola 6

Projekt dizertačnej práce

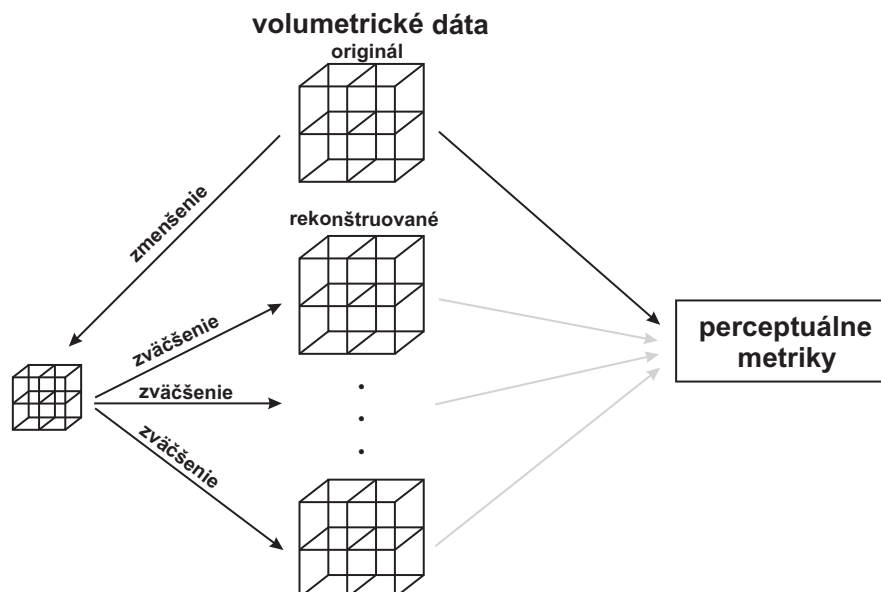
V predchádzajúcich kapitolách sme sa zaoberali špeciálnou skupinou optimálnych triangulácií, takzvanými dátovo závislými trianguláciami. Dosiahnutými výsledkami sú rozšírenia rovinných **DDT** o nové metódy: rozdelenie na bloky (odsek 5.1), optimalizačná technika založená na kombinácii simulovaného žihania a look-ahead prístupu (odsek 5.2), nová skupina triangulačných metód, pomenovaných ako **Quasi-DDT** (odsek 5.3). Hlavným prínosom je rozšírenie **DDT** do vyšších dimenzií cez minimalizáciu váhovaného objemu (odsek 5.4.1). Pre tento prístup sme predstavili váhové funkcie v odseku 5.4.2. Ako príklad optimalizačného prístupu sme uviedli zovšeobecnenie Lawsonovho optimalizačného procesu v odseku 5.4.3. Za aplikačnú oblasť sme zvolili rekonštrukciu obrazov a volumetrických dát. Daná tematika predstavuje relatívne novú výskumnú oblasť, čomu zodpovedá aj množstvo nepreskúmaných možností. V nasledujúcej časti sa budeme zaoberať myšlienkami, o ktoré by sme chceli rozšíriť poznatky o **DDT**.

6.1 Porovnanie 3D **DDT** s výsledkami iných techník

Podobne ako v rovinnom prípade je potrebné sa zaoberať analýzou kvality rekonštrukčných výsledkov. Chceli by sme porovnávať výsledky nášho 3D **DDT** postupu s klasickými konvolučnými technikami (napr. trilineárne a trikubická interpolácia - implementované v knižnici *VTK* 5.0 [Kit06a]), a numerickými prístupmi v prípade neštruktúrovaných dát. V testoch plánujeme použiť dáta zozbierané v rámci projektu *Natural Phenomena Visualisation using Unstructured Grid* [FTG*05].

Princíp porovnania by mal byť podobný ako v rovinnom prípade, kde sme používali na tieto účely perceptuálne metriky, popísané v sekcii 5.5.1. Tieto metriky sa dajú rozšíriť aj do vyšších dimenzií, ale takisto vyžadujú, aby porovnané dátové množiny mali rovnakú veľkosť. Práve preto originálne dáta najprv zmenšíme. Následne zmenšené dáta zväčšíme naspäť na veľkosť pôvodných dát pomocou rôznych rekonštrukčných techník. O kvalite použitých metód budú svedčiť hodnoty zovšeobecnených percep-

tuálnych metrík. Navrhovaný systém je znázornený na Obrázku 6.1.



Obrázok 6.1: Návrh použitia perceptuálnych metrík pre porovnávanie volumetrických dát.

S cieľom zvýšenia vierohodnosti porovnania plánujeme testovať aj rekonštrukciu syntetických 3D dát, ktoré sa dajú napísať ako priestorové funkcie. To znamená, že sa tieto funkcie dajú vyčíslieť v každom rozlíšení a fázu zmenšenia môžeme vynechať.

Okrem porovnávania perceptuálnymi metrikami sa dá uvažovať aj o možnostiach rozšírenia príznakovo založených metód [BCFP03] (*feature based*) do 3D. Užitočným môže byť aj použitie porovnávacej techniky z článku [EDM04], kde sa využívajú aj porovnávanie iných súvislostí v dátach ako hodnoty priradené k jednotlivým voxelom. Vo všeobecnosti od tejto fázy práce očakávame preukázanie kvality 3D **DDT** rekonštrukcie.

6.2 Kompresia tetrahedrálnych sietí pomocou **DDT**

Pri práci s tetrahedrálnymi sieťami je potrebné uložiť topológiu triangulácie, čo vyžaduje veľa pamäte a diskového priestoru. Efektívnosť zobrazenia (*rendering*) týchto sietí je tiež závislá od počtu tetrahedronov, ktorými sú dáta reprezentované. Toto môže slúžiť ako motivácia na stratovú kompresiu tejto reprezentácie, ktorá sa ale snaží zachovať významné črty v dátach.

Na tento účel by sme chceli využiť techniku 3D **DDT** v kombinácii s klasickou technikou zjednodušenia sietí (*mesh decimation*). Takýto prístup vyžaduje zostrojenie tetrahedralizácie zachovávajúcej významné príznaky, na čo nám slúži **DDT** a výber prvku (vrchola), ktorý chceme odstrániť (t.j. nesie najmenej dôležitú informáciu). Náčrt pseudokódu je zobrazený na Obrázku 6.2.

Návrh kompresie tetrahedrálnych sietí

Vstup: volumetrické dáta

Výstup: zjednodušená tetrahedrálka sieť

```

1  {
2    vyrátať lokálne optimálnu DDT trianguláciu;
3    ohodnotiť vrcholy tetrahedralizácie;
4    while(nie je splnená ukončovacia podmienka){
5      zober vrchol  $V$  s najmenšou priradenou hodnotou ;
6      if(ak odstránením  $V$  vznikne mnohosten, ktorý sa dá tetrahedralizovať){
7        aktualizuj okolie odstráneného vrchola:
8           $a$ , vyrátať lokálne optimálnu DDT;
9           $b$ , aktualizuj ohodnotenie vrcholov;
10     }
11     else
12       zober nasledujúci prvok s najmenšou priradenou hodnotou;
13   }
14 }
```

Obrázok 6.2: Náčrt algoritmu na stratovú kompresiu volumetrických dát zachovávajúci významné príznaky.

Na vyrátanie lokálne optimálnej **DDT** môže slúžiť algoritmus popísaný v odseku 5.4.3. Z hľadiska úspešnosti kľúčovou úlohou celého prístupu je ohodnotenie vrcholov podľa ich dôležitosti. Chceli by sme využiť existujúce poznatky z rovinných prípadov a zaviesť pojem vrcholovo založenej **DDT** pre 3D prípad. Znamená to prevedenie váhovaných objemov (informácia, ktorou disponujeme) do vrcholov, a to ako váhovaný priemer ohodnotenia z tetrahedronov, v ktorých je daný vrchol obsiahnutý. Určenie adekvátneho pomeru váhovania týchto informácií ako aj možnosť použitia geometrických vlastností môžu byť predmetom ďalšieho výskumu.

Pri odstránení vrchola z tetrahedralizácie treba zabrániť, aby vznikli mnohosteny pre ktoré neexistuje simplicialne rozdelenie ich vnútra (napr. Schönhardtov alebo Chazelleov mnohosten). Po odstránení vrchola treba tetrahedralizovať vzniknutý mnohosten tak, aby spolu s ostatnými vrcholmi vytvorili lokálne optimálnu sieť. Toto môže byť časovo náročné, ale môžeme brať do úvahy nasledujúce myšlienky:

- (i) Odstránený vrchol bol obsiahnutý v tetrahedronoch s nízkymi váhovanými objemami, t.j. leží v nízko-frekvenčnej oblasti. To znamená, že tetrahedralizácia doplnená **DT** tetrahedralizáciou mnohostena (respektíve **DT** s obmedzeniami (*constrained*)) s veľkou pravdepodobnosťou bude blízko k lokálne optimálnemu riešeniu.
- (ii) Vlastnosti lokálne optimálnych **DDT** sietí a **DT** triangulácií sú podobné. Uve-

dený návrh kompresie sa v určitom zmysle podobá inkrementálnej konštrukcii **DT** s postupným pridávaním vrcholov [PS85], ktorá v praxi ukáže dobré správanie.

Dosiahnutý počet vrcholov môže byť vhodnou ukončovacou podmienkou pre algoritmus. Počet tetrahedronov nie je adekvátnou voľbou, vzhľadom na to, že ich počet sa môže zmeniť bez toho, aby sa znížil počet vrcholov. Zapojenie merania kvality z predchádzajúceho odseku je ďalšou vhodnou alternatívou.

Kvalitu kompresie môžeme zhodnotiť perceptuálnymi metrikami, a porovnávať napríklad s prístupmi z článkov [MDM04, RN00]. Uvedený myšlienkový postup bol v časti základom podania grantovej žiadosti *Rekonštrukcia viacrozmerých dát pomocou triangulácie* [Tót06]. Pripustenie modifikácie pozícií vrcholov je zaujímavou myšlienkou, ale je nad rámec časových možností tohto projektu.

6.3 Skvalitnenie rekonštrukcie digitálneho obrazu

Prvá fáza tohto výskumu sa zaoberala rekonštrukciou digitálneho obrazu. Vylepšenie týchto myšlienok je ďalšou možnou výskumnou oblasťou. Odstránenie šumu ako aj použitie waveletových transformácií sú možnosťami ako skvalitniť tento proces.

Doteraz sme považovali umiestnenie vrcholov triangulácie za fixované. Ak odstúpime od tejto požiadavky, otvára sa nám rad ďalších možností. Zmenou pozície jednotlivých vrcholov by sme chceli dosiahnuť ostrenie hrán v digitálnych obrazoch. Znamenalo by to nájdenie obrysov v obraze (ich vektorizáciu), vyšetrowanie tvarov trojuholníkov v obrysových oblastiach a modifikáciu pozícií ich vrcholov. Takýto prístup vyžaduje predspracovanie digitálneho obrazu pomocou spracovania obrazu. Hľadanie obrysov a následné hľadanie spojitkej reprezentácie popisujúcej dané obrysy plánujeme implementovať pomocou softverových knižníc *IPL* [Int06a], *OpenCV* [Int06b], *Itk* [Kit06b]. Z hľadiska zvýšenia robustnosti voči aritmetickým chybám na triangulačnú fázu plánujeme nasadiť knižnicu *CGAL* [CGA04]. Výstupom celého postupu by mohol byť vektorový formát SVG, ako to bolo uvedené v článku [BGM04].

Literatúra

- [AKTD99] ALBOUL L., KLOOSTREMAN G., TRAAS C., DAMME R. V.: *Best data-dependent triangulations*. Tech. Rep. TR-1487-99, 1999.
- [Aur91] AURENHAMMER F.: Voronoi diagrams - a survey of a fundamental geometric data structure. *ACM Computing Surveys* 23, 3 (1991), 345–405.
- [BCFP03] BORNIK A., CECHE P., FERKO A., PERKO R.: Beyond image quality comparison. In *Eurographics, EG Short 2003* (2003), pp. 271–276.
- [BE95] BERN M., EPPSTEIN D.: Mesh generation and optimal triangulation. In *Computing in Euclidean Geometry*, second ed., no. 4. World Scientific, 1995, pp. 47–123.
- [Bes01] BESPAMYATNIK S. N.: Enumerating triangulations of convex polytopes. In *Proc. Conf. Discrete Models: Combinatorics, Computation, & Geometry (DM-CCG 2001)* (2001), Cori R., Mazoyer J., Morvan M., Mosseri R., (Eds.), no. AA in Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science Proceedings, pp. 111–122.
- [BGM04] BATTIATO L., GALLO G., MESSINA G.: SVG rendering of real images using data dependent triangulation. In *In Proceedings of Spring Conference on Computer Graphics 2004* (2004), pp. 191–198.
- [BHJ99] BARNES J. C., HAMANN B., JOY K. I.: *An edge-preserving, data-dependent triangulation scheme for hierarchical rendering*. Scientific Visualization - Methods and Applications. Springer-Verlag, 1999, pp. 1–10.
- [Bro91] BROWN J.: Vertex based data dependent triangulations. *Computer Aided Geometric Design* 8, 3 (1991), 239–251.
- [Cec02] CECHE P.: Perceptual metrics and image compression. In *Proceedings of Spring Conference on Computer Graphics* (2002), pp. 39–40.
- [CFGuN01] CHALMOVIANSKÝ P., FERKO A., GALBAVÝ R., Ľ. NIEPEL: *Zložitosť geometrických algoritmov*. Univerzita Komenského Bratislava, ISBN 80-223-1598-2, 2001.
- [CGA04] CGAL: *Developers manual*, CGAL 3.1 ed. <http://cgal.org/>, 2004.

- [DLR90] DYN N., LEVIN D., RIPPA S.: Data dependent triangulations for piecewise linear interpolation. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 10 (1990), 137–154.
- [Ede00] EDELSBRUNNER H.: Triangulations and meshes in computational geometry. In *Acta Numerica* (2000), pp. 133–213.
- [EDM04] ENTEZARI A., DYER R., MOLLER T.: Linear and cubic box splines for the body centered cubic lattice. In *VIS '04: Proceedings of the IEEE Visualization 2004 (VIS'04)* (2004), IEEE Computer Society, pp. 11–18.
- [ES92] EDELSBRUNNER H., SHAH N. R.: Incremental topological flipping works for regular triangulations. In *SCG '92: Proceedings of the eighth annual symposium on Computational geometry* (1992), ACM Press, pp. 43–52.
- [Fer04] FERKO A.: Approaching the minimum weight triangulation problem. Habilitation Lecture Notes, 2004.
- [FTG*05] FERKO A., TÓTH Z., GRÖLLER M. E., VIOLA I., ŠIKUDOVÁ E., STANEK S., PURGATHOFER W., WIMMER M.: Natural phenomena visualisation using unstructured grid. ASO Sustainable Cooperation Grant, <http://aso.sccg.sk/>, 2005.
- [Gil79] GILBERT P. D.: *New results in planar triangulations*. Tech. Rep. Report R-850, Univ. Illinois Coordinated Science Lab, 1979.
- [HOS96] HANKE S., OTTMANN T., SCHUIERER S.: The edge-flipping distance of triangulations. In *European Workshop on Computational Geometry* (1996).
- [Int06a] INTEL CORPORATION: *IPL: Intel Image Processing Library*. <http://www.intel.com/cd/software/products/asmo-na/eng/perflib/ipp/index.htm>, 2006.
- [Int06b] INTEL CORPORATION: *OpenCV: Open Computer Vision*. <http://www.intel.com/technology/computing/opencv/overview.htm>, 2006.
- [Joe91] JOE B.: Construction of three-dimensional Delaunay triangulations using local transformations. *Comput. Aided Geom. Des.* 8, 2 (1991), 123–142.
- [KF01] KOLINGEROVÁ I., FERKO A.: Multicriteria-optimized triangulations. *The Visual Computer* 17, 6 (2001), 380–395.
- [KH01] KREYLOS O., HAMANN B.: On simulated annealing and the construction of linear spline approximations for scattered data. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics* 7, 1 (2001), 17–31.
- [Kit06a] KITWARE INC.: *Documentation*, VTK 5.0 ed. <http://public.kitware.com/VTK/>, 2006.
- [Kit06b] KITWARE INC.: *Itk: National Library of Medicine Insight Segmentation and Registration Toolkit*. <http://www.itk.org/>, 2006.

- [Kol99] KOLINGEROVÁ I.: Genetic approach to data dependent triangulations. In *Proceedings of Spring Conference on Computer Graphics* (1999), pp. 229–238.
- [Kol04] KOLINGEROVÁ I.: Lookahead search to the minimum weight triangulation. Manuscript, 2004.
- [KZ01] KOLINGEROVÁ I., ZALIK B.: Improvements to randomized incremental Delaunay insertion. *Computers & Graphics*, 26 (2001), 477–490.
- [Lee00] LEE K.: Three-dimensional medical image modeling of scattered data based on data-dependent criteria. In *Proc. SPIE Vol. 4117, Vision Geometry IX* (2000), pp. 91–99.
- [MDM04] MARCHESIN S., DISCHLER J. M., MONGENET C.: 3D ROAM for scalable volume visualization. In *2004 IEEE Symposium on Volume Visualization and Graphics (VV'04)* (2004), IEEE Computer Society, pp. 79–86.
- [MJ02] MAHMOOD R., JIMACK P. K.: Locally optimal unstructured finite element meshes in three dimensions. In *ICECT'03: Proceedings of the third international conference on Engineering computational technology* (Edinburgh, UK, UK, 2002), Civil-Comp press, pp. 31–32.
- [MR06] MULZER W., ROTE G.: Minimum-weight triangulation is NP-hard, 2006. ACM Computing Research Repository, cs.CG/0601002.
- [MTG04] MÜLLER M., TESCHNER M., GROSS M.: Physically-based simulation of objects represented by surface meshes. In *Proceedings of Computer Graphics International CGI'04* (2004), pp. 26–33.
- [Nie93] NIELSON G. M.: Scattered data modeling. *IEEE Comput. Graph. Appl.* 13, 1 (1993), 60–70.
- [Noc02] NOCIAR M.: *Triangulácie v rovine a teréne*. Master's thesis, Comenius University, Bratislava, 2002.
- [PS85] PREPARATA F. P., SHAMOS M. L.: *Computational geometry: an introduction*. Springer-Verlag, 1985.
- [Rip90] RIPPA S.: Minimal roughness property of the delaunay triangulation. *Comput. Aided Geom. Des.* 7, 6 (1990), 489–497.
- [RN00] ROXBOROUGH T., NIELSON G. M.: Tetrahedron based, least squares, progressive volume models with application to freehand ultrasound data. In *VISUALIZATION '00: Proceedings of the 11th IEEE Visualization 2000 Conference (VIS 2000)* (2000), IEEE Computer Society.
- [Sch93] SCHUMAKER L. L.: Computing optimal triangulations using simulated annealing. In *Selected papers of the international symposium on Free-form curves and free-form surfaces* (1993), Elsevier Science Publishers B. V., pp. 329–345.

- [She02] SHEWCHUK J. R.: Two discrete optimization algorithms for the topological improvement of tetrahedral meshes. Unpublished manuscript, 2002.
- [SW03] SU D., WILLIS P.: Demosaicing of colour images using pixel level data-dependent triangulation. In *TPCG '03: Proceedings of the Theory and Practice of Computer Graphics 2003* (Washington, DC, USA, 2003), IEEE Computer Society, p. 16.
- [SW04] SU D., WILLIS P.: Image interpolation by pixel-level data-dependent triangulation. *Comput. Graph. Forum* 23, 2 (2004), 189–202.
- [Tót04a] TÓTH Z.: *Rekonštrukcia obrazu pomocou triangulácie*. Master's thesis, Comenius University, Bratislava, 2004.
- [Tót04b] TÓTH Z.: Towards an optimal texture reconstruction. In *Proceedings of the Central European Seminar on Computer Graphics '04* (2004). (to appear in CESC Best Paper Book 2000 - 2005, <http://www.cescg.org>).
- [Tót06] TÓTH Z.: Rekonštrukcia viacrozmerných dát pomocou triangulácie. Žiadosť o Grant Univerzity Komenského, 2006.
- [TVFG05] TÓTH Z., VIOLA I., FERKO A., GRÖLLER M. E.: *N-dimensional Data-Dependent Reconstruction Using Topological Changes*. Tech. Rep. TR-186-2-05-08, Institute of Computer Graphics and Algorithms, Vienna University of Technology, Sept. 2005. (submitted for publication at Topo-In-Vis, <http://www.vrvis.at/topo-in-vis/2005/>).
- [vBSF05] ŽÁRA J., BENEŠ B., SOCHOR J., FELKEL P.: *Moderní počítačová grafika 2. vydání*. Praha: Computer Press, 2005.
- [Vio02] VIOLA I.: *Applications of Hardware-Accelerated Filtering in Computer Graphics*. M.sc. thesis, Institute of Computer Graphics and Algorithms, Vienna University of Technology, Favoritenstrasse 9-11/186, A-1040 Vienna, Austria, Apr. 2002.
- [WB02] WANG A., BOVIK A.: A universal image quality index. *IEEE Signal Processing Letters* 9, 3 (2002), 81–84.
- [Wik06] WIKIPEDIA: Markov network, 2006. http://en.wikipedia.org/wiki/Markov-random_fields.
- [WWT*98] WEIMER H., WARREN J., TROUTNER J., WIGGINS W., SHROUT J.: Efficient co-triangulation of large data sets. In *IEEE Visualization 98* (1998), pp. 119–126.
- [YBS01] YU X., BRYAN B. S., SEDERBERG T. W.: Image reconstruction using data-dependent triangulation. *Computer Graphics and Applications* 21, 3 (2001), 62–68.

Dodatok A

Aktivity

Publikácie

Tóth Z.: *Dátovo závislé triangulácie*. Rigorózna práca, Univerzita Komenského, Bratislava SR, 2005.

Tóth Z., Viola I., Ferko A., Gröller M. E.: *N-dimensional Data- Dependent Reconstruction Using Topological Changes*. Tech. Rep. TR-186- 2-05-08, Institute of Computer Graphics and Algorithms, Vienna University of Technology, Sept. 2005. (submitted for publication at Topo-In-Vis, <http://www.vrvis.at/topo-in-vis/2005/>).

Tóth Z.: Rekonštrukcia obrazu pomocou triangulácie. Master's thesis, Comenius University, Bratislava, 2004.

Tóth Z.: Towards an optimal texture reconstruction. In *Proceedings of the Central European Seminar on Computer Graphics '04* (2004). (to appear in CESC Best Paper Book 2000 - 2005, <http://www.cescg.org>).

Tóth Z. *Image Reconstruction Using Triangulations*. Študentská vedecká konferencia FMFI UK 2004 (Bratislava, SR - Brno, CZ), 2004.

Vystúpenia na seminároch

N-dimensional Data-Dependent Reconstruction Using Topological Changes, Topo-In-Vis Workshop 2005, 29.9.2005, Budmerice.

Feature Preserving Unstructured Grids, ASO workshop on Natural Phenomena Visualization using Unstructured Grids, 11.05.2005, Budmerice.

Rozšírenie Dátovo Závislých Triangulácií do Vyšších Dimenzií. Seminár z numerickej geometrie, FMFI Comenius University, 20.02.2005, Bratislava.

Triangulation-based Edge Preserving Reconstruction for Volume Data, Konversatorium in WS 2004/2005, Technische Universität Wien, Institut für Computergraphik und Algorithmen, 10.12.2004, Wien.

Image Reconstruction Using Triangulations, Colloquy Cycle SS 2004, Technische Universität Wien, Institut für Computergraphik und Algorithmen, 17.09.2004, Wien.

Ocenenia

Štipendium ESF: Skvalitnenie vedeckej práce doktorandov a postdokov na FMFI UK, 2006

Cena Rektora Univerzity Komenského za najlepšiu diplomovú prácu v odbore matematika

2. miesto ŠVOČ 2004 Česko-Slovenské záverečné kolo - v sekcii Teoretická Informatika

Laureat Študentskej vedeckej konferencie FMFI UK v školskom roku 2003/2004 (za prácu *Image Reconstruction Using Triangulations*)

2nd Best Paper Award (za článok *Towards an Optimal Texture Reconstruction*, CESC 2004)

Tosiyasu Lawrence KUNII Award 2004

Zahraničné pobyty

September 2005 Austria - Vienna, Institute of Computer Graphics and Algorithms, Technische Universität Wien.

December 2004 - Február 2005 Austria - Vienna, Institute of Computer Graphics and Algorithms, Technische Universität Wien.

Spoluorganizátor podujatí

ASO Workshop on Natural Phenomena Visualization using Unstructured Grid 2005, aso.sccg.sk

TopoInVis Workshop 2005, <http://www.vrvis.at/topo-in-vis/2005/>

Grantová činnosť

Natural Phenomena Visualization using Unstructured Grid - ASO sustainable cooperation grant - spoluriešiteľ - 5. 2005 / 10. 2005, <http://aso.sccg.sk>

Rekonštrukcia viacrozmerých dát pomocou triangulácie - Grant Univerzity Komenského, 2006.

VEGA - Výpočtová geometria pre real-time rendering (2006-2008)

APVT - Virtuálna Bratislava (2002 - 2004)