Metrické konštrukcie elipsy

Soňa Kudličková, Alžbeta Mackovová

Elipsu, ako regulárnu kužeľosečku, môžeme študovať synteticky (konštrukcie bodov elipsy) alebo analyticky (výpočet súradníc bodov elipsy). Zameriame sa na syntetickú metódu a opíšeme konštrukcie bodov elipsy pre rôzne vstupné údaje, pričom použijeme ohniskovú (metrickú) definíciu elipsy.

Text sa opiera o bakalársku prácu: Alžbeta Mackovová „Metrické vlastnosti elipsy", presnejšie o upravenú verziu, doplnenú o pripomienky na obhajobe, ktorá je súčasťou tohto textu ako príloha [P].

Pri vykresľovaní elipsy použijeme buď rysovacie potreby alebo voľne dostupný matematický softvér GeoGebra, ktorý navyše zabezpečí interakciu medzi meniacimi sa hodnotami vstupných údajov a vykreslenou elipsou (ak existuje).

Text je rozdelený na tri časti:

1. **Teoretické východiská**, kde:
   - je postupnosť pojmov a vlastností, ktoré sa využívajú pri konštrukciách,
   - sú definície, vety a tvrdenia uvedené v tomto texte vybraté z práce [P],
   - sú za každou takouto vetou uvedené odkazy na stranu v práci [P], kde je úplná formulácia a dôkaz. Odkaz má tvar [číslo vety/strana].

2. **Zbierka riešených úloh**, ktorá obsahuje:
   - zadanie úlohy zapísané v tvare: Zostrojte elipsu, ak poznáte;
   - postup konštrukcie, zapísaný v krokoch;
   - výstup konštrukcie, elipsa s požadovanými vlastnosťami
   - ponuku na vykreslenie elipsy v softvéri GeoGebra doplnenú o interakciu.

3. **Zbierka cvičení**:
   - predstavuje súbor zadaní s návrhom umiestnenia vstupných prvkov.

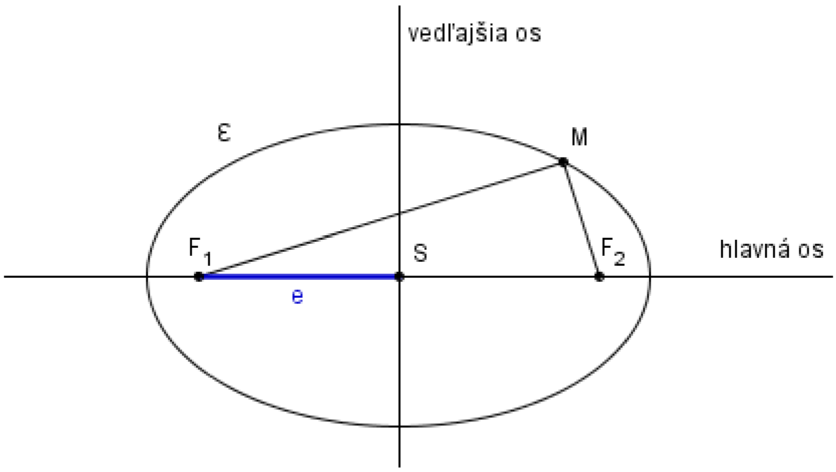
K vykresľovaniu elipsy v softvéri GeoGebra je potrebné prihlásiť sa medzi používateľov softvéru.

1.Teoretické východiská

Ohnisková definícia elipsy:

Elipsa ε je množina všetkých bodov M roviny, ktoré majú od dvoch daných pevných bodov F_1, F_2 tejto roviny konštantný súčet vzdialeností väčší než je vzdialenosť daných bodov:

$|F_1F_2| < |F_1M| + |F_2M|$.   [D2.1/7]



Súvisiace pojmy I:

ohniská – dané body F_1, F_2 (latinsky *focus* – ohnisko);

sprievodiče bodu M – úsečky F_1M, F_2M a ich dĺžka;

súčet dĺžok sprievodičov – súčet dĺžok úsečiek $|F_1M| + |F_2M|$ je konštantný;

stred elipsy S – stred úsečky F_1F_2;

lineárna excentricita – dĺžka úsečiek $|F_1S| = |F_2S| = e$;

hlavná os elipsy – priamka F_1F_2;

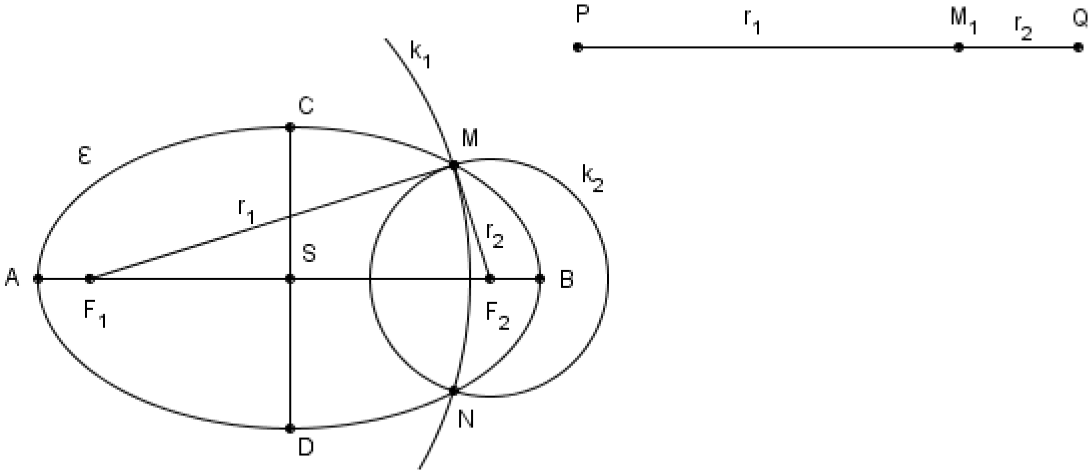
vedľajšia os elipsy – priamka kolmá na hlavnú os a prechádzajúca stredom S.

Bodová konštrukcia elipsy: a) **pomocou rysovacích potrieb**

Zostrojte body elipsy ε, ak sú dané ohniská F_1, F_2 a súčet dĺžok sprievodičov $|F_1M| + |F_2M| = |PQ| = 2a$ a platí $|F_1F_2| < |F_1M| + |F_2M|$. Riešte pre $|F_1F_2| = 4j$, $|PQ| = 5j$.

E1: Algoritmus konštrukcie bodov elipsy $\varepsilon\,(F_1, F_2, 2a)$:

Vstup: $|F_1F_2| = 4j$, $|F_1M| + |F_2M| = 5j$ spĺňajú podmienku $|F_1F_2| < |F_1M| + |F_2M|$



Kroky algoritmu:

1. Zvoľme ľubovoľný vnútorný bod M_1 úsečky PQ a označme $|PM_1| = r_1$, $|M_1Q| = r_2$. Teda $|PQ| = |PM_1| + |M_1Q| = r_1 + r_2 = 2a$.
2. Zostrojme kružnice $k_1(F_1, r_1)$, $k_2(F_2, r_2)$.
3. Určme priesečníky kružníc $k_1 \cap k_2 = \{M, N\}$. Ak je splnená podmienka $|r_1 - r_2| \leq |F_1F_2|$, tak priesečníky existujú a body M, N sú body elipsy ε, pretože vyhovujú podmienke: $|F_1M| + |F_2M| = |F_1N| + |F_2N| = r_1 + r_2 = 2a$.
4. Ďalšie body elipsy zostrojíme opakovaním krokov 1, 2, 3.

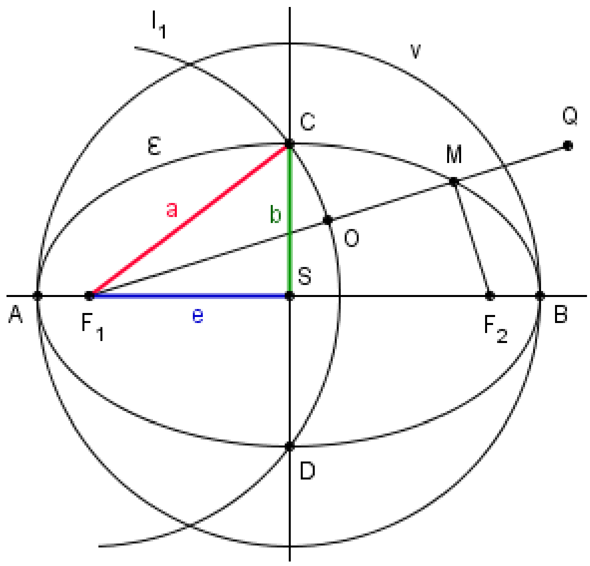
Výstup: body elipsy ε

Bodová konštrukcia elipsy: b) **pomocou softvéru GeoGebra**:

a) Vykreslí elipsu pre vstupné dáta po pravom kliknutí na bod M_1 a zapnutí „*Animating*“;
b) Ponúkne možnosť meniť polohu: ohnísk F_1, F_2 a dĺžku úsečky $|PQ| = 2a$;
c) Pri nesplnení podmienky $|r_1 - r_2| \leq |F_1F_2|$ t. j. priesečníky neexistujú, sa v algebrickom okne vypíše informácia „*Undefined*“.

Bodová konštrukcia elipsy

Súvisiace pojmy II:



<u>hlavné vrcholy A, B</u> – priesečníky kružnice $v(S, \frac{|PQ|}{2} = a)$ s hlavnou osou;

<u>vedľajšie vrcholy C, D</u> – priesečníky kružnice $l_1(F_1, a)$, resp. $l_2(F_2, a)$ s vedľajšou osou;

<u>hlavná polos</u> – úsečka s dĺžkou $a = |SA| = |SB|$;

<u>vedľajšia polos</u> – úsečka s dĺžkou $b = |SC| = |SD|$;

<u>hlavná os</u> – priamka F_1F_2, ale aj úsečka AB;

<u>dĺžka hlavnej osi</u> – dĺžka úsečky $|AB| = 2a$;

<u>vedľajšia os</u> – priamka CD, ale aj úsečka CD;

<u>dĺžka vedľajšej osi</u> – dĺžka úsečky $|CD| = 2b$;

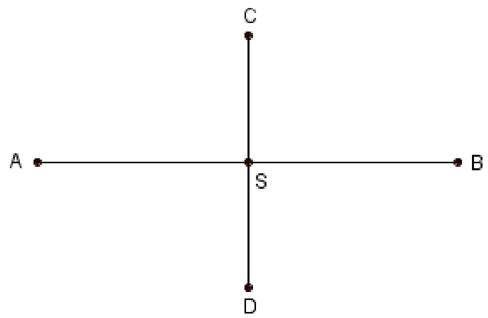
<u>charakteristický trojuholník elipsy</u> – trojuholník F_1SC, v ktorom platí $a^2 = e^2 + b^2$.

Vykresľovanie elipsy: a) **pomocou rysovacích potrieb**

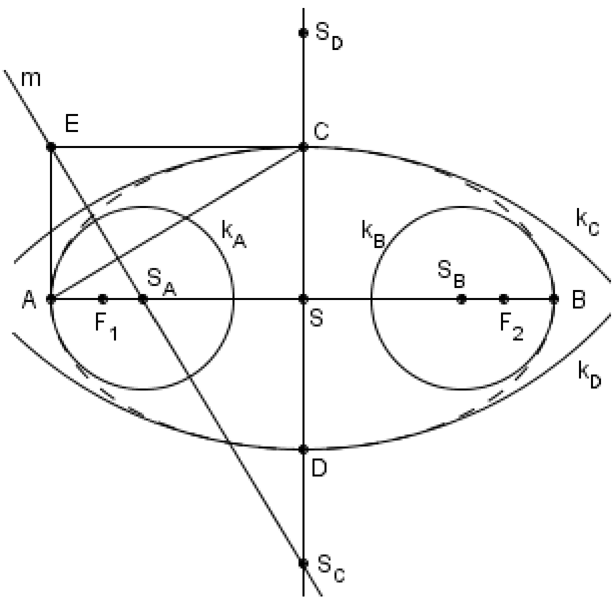
V okolí hlavných vrcholov elipsu nahradíme segmentami oskulačných kružníc s polomerom $\rho_A = \frac{b^2}{a}$ a v okolí vedľajších vrcholov s polomerom $\rho_C = \frac{a^2}{b}$ [V2.2/10]

Konštrukcia stredov oskulačných kružníc:

Vstup: elipsa ε (A, B, C, D)



Postup konštrukcie:



1. Doplníme trojuholník ASC na obdĺžnik $ASCE$.
2. Zostrojíme priamku m kolmú na priamku AC a prechádzajúcu bodom E.
3. Určíme body $m \cap AB = \{S_A\}$ a $m \cap CD = \{S_C\}$.
4. Bod S_A je stred oskulačnej kružnice k_A v hlavnom vrchole A s polomerom $\rho_A = \frac{b^2}{a}$.

   analogicky pre hlavný vrchol B: stred S_B, kružnica k_B, polomer $\rho_B = \rho_A$.
5. Bod S_C je stred oskulačnej kružnice vo vedľajšom vrchole C s polomerom $\rho_C = \frac{a^2}{b}$.

   analogicky pre vedľajší vrchol D: stred S_D, kružnica k_D, polomer $\rho_D = \rho_C$.

Výstup: stredy oskulačných kružníc S_A, S_B, S_C, S_D, vykreslenie oskulačných kružníc a elipsy ε (A, B, C, D).

Vykresľovanie elipsy: b) **pomocou softvéru GeoGebra**:

konštrukcia oskulačných kružníc v GeoGebre:

a) Pre elipsu ε (A, B, C, D) vypočíta stredy oskulačných kružníc a vykreslí oskulačné kružnice
b) Možnosť meniť polohu: hlavných vrcholov A, B a vedľajších vrcholov C, D

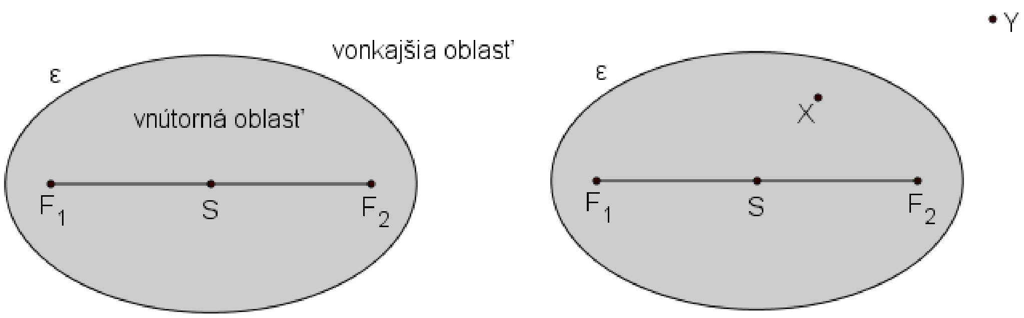
Oskulačné kružnice elipsy

Vlastnosti elipsy

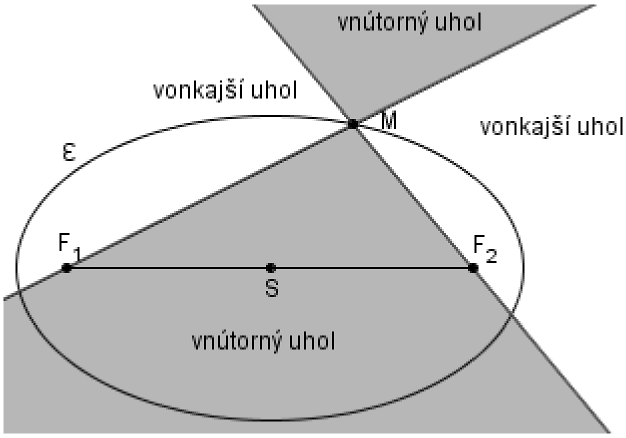
Elipsa je uzavretá rovinná krivka, ktorá rozdeľuje rovinu na dve oblasti – vnútornú a vonkajšiu.

Vnútorný bod elipsy – bod X vnútornej oblasti, pre ktorý platí $|F_1X| + |F_2X| < 2a$

Vonkajší bod elipsy – bod Y vonkajšej oblasti a platí $|F_1Y| + |F_2Y| > 2a$



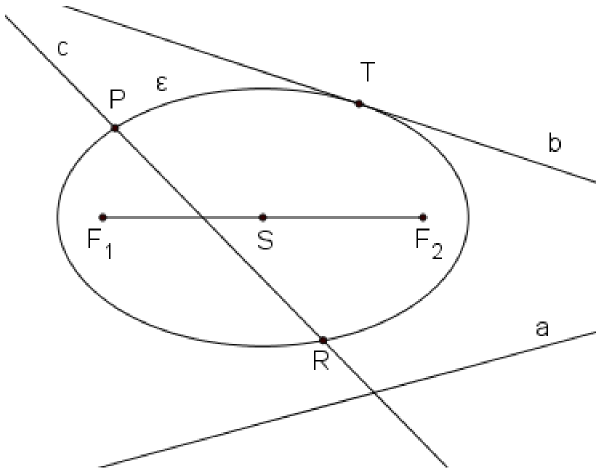
Sprievodiče bodu M vytvoria štyri uhly, pričom jeden z nich vždy obsahuje stred S elipsy.



<u>Vnútorný uhol sprievodičov bodu *M*</u> je uhol priamok F_1M, F_2M, ktorý obsahuje stred *S* elipsy a uhol k nemu vrcholový.

<u>Vonkajší uhol sprievodičov bodu *M*</u> je ľubovoľný z uhlov, ktorý je k vnútornému uhlu susedný.

Priamka má s elipsou ε jednu z nasledujúcich polôh a je jej:



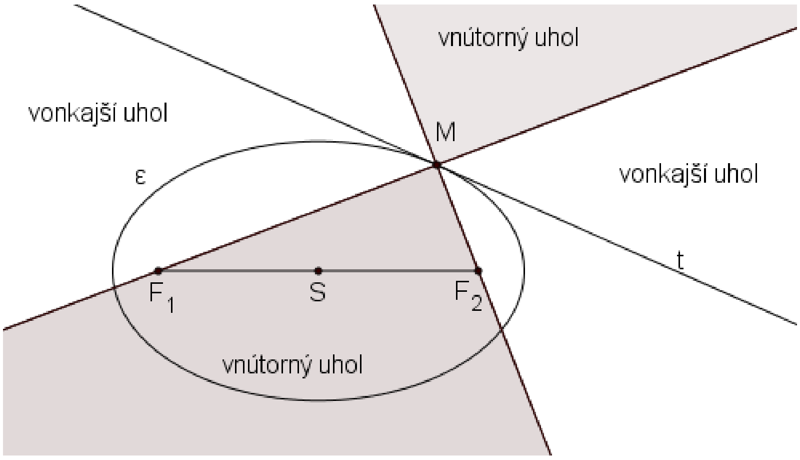
a) <u>nesečnica</u> – obsahuje len vonkajšie body elipsy;

b) <u>dotyčnica</u> – má s elipsou práve jeden spoločný bod, ostatné body priamky sú vonkajšie body;

c) <u>sečnica</u> – má s elipsou dva spoločné body, ležia na nej vnútorné aj vonkajšie body elipsy [V2.3/15].

Konštrukcie dotyčnice elipsy: a) **pomocou rysovacích potrieb**

Dotyčnica elipsy je osou vonkajších uhlov sprievodičov v bode elipsy [V2.4/18].



Vstup: ohniská F_1, F_2, bod elipsy M

Kroky konštrukcie:

1. Sprievodiče r_1, r_2 bodu M.
2. Os vonkajšieho uhla sprievodičov r_1, r_2 bodu M.
3. Dotyčnica elipsy v bode M.

Výstup: dotyčnica v bode elipsy

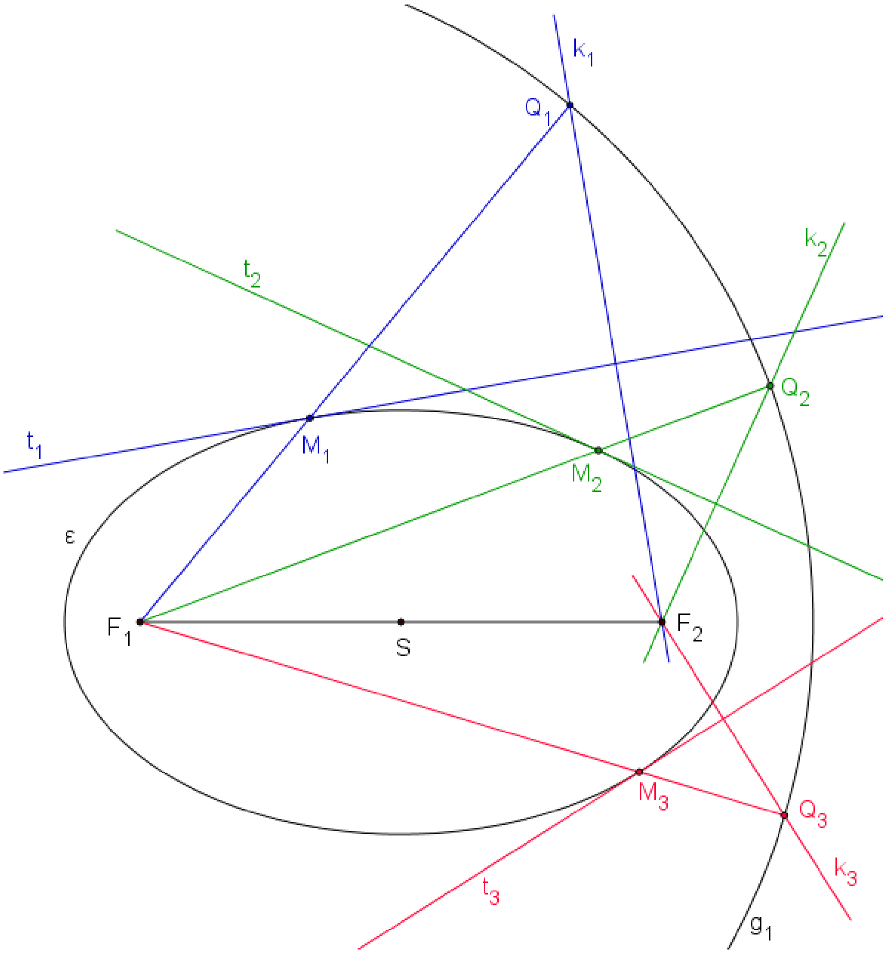
Konštrukcie dotyčnice elipsy: b) **pomocou softvéru GeoGebra**

Možnosť meniť polohu ohnísk F_1, F_2 a bodu M elipsy.

Dotyčnica elipsy

Konštrukcia určujúcej kružnice: a) **pomocou rysovacích potrieb**

<u>Určujúca kružnica</u> $g_1(F_1, 2a)$, $g_2(F_2, 2a)$ je množina bodov súmerne združených s jedným ohniskom elipsy podľa všetkých jej dotyčníc [V2.6/19].



Na obrázku je elipsa $\varepsilon(F_1, F_2, M_i)$ a body Q_i , $i = 1, 2, 3$, ktoré ležia na kolmiciach k_i, sú súmerne združené s ohniskom F_2 podľa dotyčníc t_i, $i = 1, 2, 3$, v bodoch elipsy M_i, $i = 1, 2, 3$. Platí: $|F_1Q_1| = |F_1Q_2| = |F_1Q_3| = 2a$, teda body Q_i , $i = 1, 2, 3$, ležia na určujúcej kružnici $g_1(F_1, 2a)$.

Konštrukcia určujúcej kružnice: b) **pomocou softvéru GeoGebra**:

<u>Vstup</u>: ohniská F_1, F_2, bod elipsy M, možnosť meniť polohu

<u>Kroky konštrukcie</u>:

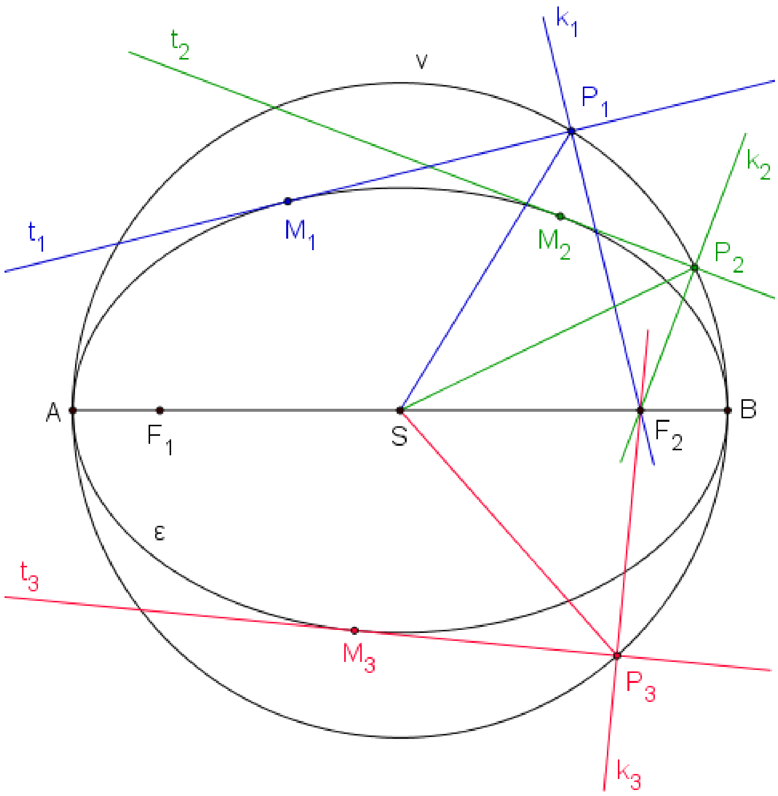
1. Dotyčnice t_i v bodoch elipsy M_i
2. Kolmice k_i na dotyčnice t_i z bodu F_1, resp. F_2
3. Body, Q_i, resp. Q_i' súmerne združené s ohniskom F_1, resp. F_2 podľa dotyčníc t_i

<u>Výstup</u>: určujúce kružnice $g_1(F_1, 2a)$, $g_2(F_2, 2a)$

[Určujúca kružnica elipsy]

Konštrukcia vrcholovej kružnice: a) **pomocou rysovacích potrieb**

<u>Vrcholová kružnica</u> v (S, a) je množinou piat kolmíc z jedného ohniska elipsy na všetky jej dotyčnice [V2.7/20].



Na obrázku body P_i , i = 1, 2, 3 , sú päty kolmíc k_i, i = 1, 2, 3 , z ohniska F_2 elipsy na dotyčnice t_i, i = 1, 2, 3 . Platí $|SP_1|= |SP_2|= |SP_3|=a$, teda body P_i , i = 1, 2, 3 , ležia na kružnici v (S, a).

Konštrukcia vrcholovej kružnice: b) **pomocou softvéru GeoGebra**:

<u>Vstup</u>: ohniská F_1, F_2 a bod M elipsy, možnosť meniť polohu

<u>Kroky konštrukcie</u>:

1. Dotyčnice t_i v bodoch elipsy M_i
2. Kolmice k_i, na dotyčnice t_i z ohniska F_2
3. Body P_i sú päty kolmíc k_i na dotyčnice t_i

<u>Výstup</u>: vrcholová kružnica v (S, a).

[Vrcholová kružnica elipsy]()

Uvedené pojmy, vlastnosti a konštrukcie použijeme pri riešení príkladov pomocou rysovacích potrieb, ale i v interakcii so softvérom GeoGebra.