GEOMETRIA 4 – KONŠTRUKČNÁ GEOMETRIA

Obsahom predmetu je súhrn poznatkov viacerých geometrických disciplín od elementárnej planimetrie a stereometrie, syntetickej deskriptívnej geometrie, cez analytickú a diferenciálnu geometriu až po počítačovú geometriu.

- ELEMENTÁRNA PLANIMETRIA (Geometria 3)
- STEREOMETRIA (Geometria 4)
- DESKRIPTÍVNA GEOMETRIA (Geometria 4)
- ANALYTICKÁ GEOMETRIA(Geometria 1)
- DIFERENCIÁLNA GEOMETRIA (Mat.analýza, Geometria 2)
- POČÍTAČOVÁ GEOMETRIA

Štúdium Geometrie 4 je zamerané na rozvíjanie
- priestorovej predstavivosti
- konštrukčných zručností

pri zostrojovaní priemetov priestorových objektov vo vybraných zobrazovacích metódach a na syntetické metódy riešenia geometrických úloh o vzájomnej polohe objektov v priestore.

GEOMETRIA 4 zimný semester

I. STEREOMETRIA
II. ZÁKLADNÉ GEOMETRICKÉ TELESÁ
III. PRINCÍPY PREMIETANIA
IV. ZOBRAZOVACIE METÓDY

Literatúra:

Piják a kol.: Konštrukčná geometria, SPN, Bratislava,1985
Urban,A: Deskriptivní geometrie I.,SNTL, Praha,1965
Kraemer,E: Zobrazovací metody I, SPN, Praha, 1991
Bašová, Kyselová,…: Deskriptívna geometria-návody na cvičenia, STU,Bratislava 2000

I. STEREOMETRIA

EUKLIDOVSKÝ PRIESTOR je trojica $E_3 = (\beta, \mathbf{V}, +)$

β body A,B,C
$\mathbf{V}$ vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$
$+$ sčitovanie $\beta + \mathbf{V}$

- $\forall A \in \beta, \forall \mathbf{a} \in \mathbf{V}: A + \mathbf{a} \in \beta$
- $\forall A \in \beta, \forall \mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathbf{V}: (A + \mathbf{a}) + \mathbf{b} = A + (\mathbf{a} + \mathbf{b})$
- $\forall A \in \beta, \forall \mathbf{a} \in \mathbf{V}: A + \mathbf{a} = A \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}$
- $\forall A,B \in \beta, \exists! \mathbf{a} \in \mathbf{V}: A + \mathbf{a} = B$

AXIOMATICKÁ VÝSTAVBA EUKLIDOVSKÉHO PRIESTORU bola popísaná nemeckým matematikom Davidom **HILBERTOM** (1862-1943).

Základné geometrické objekty priestoru:

$\mathcal{B}$: **bod** *A,B,C … 1,2,…*

$\wp$: **priamka** *a, b, c, …p,q…*

$\mathfrak{R}$: **rovina** α, β, γ,…π, ρ…

Základné relácie:

∗ incidencia ∗ usporiadanie ∗ zhodnosť ∗ spojitosť ∗ rovnobežnosť

HILBERTOVA AXIOMATICKÁ SÚSTAVA obsahuje axiomy rozdelené do piatich skupín podľa základných relácií.

I. AXIOMY INCIDENCIE (I_1 – I_8) požiadavky relácie vzájomnej polohy bodov, priamok a rovín

incidovať ≈ ležať na ≈ prechádzať ≈ obsahovať

<u>Definícia I.1</u>

<u>Kolineárne body</u>: množina bodov incidentná s nejakou priamkou

<u>Komplanárne body</u>: množina bodov incidentná s nejakou rovinou

I_1 Ku každým dvom rôznym bodom existuje práve jedna priamka s nimi incidentná

I_2 Na každej priamke existujú aspoň dva rôzne body.

I_3 Existujú body, ktoré neležia všetky na tej istej priamke.

I_4 Ku každým trom nekolineárnym bodom existuje práve jedna rovina s nimi incidentná.

I_5 V každej rovine ležia aspoň tri nekolineárne body.

I_6 Ak dva rôzne body priamky ležia v rovine, tak každý bod priamky leží v tejto rovine.

I_7 Ak majú dve roviny spoločný bod, tak majú spoločnú priamku.

I_8 Existujú body, ktoré všetky neležia v tej istej rovine.

PLANIMETRICKÝ AXIOMATICKÝ SYSTÉM

II. **AXIOMY USPORIADANIA (U_1 - U_4)**

III. AXIOMY ZHODNOSTI (Z_1 - Z_6)

IV. **AXIOMY SPOJITOSTI (S_1 - S_2)**

V. **AXIOMA ROVNOBEŽNOSTI (R_1)**

R_1 Euklidova axioma

Bodom neležiacim na danej priamke prechádza práve jedna priamka rovnobežná s danou priamkou.

Lobačevského axioma
Bodom neležiacim na danej priamke prechádzajú aspoň dve priamky rovnobežné s danou priamkou.

GEOMETRIA TROJROZMERNÉHO EUKLIDOVSKEHO PRIESTORU

STEREOMETRIA

- **AXIOMY INCIDENCIE**
- **AXIOMY USPORIADANIA**
- **AXIOMY ZHODNOSTI**
- **AXIOMY SPOJITOSTI**
- **AXIOMA ROVNOBEŽNOSTI**

Dôsledky AXIOM INCIDENCIE:
1. Dve rôzne priamky majú najviac jeden spoločný bod

2. Rovina a priamka s ňou neincidentná majú najviac jeden spoločný bod

3. Ak majú dve rôzne roviny spoločný bod, tak majú spoločnú práve jednu priamku s týmto bodom incidentnú

Definícia I.2
Rovnobežné priamky [=rovnobežky] - priamky jednej roviny, ktoré nemajú spoločný bod
Rôznobežné priamky [=rôznobežky] – dve priamky, ktoré majú práve jeden spoločný bod
Mimobežné priamky [=mimobežky] – dve priamky, ktoré neležia v jednej rovine

Definícia I.3
Priamka je rôznobežná s rovinou – ak priamka má s rovinou práve jeden spoločný bod
Rôznobežné roviny – dve roviny, ktoré majú spoločnú práve jednu priamku
Priesečník – spoločný bod priamky a roviny
Priesečnica – spoločná priamka rovín

Definícia I.4
Trs priamok – množina všetkých priamok prechádzajúcich jedným bodom
Zväzok rovín- množina všetkých rovín prechádzajúcich jednou priamkou

Tvrdenie I.1
Rovina je určená :
a) priamkou a bodom, ktorý na nej neleží
b) dvomi (rôznymi) rovnobežkami
c) dvomi rôznobežkami

Definícia I.5

Dve priamky sú rovnobežné práve vtedy, keď sú alebo totožné alebo ležia v jednej rovine a nemajú spoločný bod

Priamka je rovnobežná s rovinou práve vtedy, keď alebo v rovine leží alebo nemajú spoločný bod

Dve roviny sú rovnobežné práve vtedy, keď sú alebo totožné alebo nemajú spoločný bod

Tvrdenie I.2

Úplná klasifikácia vzájomnej polohy základných geometrických útvarov

- Dve priamky sú alebo **rovnobežné** alebo **rôznobežné** alebo **mimobežné**
- Priamka je s rovinou alebo **rovnobežná** alebo **rôznobežná**
- Dve roviny sú alebo **rovnobežné** alebo **rôznobežné**

Základné vety o rovnobežných geometrických útvaroch

Veta I.1 **K1. Kritérium rovnobežnosti priamky a roviny**.

Priamka je rovnobežná s rovinou práve vtedy, keď je rovnobežná s priamkou roviny

A1. Algoritmus konštrukcie: **priamka prechádzajúca daným bodom a rovnobežná s danou rovinou.**

Dané: M- bod, α- rovina, $M \notin \alpha$

A1: 1. $m \subset \alpha$, m – ľubovoľná priamka
2. a: $M \in a$, $a \| m$

Veta I.2 Ak sú dve roviny navzájom rovnobežné, tak každá priamka jednej z nich je rovnobežná s druhou rovinou.

Veta I.3 Ak priamky a,b sú rovnobežky a priamka b je rovnobežná s rovinou α, tak je aj priamka a rovnobežná s rovinou α.

Veta I.4 Ak priamky a,b sú rovnobežky aj priamky b,c sú rovnobežky, tak sú aj priamky a,c rovnobežky.

Veta I.5 Ak priamka a je rovnobežná s rovinou α, ktorá je rovnobežná s rovinou β, tak je priamka a rovnobežná s rovinou β.

Veta I.6 **K2. Kritérium rovnobežnosti dvoch rovín**

Dve roviny sú rovnobežné práve vtedy, keď jedna z rovín obsahuje dve rôznobežky, ktoré sú rovnobežné s druhou rovinou.

<u>Veta I.7</u> Ak roviny α, β sú rovnobežné aj roviny β, γ sú rovnobežné, tak je aj rovina α rovnobežná s rovinou γ.

<u>Definícia I.6</u>
<u>Osnova priamok</u>- trieda všetkých navzájom rovnobežných priamok
<u>Osnova rovín</u> - trieda všetkých navzájom rovnobežných rovín
<u>Priestorová vrstva</u> – množina bodov medzi dvomi rovinami osnovy

<u>Veta I.8</u> Existuje práve jedna rovina prechádzajúca daným bodom a rovnobežná s danou rovinou.

A2. Algoritmus konštrukcie : **rovina prechádzajúca daným bodom a rovnobežná s danou rovinou**

Dané: M- bod, α - rovina, $M \notin \alpha$

A2: 1. a, b: $a \cup b \subset \alpha$, $a \cap b = \{R\}$
2. a': $M \in a'$, $a' \parallel a$
b': $M \in b'$, $b' \parallel b$

Úlohy o vzájomnej polohe základných geometrických útvarov

Konštrukčná stereometrická úloha

- **Rozbor**
- **Konštrukcia**
- **Dôkaz**
- **Diskusia**

Konštrukcia v stereometrii - algoritmus vytvorenia priestorového objektu pomocou elementárnych konštrukcií

<u>ELEMENTÁRNE KONŠTRUKCIE</u>
1. Zostrojiť rovinu incidentnú s danými tromi nekolineárnymi bodmi
2. Zostrojiť priesečnicu dvoch rôznobežných rovín
3. Riešiť v danej rovine ľubovoľnú planimetrickú úlohu
4. Zvoliť
   - Ľubovoľný bod, ktorý leží [neleží] na danej priamke
   - Ľubovoľný bod, ktorý leží [neleží] v danej rovine
   - Ľubovoľnú priamku, ktorá prechádza [neprechádza] daným bodom
   - Ľubovoľnú priamku, ktorá leží [neleží] v danej rovine
   - Ľubovoľnú rovinu, ktorá je [nie je] incidentná s daným bodom
   - Ľubovoľnú rovinu, ktorá je [nie je] incidentná s danou priamkou
5. Zostrojiť …

Riešenie polohových úloh je ilustrované na jednoduchých telesách, presnejšie na ich rovnobežných priemetoch.

<u>VOĽNÉ ROVNOBEŽNÉ PREMIETANIE</u>

- Základná invariantná vlastnosť – ROVNOBEŽNOSŤ
- Základný invariant – DELIACI POMER

<u>Úloha</u> : Určte vzájomnú polohu priamky a roviny
Dané: a- priamka , α- rovina

A3. Algoritmus konštrukcie : **priesečník priamky s rovinou**
Dané: a- priamka , α- rovina

A3: 1. $\beta : a \subset \beta$, vhodná rovina
2. $m = \alpha \cap \beta$
3. $\{R\} = a \cap m = a \cap \alpha$

<u>Príklad</u> : Daný je kváder *ABCDA'B'C'D'*. Zostrojte priesečník priamky $a=A'C$ s rovinou $\alpha = AB'D'$.

<u>Úloha</u> : Určte vzájomnú polohu troch navzájom rôznych rovín
1: $\alpha || \beta$
1a: $\alpha || \beta \wedge \alpha || \gamma \Rightarrow \beta || \gamma$
1b: $\alpha || \beta \wedge \alpha \cap \gamma = \{a\} \Rightarrow \beta \cap \gamma = \{b\} \wedge a || b$

2: $\alpha \cap \beta = \{c\}$
2a: $c \subset \gamma \Rightarrow \alpha \cap \beta \cap \gamma = \{c\}$
2b: $c \cap \gamma = \{M\} \Rightarrow \alpha \cap \beta \cap \gamma = \{M\}$
2c: $c \cap \gamma = \emptyset \Rightarrow \alpha \cap \gamma = \{a\} \wedge \beta \cap \gamma = \{b\} \wedge a || b || c$

<u>Tvrdenie I.3</u>
Klasifikácia vzájomnej polohy troch navzájom rôznych rovín
- Všetky tri roviny sú navzájom rovnobežné
- Dve rovnobežné roviny pretína tretia v navzájom rovnobežných priesečniciach
- Všetky tri roviny majú spoločnú priamku
- Všetky tri roviny majú spoločný práve jeden bod
- Všetky dvojice rovín sú navzájom rôznobežné a ich priesečnice sú navzájom rovnobežné priamky

<u>Príklad</u> : Zostrojiť rovinný rez kvádra *ABCDA'B'C'D'* rovinou $\alpha = KLM$, ak $(AA'K) = (ABL) = -3$ a $(CC'M) = -1$.

<u>Priečka priamky</u> – každá priamka, ktorá danú priamku pretína (je s ňou rôznobežná)

<u>Úloha</u> : Zostrojiť priečku mimobežných priamok, ktorá prechádza daným bodom

Dané: a , b - mimobežky , M- bod ($M \notin a$, $M \notin b$)

Príklad : V kvádri $ABCDA'B'C'D'$ zostrojiť priečku mimobežiek $a = BC'$, $b = B'D'$, ktorá prechádza bodom M, $(AA'M) = -3$.

A4. Algoritmus konštrukcie : **priečka mimobežiek incidujúca daným bodom**
Dané: a , b - mimobežky , M- bod ($M \notin a$, $M \notin b$)

A4: 1. $\alpha = aM$, $\beta = bM$
2. $\alpha \cap \beta = p$
3. p X $a \wedge p$ X $b \Rightarrow p$ – priečka

Úloha : Zostrojiť priečku mimobežných priamok rovnobežnú s danou priamkou s
Dané: a , b - mimobežky , s - priamka (nie je rovnobežná ani s a ani s b)

A5. Algoritmus konštrukcie : **priečka mimobežiek rovnobežná s danou priamkou**
Dané: a , b - mimobežky , s - priamka (nie je rovnobežná ani s a ani s b)

A5: 1. $\alpha = as'$, $s' || s$, $\beta = bs''$, $s'' || s$
2. $\alpha \cap \beta = p$
3. p existuje $\Rightarrow p$ – priečka

Príklad : V kocke $ABCDA'B'C'D'$ zostrojiť priečku mimobežiek $a = A'S$, $S = AC \cap BD$, $b=BE$, $(DD'E) = 3$, rovnobežnú s priamkou $s = AB$.

Uhly základných geometrických útvarov. Kolmosť. Metrické vzťahy.

Tvrdenie I.4
Nech a, b sú dve nie rovnobežné priamky; V', V'' dva rôzne body a a', b'; a'', b'' dvojice priamok, pre ktoré $V' \in a' \cap b'$, $V'' \in a'' \cap b''$, $a' || a || a''$, $b' || b || b''$. Potom platí :
$\angle a' b' \cong \angle a'' b''$.

Definícia I.7
Uhol priamok *a,b* - uhol ľubovoľných nedisjunktných priamok a', b', pre ktoré platí $a' || a$, $b' || b$.
Kolmé priamky - dve priamky, ktorých uhol je pravý
Priamka kolmá na rovinu [= kolmica na rovinu] - priamka kolmá na všetky priamky roviny

Príklad : V kvádri *ABCDA'B'C'D'* určiť uhol priamok $a = BD'$, $b = B'C$. Konštrukcia
$|AB| = 5$, $|BC| = 4$, $|AA'| = 7$.

Veta I.9 **K3. Kritérium kolmosti priamky a roviny**.
Priamka je kolmá na rovinu práve vtedy, keď je kolmá na dve rôznobežky tejto roviny.

Veta I.10 Existuje jediná priamka prechádzajúca daným bodom a kolmá na danú rovinu.
Dôsledok Všetky priamky kolmé na tú istú rovinu sú rovnobežné

Veta I.11 Existuje jediná rovina prechádzajúca daným bodom a kolmá na danú priamku
Dôsledok Všetky roviny kolmé na tú istú priamku sú rovnobežné

Definícia I.8
Päta kolmice z bodu na rovinu - priesečník kolmice a roviny
Vzdialenosť bodu od roviny - dĺžka úsečky *MP*, kde bod *P* je päta kolmice z bodu *M* na rovinu
Vzdialenosť rovnobežných rovín - vzdialenosť ľubovoľného bodu jednej z rovín od druhej roviny

Veta I.12 Priamkou, ktorá nie je kolmá na danú rovinu, prechádza práve jedna rovina kolmá na danú rovinu.

Definícia I.9
Kolmo premietacia rovina priamky - rovina incidujúca priamkou a kolmá na danú rovinu
Kolmý priemet priamky do roviny - priesečnica kolmo premietacej roviny priamky a danej roviny

Definícia I.10
Uhol priamky s rovinou je pravý , ak je priamka kolmá na rovinu
Uhol priamky s rovinou - uhol priamky a jej kolmého priemetu do roviny

Príklad : V kocke *ABCDA'B'C'D'* určiť vzdialenosť bodu *B'* od roviny *A'BC'* a uhol priamky *BB'* s rovinou *A'BC'*.

Definícia I.11
Uhol dvoch rovnobežných rovín - nulový uhol
Uhol rôznobežných rovín α, β - uhol priamok a, b ($a \subset \alpha$, $b \subset \beta$, $a \perp \alpha \cap \beta$, $b \perp \alpha \cap \beta$)
Roviny sú kolmé, ak je ich uhol pravý

Dôsledok Uhol priamky s rovinou je zhodný s doplnkovým uhlom k uhlu priamky s kolmicou na rovinu

Dôsledok Uhol dvoch rovín je zhodný s uhlom kolmíc na tieto roviny

<u>Veta I.13</u> **K4. Kritérium kolmosti dvoch rovín**.
Dve roviny sú kolmé práve vtedy, ak jedna z nich obsahuje priamku kolmú na druhú rovinu.

<u>Veta I.14</u> Kolmým priemetom dvoch kolmých priamok do roviny sú kolmé priamky, ak aspoň jedna z priamok je rovnobežná s rovinou a druhá nie je na rovinu kolmá.

<u>Definícia I.12</u>
<u>Os mimobežiek</u> - priečka kolmá na obe mimobežky

A6. Algoritmus konštrukcie : **os mimobežiek**
Dané: a , b - mimobežky

A6: 1. $\rho \perp a$, $\sigma \perp b$
2. $\rho \cap \sigma = k$
3. k existuje a k X $a \wedge k$ X $b \Rightarrow k$ – os

<u>Príklad</u> : V kocke *ABCDA'B'C'D'* zostrojiť os mimobežiek $a = BD'$, $b=B'C$.

II. ZÁKLADNÉ GEOMETRICKÉ TELESÁ

Hranolová plocha Hranolový priestor Hranol

Definícia II.1

Nech P_n je ľubovoľný *n*-uholník v rovine α a *l* je priamka rôznobežná s rovinou α.
Hranolová plocha - množina bodov všetkých priamok, ktoré pretínajú *n*-uholník P_n a patria do osnovy priamky *l*
Hranolový priestor - množina bodov všetkých priamok, ktoré pretínajú *n*-uholník P_n a jeho vnútro a patria do osnovy priamky *l*

Súvisiace pojmy

- **určujúci *n*-uholník plochy** - *n*-uholník P_n
- **osnovová priamka** – priamka *l* a každá rovnobežka s priamkou *l*
- **osnovová rovina** – rovina rovnobežná s priamkou *l*
- **tvoriace priamky plochy** – osnovové priamky patriace ploche
- **hrana plochy** – tvoriaca priamka prechádzajúca vrcholom určujúceho *n*-uholníka
- **stena plochy** – množina bodov tvoriacich priamok, ktoré pretínajú jednu stranu určujúceho *n*-uholníka
- **styčná rovina plochy** – osnovová rovina obsahujúca práve jednu hranu alebo stenu plochy

Definícia II.2

Hranol – prienik hranolového priestoru ***H*** a priestorovej vrstvy určenej dvojicou rovnobežných rovín α, $\alpha' \neq \alpha$, ktoré nie sú osnovovými rovinami plochy

Súvisiace pojmy

- **podstavy hranola** - *n*-uholníky $\boldsymbol{H} \cap \alpha$, $\boldsymbol{H} \cap \alpha'$ (zhodné)
- **vrcholy hranola** – vrcholy podstáv
- **bočné hrany** – časti hrán príslušnej hranolovej plochy patriace hranolu
- **podstavové hrany** – strany podstáv
- **bočné steny** –časti stien príslušnej hranolovej plochy patriace hranolu (rovnobežníky)
- **steny hranola**- podstavy a bočné steny

Kolmý hranol- bočné steny sú kolmé na rovinu podstavy
Šikmý hranol – hranol, ktorý nie je kolmý
Pravidelný *n*- boký hranol – kolmý hranol, určujúci *n*-uholník je pravidelný *n*-uholník
Nepravidelný *n*- boký hranol– určujúci *n*-uholník je nepravidelný *n*-uholník
Rovnobežnosten – hranol, ktorého podstava je rovnobežník
Kváder – kolmý hranol, ktorého podstava je obdĺžnik
Kocka - pravidelný hranol, ktorého každá stena je štvorec

Súvisiace pojmy:

- **výška hranola** – vzdialenosť rovín podstáv
- **os hranola**- v pravidelnom hranole spojnica stredov podstáv

Ihlanová plocha   Ihlanový priestor   Ihlan

Definícia II.3

Nech P_n je ľubovoľný *n*-uholník v rovine α a *V* je bod neležiaci v rovine α.
Úplná ihlanová plocha - množina bodov všetkých priamok, ktoré pretínajú *n*-uholník P_n a prechádzajú bodom *V*
Úplný ihlanový priestor - množina bodov všetkých priamok, ktoré pretínajú *n*-uholník P_n a jeho vnútro a prechádzajú bodom *V*
Jednoduchá ihlanová plocha - množina bodov všetkých polpriamok so začiatkom v bode *V* , ktoré pretínajú *n*-uholník P_n
Jednoduchý ihlanový priestor - množina bodov všetkých polpriamok so začiatkom v bode *V*, ktoré pretínajú *n*-uholník P_n a jeho vnútro

Súvisiace pojmy

- **určujúci *n*-uholník plochy** - *n*-uholník P_n
- **vrchol** – bod *V*
- **vrcholová priamka** – priamka incidujúca bodom *V*
- **vrcholová rovina** – rovina incidujúca bodom *V*
- **tvoriace priamky plochy** – vrcholové priamky patriace ploche
- **hrana plochy** – tvoriaca priamka prechádzajúca vrcholom určujúceho *n*-uholníka
- **stena plochy** – množina bodov tvoriacich priamok, ktoré pretínajú jednu stranu určujúceho *n*-uholníka
- **styčná rovina plochy** – vrcholová rovina obsahujúca práve jednu hranu alebo stenu plochy

Definícia II.4

Ihlan – prienik jednoduchého ihlanového priestoru ***I*** a polpriestoru α*V* s hraničnou rovinou α pretínajúcou všetky tvoriace polpriamky príslušnej ihlanovej plochy a neprechádzajúcou vrcholom *V* plochy

Súvisiace pojmy

- **podstava ihlana** - *n*-uholník $\boldsymbol{I} \cap \alpha$
- **vrcholy ihlana** – vrchol *V* a vrcholy podstavy
- **bočné hrany ihlana**– časti hrán príslušnej ihlanovej plochy patriace ihlanu
- **podstavové hrany** – strany podstavy
- **bočné steny** – časti stien príslušnej ihlanovej plochy patriace ihlanu
- **steny ihlana**- podstava a bočné steny
- **výška ihlana**- vzdialenosť vrchola *V* od roviny podstavy

Kolmý ihlan- spojnica stredu podstavy a vrchola *V* je kolmá na rovinu podstavy
Šikmý ihlan – ihlan, ktorý nie je kolmý
Pravidelný *n*- boký ihlan – kolmý ihlan, určujúci *n*-uholník je pravidelný *n*-uholník
Nepravidelný *n*- boký ihlan– určujúci *n*-uholník je nepravidelný *n*-uholník
Štvorsten – všetky steny sú trojuholníky
Pravidelný štvorsten – všetky steny sú rovnostranné trojuholníky

Kružnicová valcová plocha   Kruhový valcový priestor   Kruhový valec

<u>Definícia II.5</u>

Nech *k* je ľubovoľná kružnica [kruh] v rovine α a *l* je priamka rôznobežná s rovinou α.
<u>Kružnicová valcová plocha</u> - množina bodov všetkých priamok, ktoré pretínajú kružnicu *k* a patria do osnovy priamky *l*
<u>Kruhový valcový priestor</u> - množina bodov všetkých priamok, ktoré pretínajú kruh *k* a patria do osnovy priamky *l*

<u>Súvisiace pojmy</u>

- **<u>určujúca kružnica [kruh]</u>** – kružnica [kruh] *k*
- **<u>osnovová priamka</u>** – priamka *l* a každá rovnobežka s priamkou *l*
- **<u>osnovová rovina</u>** – rovina rovnobežná s priamkou *l*
- **<u>tvoriace priamky plochy</u>** – osnovové priamky patriace ploche
- **<u>dotyková rovina</u>** – osnovová rovina, ktorá má s plochou spoločnú práve jednu tvoriacu priamku

<u>Definícia II.6</u>

<u>Kruhový valec - Valec</u> – prienik kruhového valcového priestoru ***V*** a priestorovej vrstvy určenej nie osnovými rovinami α, α'≠ α, ktorých prienik s kruhovým valcovým priestorom sú kruhy

<u>Súvisiace pojmy</u>

- **<u>podstavy valca</u>** - kruhy $V \cap \alpha$, $V \cap \alpha'$ (zhodné)
- **<u>výška valca</u>** – vzdialenosť rovín podstáv
- **<u>strana valca</u>** – úsečka hranice, ktorej krajné body sú na rôznych podstavách
- **<u>stred podstavy</u>** – stred kruhu

<u>Kolmý [rotačný] valec</u>- spojnica stredov podstáv je kolmá na rovinu podstavy
<u>Šikmý valec</u> – valec, ktorý nie je kolmý
<u>Rovnostranný valec –</u> výška kolmého valca je zhodná s priemerom podstavy

Kružnicová kužeľová plocha   Kruhový kužeľový priestor   Kruhový kužeľ

Definícia II.7

Nech *k* je ľubovoľná kružnica [kruh] v rovine α a *V* je bod neležiaci v rovine α.
Úplná kružnicová kužeľová plocha - množina bodov všetkých priamok, ktoré pretínajú kružnicu *k* a prechádzajú bodom *V*
Úplný kruhový kužeľový priestor - množina bodov všetkých priamok, ktoré pretínajú kruh *k* a prechádzajú bodom *V*
Jednoduchá kružnicová kužeľová plocha - množina bodov všetkých polpriamok so začiatkom v bode *V*, ktoré pretínajú kružnicu *k*
Jednoduchý kruhový kužeľový priestor - množina bodov všetkých polpriamok so začiatkom v bode *V*, ktoré pretínajú kruh *k*

Súvisiace pojmy

- **určujúca kružnica [kruh]** – kružnica [kruh] *k*
- **vrchol** – bod *V*
- **vrcholová priamka** – priamka incidujúca bodom *V*
- **vrcholová rovina** – rovina incidujúca bodom *V*
- **tvoriace priamky plochy** – vrcholové priamky patriace ploche
- **dotyková rovina plochy** – vrcholová rovina obsahujúca práve jednu tvoriacu priamku plochy

Definícia II.8

Kruhový kužeľ - Kužeľ – prienik jednoduchého kužeľového priestoru ***K*** a polpriestoru αV s hraničnou rovinou α, ktorá pretína príslušný priestor v kruhu

Súvisiace pojmy

- **podstava kužeľa** – kruh $\boldsymbol{K} \cap \alpha$
- **výška kužeľa-** vzdialenosť vrcholu *V* od roviny podstavy
- **hrana kužeľa** – hranica podstavy kužeľa
- **strana kužeľa** – úsečka *VM*, *M* – bod hrany kužeľa

Kolmý [rotačný] kužeľ – spojnica stredu podstavy a vrcholu *V* je kolmá na rovinu podstavy
Šikmý kužeľ - kužeľ, ktorý nie je rotačný
Rovnostranný kužeľ – rotačný kužeľ, ktorého dĺžka strany je zhodná s priemerom

Guľová plocha   Guľa

Definícia II.9

Nech S je bod priestoru a r je kladné číslo

Guľová plocha – množina bodov priestoru, ktorých vzdialenosť v od bodu S je zhodná s číslom r

Guľa – množina bodov priestoru, ktorých vzdialenosť v od bodu S spĺňa nerovnosť $0 <= v <= r$

Súvisiace pojmy

- **stred** – bod S
- **polomer**- číslo r, dĺžka úsečky SA, A bod guľovej plochy
- **priemer** – číslo $d = 2r$
- **hlavná kružnica**- kružnica na guľovej ploche, s polomerom zhodným s polomerom guľovej plochy
- **vedľajšie kružnice** – ostatné kružnice na guľovej ploche
- **dotyková rovina** – rovina, ktorá má s guľovou plochou spoločný práve jeden bod
- **dotykový bod** – spoločný bod guľovej plochy a dotykovej roviny

Mnohosteny

Definícia II.10

Mnohostenová plocha - zjednotenie $\boldsymbol{M}$ konečného počtu mnohouholníkov M_i v E_3, ktoré spĺňa podmienky

- prienik ľubovoľných dvoch mnohouholníkov je buď prázdna množina, spoločný vrchol alebo spoločná strana daných mnohouholníkov
- každá strana ľubovoľného mnohouholníka je stranou nanajvýš ešte jedného mnohouholníka z $\boldsymbol{M}$
- existuje lomená čiara $A_1\ldots..A_n$, ktorej začiatok A_1 a koniec A_n sú dva ľubovoľne zvolené vrcholy dvoch mnohouholníkov z $\boldsymbol{M}$ a každá jej strana $A_i A_j$ je stranou niektorého mnohouholníka z $\boldsymbol{M}$
- žiadne dva mnohouholníky s neprázdnym prienikom neležia v jednej rovine

Súvisiace pojmy:

- **vrcholy mnohostenovej plochy** – vrcholy mnohouholníkov
- **hrany mnohostenovej plochy** – strany mnohouholníkov
- **steny mnohostenovej plochy** – mnohouholníky

Definícia II.11

Uzavretá mnohostenová plocha – každá hrana mnohostenovej plochy je prienikom práve dvoch jej stien (plocha delí priestor na dve oblasti – vonkajšia, vnútorná)

Definícia II.12

Jednoduchá mnohostenová plocha – hrany vychádzajúce z ľubovoľného vrchola plochy možno usporiadať do postupnosti tak, že po sebe nasledujúce hrany sú stranami jednej steny

Definícia II.13

Mnohosten **–** jednoduchá uzavretá mnohostenová plocha

Definícia II.14

Konvexný mnohosten – mnohosten, ktorý leží v jednom polpriestore určenom hraničnou rovinou incidujúcou so stenou mnohostena

Definícia II.15

Pravidelný mnohosten – všetky steny sú zhodné pravidelné mnohouholníky

Existuje päť pravidelných mnohostenov **PLATÓNOVSKÉ TELESÁ**

- **štvorsten – tetraeder**
- **kocka – hexaeder**
- **osemsten – oktaeder**
- **dvanásťsten – dodekaeder**
- **dvadsaťsten – ikosaeder**

Definícia II.16

Polopravidelný mnohosten – steny sú dvoch typov pravidelných mnohouholníkov

ARCHIMEDOVSKÉ TELESÁ

- **otupený tetraeder**
- **otupený hexaeder**
- **otupený oktaeder**
- **otupený dodekaeder**
- **otupený ikosaeder**
- **pravidelný *n*-boký hranol**
- **rombokubooktaeder**
- **kubooktaeder**
- **romboikosododekaeder**
- **ikosododekaeder**

Definícia II.17

Eulerove mnohosteny – konvexné mnohosteny, pre ktoré platí $\mathbf{V + S = H + 2}$

III. PRINCÍPY PREMIETANIA

Premietanie

- **stredové**
- **rovnobežné**

Rovnobežné premietanie

Definícia III.1

Nech $\varepsilon \subset E_3$ je rovina a $\{ s \}$ osnova priamok rôznobežná s rovinou ε.

Rovnobežné premietanie – zobrazenie $f: E_3 \to \varepsilon$, $f: A \to s^A \cap \varepsilon = \{A_a\}$

$(A \in s^A \; , \; s^A \in \{ s \})$

Súvisiace pojmy:

- **priemetňa** - rovina ε, do ktorej premietame
- **smer *s*** – priamka *s*
- **premietacia priamka** - priamka patriaca do osnovy $\{ s \}$
- **uhol premietania** – odchýlka premietacej priamky s priemetňou

Definícia III.2

Kosouhlé (šikmé) premietanie – uhol premietania je ostrý
Pravouhlé (kolmé) premietanie – uhol premietania je pravý
Voľné rovnobežné premietanie – šikmé premietanie, nezávisí na súradnicovej sústave

Súvisiace pojmy:

- **rovnobežný priemet bodu** – priesečník premietacej priamky idúcej bodom s priemetňou
- **premietací útvar objektu *U*** – množina premietacích priamok všetkých bodov objektu *U*
- **rovnobežný priemet objektu *U*** – množina rovnobežných priemetov všetkých bodov objektu *U*
- **obrys priemetu objektu *U* (zdanlivý obrys)** – hranica rovnobežného priemetu objektu *U*
- **obrys objektu *U* (skutočný obrys)** – prienik objektu *U* a hranice premietacieho útvaru objektu *U*

Perspektívna (osová) afinita

Definícia III.3

Afinné zobrazenie – zobrazenie $f: \alpha \to \alpha'$, $A \to A' = f(A)$, ktoré každé tri navzájom rôzne kolineárne body *A*, *B*, *C* zobrazí buď do jedného bodu alebo troch kolineárnych bodov *A'*, *B'*, *C'* tak, že platí (*ABC*) = (*A'B'C'*)

Afinita roviny α na rovinu α’ - bijektívne afinné zobrazenie $f: \alpha \to \alpha'$

Súvisiace pojmy: zobrazenie $f: \alpha \to \alpha'$

- **rovinné pole** – množina bodov, priamok a útvarov roviny α
- **pole vzorov** – rovinné pole (α)
- **pole obrazov** – rovinné pole (α’)
- **súmiestne rovinné polia** – zobrazenie v jednej rovine $\alpha = \alpha'$
- **nesúmiestne rovinné polia** – zobrazenie medzi dvomi rôznymi rovinami $\alpha \neq \alpha'$
- **obraz útvaru v zobrazení *f*** – množina obrazov všetkých jeho bodov

Vlastnosti afinného zobrazenia

- Kompozícia konečného počtu afinných zobrazení je afinné zobrazenie
- Obraz ľubovoľnej trojice nekolineárnych bodov v afinite je trojica nekolineárnych bodov
- Obraz priamky v afinite je priamka
- Obraz dvojice rovnobežiek v afinite je dvojica rovnobežiek
- Zobrazenie inverzné k afinite je afinita
- Množina všetkých afinít roviny na seba je grupa

Definícia III.4

Samodružný (invariantný) bod zobrazenia $f: (\alpha) \to (\alpha')$ – bod A, pre ktorý $A = f(A)$
Samodružný útvar zobrazenia $f: (\alpha) \to (\alpha')$ – útvar U, pre ktorý $U = f(U)$

Definícia III.5

Perspektívna (osová) afinita – afinita $f: (\alpha) \to (\alpha')$, v ktorej sú všetky body jednej priamky samodružné
Os afinity – priamka samodružných bodov

Vlastnosti osovej afinity

1. $f: \alpha \to \alpha'$ je neidentická osová afinita s osou afinity o . Priamky AA' ($A \in \alpha$, $A' = f(A) \neq A$) patria do tej istej osnovy priamok

   Súvisiace pojmy:
   - **smer afinity** – osnova $\{ AA' \}$

Definícia III.6

Šikmá afinita – osová afinita, v ktorej $AA' \nparallel o$, $AA' \not\perp o$

Pravouhlá afinita – osová afinita, v ktorej $AA' \perp o$
Elácia – osová afinita, kde $AA' \parallel o$

2. Osová afinita dvoch nesúmiestnych rovinných polí je rovnobežným premietaním

3. $f: (\alpha) \to (\alpha')$ je neidentická osová afinita súmiestnych rovinných polí rôzna od elácie. Potom deliaci pomer $(A'AA_0)$, kde $A_0 = AA' \cap o$ je konštantný pre všetky body $A \in \alpha$

Súvisiace pojmy:

- **charakteristika osovej afinity** - deliaci pomer ($A'AA_0$)

4. $f_1 : (\alpha) \to (\alpha')$ a $f_2 : (\alpha') \to (\alpha_1)$ sú perspektívne afinity nesúmiestnych rovinných polí ($f_2^{-1} \neq f_1$ a $(\alpha),(\alpha_1)$ sú súmiestné). Potom zobrazenie $f = f_1 \circ f_2$ je osová afinita v rovine α s osou v priesečnici rovín α, α'

5. Osová afinita v rovine je určená osou o a usporiadanou dvojicou bodov A, $A' \neq A$ neležiacich na osi o

Definícia III.7

Hlavné smery osovej afinity – dve navzájom kolmé osnovy priamok, ktorých obrazy v osovej afinite sú navzájom kolmé

Obraz kružnice v afinite. Afinné vlastnosti a konštrukcie elipsy

Definícia III.8

Elipsa *k* – obraz kružnice $k' \subset \alpha'$ v afinite $f : \alpha' \to \alpha$, ktorá nie je zhodnosťou ani podobnosťou

Súvisiace pojmy:

- **priemer elipsy** – obraz priemeru kružnice
- **združené priemery elipsy** – obrazy kolmých priemerov kružnice
- **dotyčnica elipsy** – priamka, ktorá má s elipsou práve jeden spoločný bod
- **sečnica elipsy** – priamka, ktorá má s elipsou práve dva spoločné body

Vlastnosti

1. Elipsa má stred súmernosti
2. Dotyčnice v krajných bodoch priemeru elipsy sú rovnobežné so združeným priemerom

Osi elipsy – združené priemery elipsy, ktoré patria do hlavných smerov

Hlavná (vedľajšia) os elipsy – väčšia (menšia) z osí elipsy

Hlavné (vedľajšie) vrcholy elipsy – priesečníky A,B (C,D) hlavnej (vedľajšej) osi s elipsou

Trojuholníková konštrukcia

Prúžková konštrukcia

Oskulačné kružnice vo vrcholoch elipsy

IV. ZOBRAZOVACIE METÓDY

Mongeovo zobrazenie

Gaspard **MONGE** (1746 – 1818) francúzsky matematik

<u>*Princíp zobrazovacej metódy*</u>

<u>Súvisiace pojmy:</u>

- **<u>pravouhlý trojhran</u>** – *Oxyz* karteziánska súradnicová sústava v E_3
- **<u>prvá priemetňa (pôdorysňa)</u>** – rovina $\pi = xy$
- **<u>druhá priemetňa (nárysňa)</u>** - rovina $\nu = xz$
- **<u>základnica</u>** – priesečnica $x = \pi \cap \nu$
- **<u>kolmé premietanie do π</u>** - priemetňa π, smer $\{{}^1s\}$, ${}^1s \perp \pi$
- **<u>prvý priemet bodu *A*</u>** – priesečník premietacej priamky ${}^1s^A$ a priemetne π :
  $A_1 = {}^1s^A \cap \pi$
- **<u>kolmé premietanie do ν</u>**- priemetňa ν, smer $\{{}^2s\}$, ${}^2s \perp \nu$
- **<u>druhý priemet bodu *A*</u>** - priesečník premietacej priamky ${}^2s^A$ a priemetne ν:
  $A_2 = {}^2s^A \cap \nu$

<u>Veta IV.1</u> Zobrazenie φ: $E_3 \to \pi \times \nu$, $A \to [A_1, A_2]$, kde $A_1A_x \perp x$, $A_2A_x \perp x$,
$A_x = AA_1A_2 \cap x$, je bijekcia.

<u>Združenie priemetní</u> – otočenie priemetne $\pi = (\pi_1)$ okolo priamky x do priemetne ν
ψ: $(\pi_1) \to (\pi_1{}^0) = \nu$, $A_1 \to A_1{}^0$

<u>Veta IV.2</u> Zobrazenie ψ: $E_3 \to \varepsilon = \pi_1{}^0 \times \nu$, $A \to [A_1{}^0, A_2]$, kde $A_1{}^0A_2 \perp x$ alebo $A_1{}^0 = A_2$ je bijekcia.

<u>Definícia IV.1</u>
Mongeovo zobrazenie - Mongeova metóda - Pravouhlé premietanie na dve združené priemetne - bijektívne zobrazenie ψ

<u>Súvisiace pojmy:</u>

- **<u>združené priemety bodu *A* (pôdorys, nárys)</u>** – body $A_1{}^0$, A_2
- **<u>ordinála bodu</u>**- kolmica $A_1{}^0A_2$ na základnicu x
- **<u>pôdorys U_1</u>**- množina pôdorysov bodov útvaru U
- **<u>nárys U_2</u>**- množina nárysov bodov útvaru U
- **<u>združené priemety útvaru</u>**- usporiadaná dvojica pôdorys a nárys útvaru U

<u>Orientácia polpriestorov</u> - vytvorenie štyroch kvadrantov
I. kvadrant : $A(x_A, y_A>0, z_A>0)$ II.kvadrant: $B(x_B, y_B<0, z_B>0)$
III.kvadrant : $C(x_C, y_C<0, z_C<0)$ IV. kvadrant: $D(x_D, y_D>0, z_D<0)$

Združené priemety priamky *a* – usporiadaná dvojica priamok (a_1,a_2)

Súvisiace pojmy:

- **pôdorysný stopník priamky** – priesečník priamky s 1.priemetňou $P^a = a \cap \pi$ (ak $\exists$)
- **nárysný stopník priamky** – priesečník priamky s 2.priemetňou $N^a = a \cap \nu$ (ak $\exists$)
- **prvá premietacia priamka** – priamka kolmá na 1. priemetňu
- **druhá premietacia priamka** – priamka kolmá na 2. priemetňu

Združené priemety roviny – združené priemety určujúcich prvkov roviny

- tri nekolineárne body
- dve rôznobežky
- dve rôzne rovnobežky
- bod a priamka neincidujúca daným bodom

Súvisiace pojmy:

- **pôdorysná stopa roviny** – priesečnica roviny a 1.priemetne $p^\alpha = \alpha \cap \pi$ (ak $\exists$)
- **nárysná stopa roviny** – priesečnica roviny a 2.priemetne $n^\alpha = \alpha \cap \nu$(ak $\exists$)
- **prvá premietacia rovina** – rovina kolmá na 1.priemetňu
- **druhá premietacia rovina** – rovina kolmá na 2.priemetňu

Významné priamky roviny:
Hlavná priamka 1. osnovy – priamka roviny rovnobežná s prvou priemetňou $h^1 || \pi$
Hlavná priamka 2. osnovy – priamka roviny rovnobežná s druhou priemetňou $h^2 || \nu$
Spádová priamka 1.osnovy – priamka roviny kolmá na hlavné priamky 1.osnovy $s^1 \perp h^1$

Veta IV.3 Pôdorysy hlavnej a spádovej priamky 1.osnovy sú kolmé priamky $s^1_1 \perp h^1_1$

Spádová priamka 2.osnovy – priamka roviny kolmá na hlavné priamky 2.osnovy $s^2 \perp h^2$

Veta IV.4 Nárysy hlavnej a spádovej priamky 2.osnovy sú kolmé priamky $s^2_2 \perp h^2_2$

METRICKÉ ÚLOHY

Sklápanie roviny – otáčanie roviny kolmej na priemetňu do priemetne

A7. Algoritmus konštrukcie : **sklápanie roviny α do prvej priemetne π**

α, $\alpha \perp \pi$ - 1. premietacia rovina

bod M : $M \in \alpha$, $M \notin \alpha \cap \pi$, M (x_M, y_M, z_M)

- **os otáčania**
  $\alpha \cap \pi = p^\alpha$ $\qquad$ α_1
- **rovina otáčania bodu M**
  $\sigma^M : M \in \sigma^M, \sigma^M \perp \alpha \cap \pi$ $\qquad$ $\sigma_1{}^M : M_1 \in \sigma_1, \sigma_1{}^M \perp \alpha_1$
- **stred otáčania bodu M**
  $\sigma^M \cap (\alpha \cap \pi) = \sigma^M \cap p^\alpha = M_1$ $\qquad$ M_1
- **polomer otáčania bodu M**
  $r = |MM_1| = z_M$ $\qquad$ z_M
- **sklopená poloha bodu M**
  (M): $(M) \in \sigma \cap \pi$, $|(M)M_1| = z_M$ $\qquad$ $(M) \in \sigma_1{}^M$, $|(M)M_1| = z_M$

A8. Algoritmus konštrukcie : **sklápanie roviny α do druhej priemetne ν**

α, $\alpha \perp \nu$ - 2. premietacia rovina

bod M : $M \in \alpha$, $M \notin \alpha \cap \nu$, M (x_M, y_M, z_M)

- **os otáčania**
  $\alpha \cap \nu = n^\alpha$ $\qquad$ α_2
- **rovina otáčania bodu M**
  $\sigma^M : M \in \sigma^M, \sigma^M \perp \alpha \cap \nu$ $\qquad$ $\sigma_2{}^M : M_2 \in \sigma_2{}^M, \sigma_2{}^M \perp \alpha_2$
- **stred otáčania bodu M**
  $\sigma^M \cap (\alpha \cap \nu) = \sigma^M \cap n^\alpha = M_2$ $\qquad$ M_2
- **polomer otáčania bodu M**
  $r = |MM_2| = y_M$ $\qquad$ y_M
- **sklopená poloha bodu M**
  $(M) : (M) \in \sigma \cap \nu$, $|(M)M_2| = y_M$ $\qquad$ $(M) : (M) \in \sigma_2{}^M$, $|(M)M_2| = y_M$

Dĺžka úsečky*AB*

– A_1B_1 sklopenie prvej premietacej roviny úsečky do prvej priemetne
– A_2B_2 sklopenie druhej premietacej roviny úsečky do druhej priemetne

Otáčanie roviny do priemetne

A9. Algoritmus konštrukcie : **otáčanie roviny α do prvej priemetne π**

rovina $\alpha \not\perp \pi$, $\alpha \not\parallel \pi$

bod M : $M \in \alpha$, $M \notin \alpha \cap \pi$

- **os otáčania**
  $\alpha \cap \pi = p^{\alpha}$ — p_1^{α}
- **rovina otáčania bodu *M***
  $\sigma^M : M \in \sigma^M, \sigma^M \perp p^{\alpha}, \sigma^M \cap \alpha = s^{I}$ — $\sigma_1^M \perp p_1^{\alpha}, \sigma_1^M = s^1_1$
- **stred otáčania bodu *M***
  $\sigma^M \cap p^{\alpha} = P^s$ — $\sigma_1^M \cap p_1^{\alpha} = P^s_1$
- **polomer otáčania bodu *M***
  $r = |MP^s|$ — $|(M)(P^s)|$ dĺžka úsečky $M_1P^s_1$
- **otočená poloha bodu *M***
  $M_0 : M_0 \in \sigma^M \cap \pi, |M_0P^s| = |MP^s|$ — $M_0 \in \sigma_1^M, |M_0(P^s)| = |(M)(P^s)|$

Veta IV.5 Medzi pôdorysmi bodov roviny α (**$\alpha \not\perp \pi$, $\alpha \not\parallel \pi$**) a otočenými polohami bodov do prvej priemetne π je vzťah pravouhlej osovej afinity, ktorej osou je prvý priemet pôdorysnej stopy roviny α.

A10. Algoritmus konštrukcie : **otáčanie roviny α do druhej priemetne ν**

rovina $\alpha \not\perp \nu$, $\alpha \not\parallel \nu$

bod M : $M \in \alpha$, $M \notin \alpha \cap \nu$

- **os otáčania**
  $\alpha \cap \nu = n^{\alpha}$ — n_2^{α}
- **rovina otáčania bodu *M***
  $\sigma^M : M \in \sigma^M, \sigma^M \perp n^{\alpha}, \sigma^M \cap \alpha = s^2$ — $\sigma_2^M \perp n_2^{\alpha}, \sigma_2^M = s^2_2$
- **stred otáčania bodu *M***
  $\sigma^M \cap n^{\alpha} = N^s$ — $\sigma_2^M \cap n_2^{\alpha} = N^s_2$
- **polomer otáčania bodu *M***
  $r = |MN^s|$ — $|(M)(N^s)|$ dĺžka úsečky $M_2N^s_2$
- **otočená poloha bodu *M***
  $M_0 : M_0 \in \sigma^M \cap \nu, |M_0N^s| = |MN^s|$ — $M_0 \in \sigma^M_2, |M_0(N^s)| = |(M)(N^s)|$

Veta IV.6 Medzi nárysmi bodov roviny α (**$\alpha \not\perp \nu$, $\alpha \not\parallel \nu$**) a otočenými polohami bodov do druhej priemetne ν je vzťah pravouhlej osovej afinity, ktorej osou je druhý priemet nárysnej stopy roviny α

Veta IV.7 **Združené priemety kružnice *l*** – kružnica *l* leží v rovine, ktorá nemá osobitnú polohu

- **pôdorys kružnice *l* je elipsa l_1**, ktorej hlavná os leží na pôdoryse hlavnej priamky 1.osnovy a má dĺžku zhodnú s polomerom kružnice
- **nárys kružnice *l* je elipsa l_2,** ktorej hlavná os leží na náryse hlavnej priamky 2.osnovy a má dĺžku zhodnú s polomerom kružnice

Veta IV.8 **Združené priemety kolmice *k* na rovinu**

- **pôdorys kolmice *k* je priamka k_1** kolmá na pôdorys hlavnej priamky 1.osnovy $h^1{}_1$
- **nárys kolmice *k* je priamka k_2** kolmá na nárys hlavnej priamky 2.osnovy $h^2{}_2$