REPREZENTÁCIE GEOMETRICKÝCH OBJEKTOV

Prednášajúci: Soňa Kudličková, KAGDM, M 154

Cieľ prednášky: príprava na prednášky z počítačovej grafiky a geometrického modelovania.

1. Polynomické krivky: Hermita, Beziera
2. Geometrická a parametrická spojitosť,
   konštrukcie čiastkových polynomických kriviek:
   interpolačné: Hermitov splajn, kardinálny splajn
   aproximačné: Bezierov splajn, Beta splajn, B-splajn, Nurbs-splajn
3. Plochy: rotačné a priamkové
   Hermitove, Bezierove záplaty
   B-splajn plochy, Nurbs-plochy
4. Polygonálny mesh, voxlová reprezentácia

Literatúra:

1.Watt,A.: 3D Computer Graphics, 2000
2.Farin,G.E, Hansford,D.: The Essentials of CAGD, 2000
3. Salomon, D.: Computer Graphics and Geometric Modeling, 1999
4. Žára,J., kol: Moderní počítačová grafika, 2004

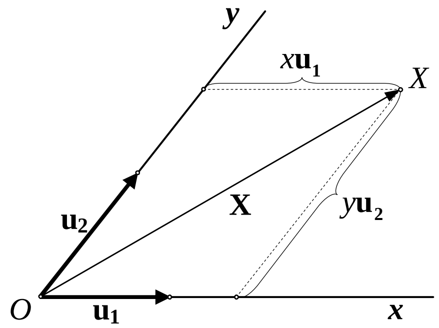
1.1. SÚRADNICE BODU V ROVINE A PRIESTORE

Základným útvarom geometrie je bod a preto je dôležité opísať tento geometrický útvar pomocou čísel.

1.**Afinná súradnicová sústava, afinné súradnice v rovine**:

Zvolíme v rovine E^2 bod O a vo vektorovom priestore V(E^2) bázu $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$. Vytvoríme trojicu $\langle O, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$, ktorú nazveme afinnou súradnicovou sústavou. Pomocou tejto trojice priradíme každému bodu X roviny E^2 jeho polohový vektor

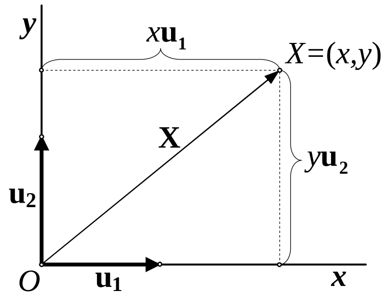
$$\mathbf{X} = OX = X - O = x\mathbf{u}_1 + y\mathbf{u}_2 \quad (1)$$



Čísla x, y určené podmienkou (1) nazývame afinnými súradnicami bodu X v afinnej súradnicovej sústave $\langle O, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$.Afinná súradnicová sústava je bijektívne zobrazenie bodov roviny na množinu usporiadaných dvojíc reálnych čísel.

2.**Karteziánska súradnicová sústava, karteziánske súradnice v rovine**:

Afinnú súradnicovú sústavu $\langle O, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$ nazveme karteziánskou súradnicovou sústavou ak vektory $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ tvoria ortonormálnu bázu .



Karteziánske súradnice bodu $X = (x, y)$ i polohového vektora $\mathbf{X} = (x, y)$ sú jeho súradnice v karteziánskej súradnicovej sústave. O báze $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$ prislúchajúcej k tejto sústave budeme predpokladať, že je pravotočivá.

3.**Homogénne súradnice bodu**

Nech $\langle O, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$ je afinná súradnicová sústava v euklidovskej rovine.

Usporiadanú trojicu čísel (X, Y, W), $W \neq 0$, nazveme <u>homogénne (rozšírené afinné) súradnice vlastného bodu,</u> ak pre jeho afinné súradnice platí

$$x = \frac{X}{W}, \quad y = \frac{Y}{W}.$$

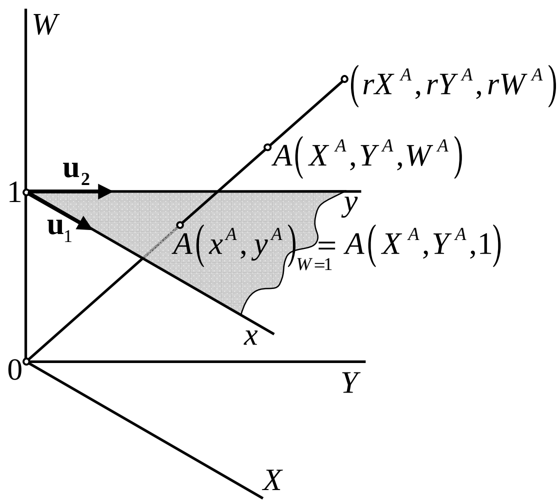
Usporiadanú trojicu čísel (X, Y, 0), nazveme <u>homogénne (rozšírené afinné) súradnice nevlastného bodu.</u>

.

Vizualizácia modelu rozšírenia

Rozšírené afinné súradnice (X, Y,1) vlastného bodu sú špeciálny prípad jeho homogénnych súradníc.

Bod A v homogénnych súradniciach $r(X^A, Y^A, W^A)$, $r \neq 0$, je bodom priamky prechádzajúcej začiatkom O so smerovým vektorom (X^A, Y^A, W^A) v priestore $\langle O, X, Y, W \rangle$.



Afinné súradnice bodu určíme ako prienik priamky $\{X = t\, X^A, Y = t\, Y^A, W = t\, W^A\}$ s nadrovinou priestoru $\langle O, X, Y, W \rangle$, ktorou je rovina s rovnicou $W = 1$. Preto položíme

$1 = t\, W^A$, určíme hodnotu parametra $t = \dfrac{1}{W^A}$ a afinné súradnice sú $\left(\dfrac{X^A}{W^A}, \dfrac{Y^A}{W^A}, 1\right)$.

Každý vlastný aj nevlastný bod pomocou homogénnych súradníc môžeme vyjadriť nekonečne veľa spôsobmi:

- Nech (x, y) sú afinné súradnice vlastného bodu a $r \neq 0$ je ľubovoľné číslo, potom (rX, rY, rW) = r(X, Y, W) sú homogénne súradnice tohto bodu.

- Nech (x, y) sú afinné súradnice nenulového smerového vektora **a** priamky a v rovine a $r \neq 0$ je ľubovoľné číslo, potom (rx, ry) sú súradnice smerového vektora r**a** priamky a a (rx, ry, 0) = (X, Y, 0) sú homogénne súradnice nevlastného bodu

Príklady:

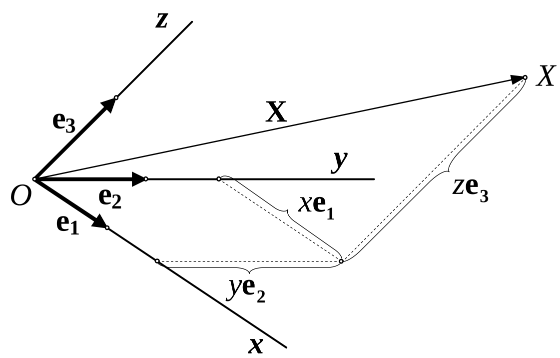
1. Bod má homogénne súradnice (X,Y,W) =(6,4,2), jeho afinné súradnice sú $x = 3$, $y = 2$.

2. Nech (1/3, 2/3) sú afinné súradnice bodu. Zapíšeme jeho homogénne súradnice napr. (1/3,2/3,1)=1/3(1,2,3), (1/3,2/3,1)=1/6(2,4,6), (1/3,2/3,1)= -1/3(-1,-2,-3). Teda body (1,2,3), (2,4,6), (-1,-2,-3) sú homogénne súradnice bodu (1/3, 2/3).

4.**Afinná súradnicová sústava, afinné súradnice v priestore**

V priestore E^3 zvolíme bod O a vo vektorovom priestore V(E^3) bázu $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$. Štvorica $\langle O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ je <u>afinnou súradnicovou sústavou v priestore.</u> Pomocou tejto štvorice priradíme každému bodu X priestoru E^3 jeho polohový vektor

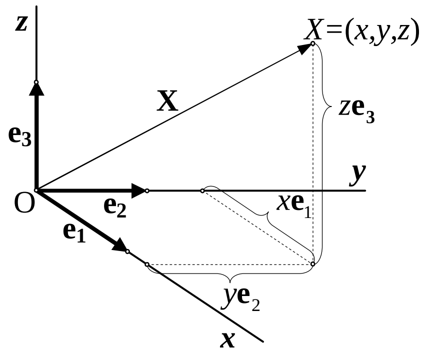
$$\mathbf{X} = OX = X - O = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 \quad (2)$$



Čísla x, y, z určené podmienkou (2) nazývame <u>afinnými súradnicami bodu</u> X v afinnej súradnicovej sústave $\langle O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$. Afinná súradnicová sústava je bijektívne zobrazenie bodov priestoru na množinu usporiadaných trojíc reálnych čísel.

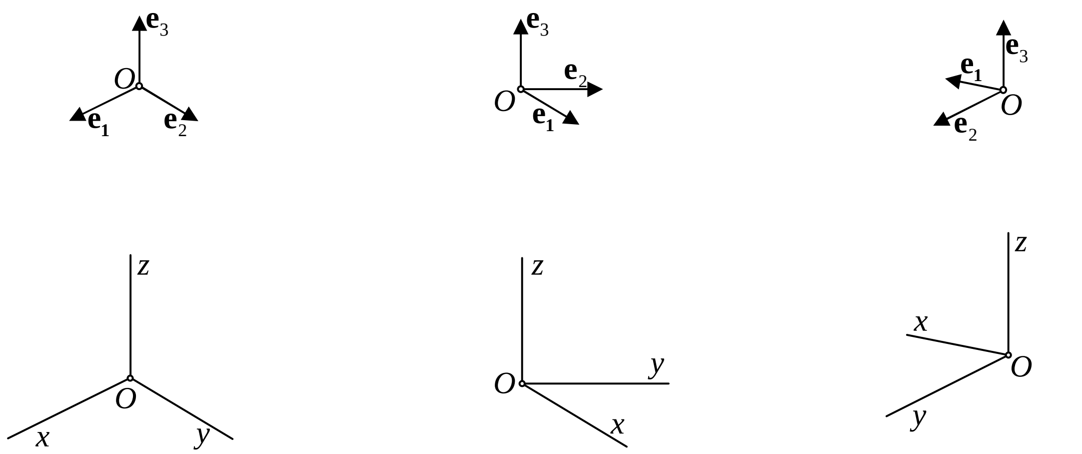
5.**Karteziánska súradnicová sústava, karteziánske súradnice v priestore**

Afinnú súradnicovú sústavu $\langle O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ nazveme <u>karteziánskou súradnicovou sústavou</u> ak vektory $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ tvoria ortonormálnu bázu



Karteziánske súradnice bodu $X = (x, y, z)$ i polohového vektora $\mathbf{X} = (x, y, z)$ sú jeho súradnice v karteziánskej súradnicovej sústave $\langle O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$. Bázu $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ uvažujeme pravotočivú.

Grafická ilustrácia ortonormálnej bázy $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ a pravouhlého trojhranu *Oxyz* so súradnicovými osami *x, y, z*:



6.**Homogénne súradnice bodu**

V euklidovskom priestore je daná afinná súradnicová sústava $\langle O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$.

Usporiadanú štvoricu čísel (X, Y, Z, W), $W \neq 0$, nazveme homogénne (rozšírené afinné) súradnice vlastného bodu, ak pre jeho afinné súradnice platí

$$x = \frac{X}{W}, \; y = \frac{Y}{W}, \; z = \frac{Z}{W}.$$

Usporiadanú štvoricu čísel $(X, Y, Z, 0)$ nazveme homogénne (rozšírené afinné) súradnice nevlastného bodu.

.

Každý vlastný aj nevlastný bod pomocou homogénnych súradníc môžeme vyjadriť nekonečne veľa spôsobmi:

• Nech (x, y, z) sú afinné súradnice vlastného bodu a $r \neq 0$ je ľubovoľné číslo, potom (rX, rY, rZ, rW) = r(X, Y, Z, W) sú homogénne súradnice tohto bodu.

• Nech (x, y, z) sú afinné súradnice nenulového smerového vektora **a** priamky v priestore a $r \neq 0$ je ľubovoľné číslo, potom (rx, ry, rz) sú súradnice smerového vektora $r\mathbf{a}$ tejto priamky a (rx, ry, rz, 0) = (X, Y, Z,0) sú homogénne súradnice nevlastného bodu.

Príklady:

1. Bod má homogénne súradnice (X,Y,Z,W) =(6,9,12,3), jeho afinné súradnice sú x = 2, y = 3, z = 4.

2. Nech (2/5, 3/5, 4/5) sú afinné súradnice bodu. Zapíšeme jeho homogénne súradnice napr. (2/5, 3/5, 4/5,1)=1/5(2,3,4,5), (2/5, 3/5, 4/5,1)= -2/5(-1,-3/2,-2,-5/2). Teda body (2,3,4,5), (-1,-3/2,-2,-5/2) sú homogénne súradnice bodu (2/5, 3/5, 4/5) .

Z bodov budeme vytvárať geometrické útvary v rovine alebo v priestore:

Geometrické útvary

Geometrickým útvarom je súvislá podmnožina priestoru E^2 resp. E^3, ktorú analyticky reprezentujeme bodovými funkciami n-premenných. Tieto funkcie sú spojitým zobrazením súvislej oblasti Ω.

Známe geometrické útvary v rovine E^2 resp. v priestore E^3 opisujeme vzhľadom na karteziánske súradnicové sústavy:

<u>0-parametrický útvar</u>:

bod $\mathbf{A}\left(x^A, y^A\right)$ v E^2 resp. $\mathbf{A}\left(x^A, y^A, z^A\right)$ v E^3 - *konštantná bodová funkcia*

<u>1-parametrický útvar</u>:

čiara $\mathbf{r}(u)=\left(x(u), y(u)\right)$ v E^2 resp. ***plocha*** $\left(x(u), y(u), z(u)\right)$ v E^3 - *bodová funkcia jednej premennej* $u \in \Omega$

<u>2-parametrický útvar</u>:

oblasť $\mathbf{r}(u,v)=\left(x(u,v), y(u,v)\right)$ v E^2 resp. $\left(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right)$ v E^3 - *bodová funkcia dvoch premenných* $u, v \in \Omega$

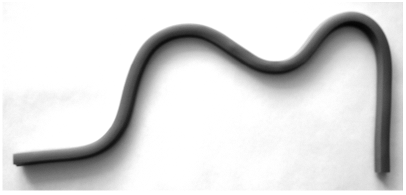
<u>3-parametrický útvar</u>:

teleso $\mathbf{r}(u,v,w)=\left(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\right)$ v E^3 *bodová funkcia troch premenných* $u, v, w \in \Omega$

Pri konštrukciách čiar a oblastí, presnejšie vo vyčísľovacích algoritmoch (Casteljau, de Boor, subdivision), budeme pracovať s deliacim pomerom bodu **X** vzhľadom na základné body **P**, **Q**: $ratio(\mathbf{PXQ}) = \frac{|\mathbf{X}-\mathbf{P}|}{|\mathbf{Q}-\mathbf{X}|}$

1.2 SPLAJNOVÉ REPREZENTÁCIE

Pri projektovaní (navrhovaní) objektov sa splajnom rozumie šablóna – ohybný prút, ktorý sa používal konštruktérmi na vykresľovanie hladkých kriviek prechádzajúcich zadanou množinou bodov v rovine , či priestore.



Pri matematickom opise takejto hladkej krivky sa využíva čiastková polynomická krivka 3° (kubika), ktorá má v spojoch a teda všade spojitú prvú a druhú deriváciu. Čiastková polynomická krivka sa skladá zo segmentov – jednoduchých oblúkov, ktoré v spojovacích bodoch spĺňajú určité dopredu predpísané podmienky na hladkosť (spojitosť). Existuje mnoho splajnových kriviek, ktoré sa líšia v závislosti od použitých polynómov a typu podmienok položených na hraničné body jednotlivých segmentov. Tieto podmienky závisia od charakteru aplikácií, pri ktorých sa používajú.

Medzi hlavné oblasti využitia splajnových kriviek v počítačovej grafike patrí:

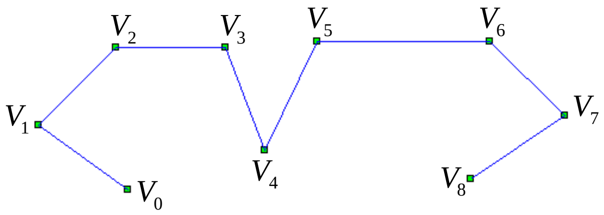
1. navrhovanie kriviek s možnosťou lokálnej modifikácie
2. digitalizácia kresieb pre potreby ich uloženia
3. opis animačných dráh objektov a kamier.

Typické CAD-aplikácie splajnov: návrhy karosérií automobilov, trupov lietadiel a lodí, automatické vyrezávanie dielcov a ich ukladanie (rozmiestňovanie) za účelom efektívneho využitia materiálu.

Interpolačné a aproximačné splajny.

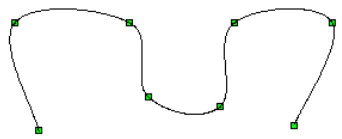
V súvislosti s navrhovaním splajnových kriviek sa stretávame s úlohami dvojakého typu. Ak máme zostrojiť- vymodelovať krivku určitého stupňa prechádzajúcu danými bodmi, tak hovoríme, že máme riešiť interpolačnú úlohu. O aproximačnej úlohe hovoríme vtedy, keď chceme zostrojiť krivku prechádzajúcu v „neveľkej“ vzdialenosti od všetkých zadaných bodov. Pri riešení úlohy jedného typu, často hovoríme, že máme za úlohu vymodelovať krivku k daným bodom (určenú danými bodmi).

Z matematického hľadiska sa interpolačné úlohy riešia jednoduchšie ako aproximačné. Z hľadiska aplikácie majú aproximačné úlohy (resp. ich riešenia) väčší význam, pretože pojem „presných“ hodnôt je z rôznych dôvodov iluzórny. Pri aproximačných úlohách je istým problémom výber kritéria charakterizujúceho kvalitu priblíženia. Preto sa často volí kompromis medzi tým, čo sa intuitívne zdá byť želateľným a tým, čo je reálne z numerického hľadiska. Akýmsi kompromisným riešením pri rozhodovaní sa pre jednu z uvedených metód je konštruovanie kriviek k zadanej postupnosti tzv. riadiacich bodov (control points) krivky, ktoré sa volia tak, aby lomená čiara vytvorená ich postupným pospájaním tzv. riadiaci polygón (control polygon) alebo riadiaci graf (control graph) bola tvarovou aproximáciou navrhovanej krivky.

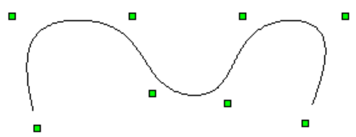


Zadané riadiace body sú „pospájané“ čiastkovou polynomickou krivkou jedným z nasledujúcich dvoch spôsobov.

1. krivka prechádza každým zadaným riadiacim bodom t.j. všetky riadiace body ležia na vytváranej krivke, takáto krivka sa nazýva interpolačná (interpolačný splajn).



2. krivka neprechádza všetkými riadiacimi bodmi (špeciálne žiadnym) t.j. všetky riadiace body nemusia ležať na vytváranej krivke, a krivka hladko sleduje tvar riadiaceho polygónu; vtedy sa krivka nazýva aproximačná (aproximačný splajn) .



Najčastejšie použitie kriviek oboch typov:

interpolačné: digitalizácia kresieb, opis dráhy animovaných objektov
aproximačné: ako dizajnové nástroje na opis povrchov konštruovaných objektov.

Proces navrhovania:

Splajnová krivka sa definuje, modifikuje a manipuluje prostredníctvom operácií na jej riadiacich bodoch. Po interaktívnej voľbe polohy riadiacich bodov v súlade s predstavou návrhára o tvare krivky, návrhár pomocou polynomického opisu skonštruuje z nich východziu krivku, ktorú aj zobrazí. Ak nie je s jej tvarom spokojný, zmenou polohy niektorých, prípadne aj všetkých riadiacich bodov zrekonštruuje pôvodný tvar a uvedie ho do súladu so svojou predstavou (väčšinou cez lokálne modifikácie). Navyše krivku pomocou geometrických transformácií (posunutie, rotácia, škálovanie a pod) aplikovaných na riadiace body rozmerovo upraví a premiestni do požadovanej polohy.

Väčšina splajnových kriviek, ktoré sa používajú v geometrickom modelovaní je navrhnutá tak, aby sa krivka nachádzala v konvexnom obale svojich riadiacich bodov (ide o najmenšiu konvexnú množinu, ktorá ich obsahuje; praktická pomôcka – guma „natiahnutá“ na vrcholy). Splajnové krivky, ktoré majú túto vlastnosť hladko sledujú riadiaci polygón krivky bez nežiaducich oscilácií. Táto vlastnosť je tiež užitočná v aplikáciách súvisiacich s orezávaním oblastí. Existujú však aplikácie, v ktorých táto vlastnosť nie je žiaduca, lebo vedia využiť napr. výskyt nepredvídaných slučiek a iných netypických tvarov.

Najskôr sa budeme zaoberať jednoduchými krivkami- jednoduchými oblúkmi tzv. polynomickými krivkami (Hermit, Bezier) a potom opíšeme postup pre určenie splajnových kriviek vytvorených zo segmentov jednoduchých oblúkov, ktoré v spojovacích bodoch spĺňajú určité dopredu predpísané podmienky na hladkosť – spojitosť (Hermitov splajn, kardinálny splajn, Beta-splajn, B-splajn, NURBS-splajn).

1.3 JEDNODUCHÉ KRIVKY – OBLÚKY

Matematické reprezentácie kriviek

Medzi najčastejšie metódy reprezentácie kriviek v geometrickom modelovaní sa zaraďujú opisy pomocou implicitných rovníc, explicitných vyjadrení a parametrických funkcií (bodových, vektorových, súradnicových).

Implicitná rovnica krivky z roviny E^2 so súradnicovou sústavou $< O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 >$ má tvar $f(x,y) = 0$. Táto rovnica vyjadruje implicitný vzťah medzi súradnicami x a y bodov ležiacich na krivke.

Pri *explicitnom* vyjadrení je krivka z roviny E^2 reprezentovaná grafom funkcie $y = f(x)$. Často krát má tento vzťah tvar: $y = a_0 + a_1 x + ... + a_p x^p = \sum_{i=0}^{p} a_i x^i$, kde $a_0, \ldots, a_p$ sú reálne konštanty, ktorý pre $a_p \neq 0$ reprezentuje algebraickú krivku stupňa p.

Pri *parametrickom* vyjadrení priestorovej krivky každú súradnicu x, y, z jej bodu reprezentujeme osobitne pomocou explicitnej funkcie jednej premennej t (t je parameter):

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t) \qquad t \in \langle t_{\min}, t_{\max} \rangle \ .$$

Parametrické vyjadrenie umožňuje vyčísliť pre zvolenú hodnotu parametra $t = t_0$ tri hodnoty $x(t_0)$, $y(t_0)$, $z(t_0)$ – súradnice bodu krivky odpovedajúceho hodnote parametra t_0. Ak sú funkcie $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ spojité, možno povedať, že príslušná krivka je spojitým obrazom súvislej oblasti parametra $t \in \langle t_{\min}, t_{\max} \rangle$.

Parametrické vyjadrenie krivky možno nahradiť jedinou vektorovou rovnicou $\mathbf{r}(t)$, ktorá je vektorovou funkciou parametra t. Pre zápis tejto vektorovej funkcie použijeme označenie:

$$\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$$

čo je obvyklý súradnicový zápis vektora.

V súčasnosti namiesto vyjadrenia krivky pomocou vektorovej funkcie sa v geometrickom modelovaní častejšie používa jej vyjadrenie v tvare bodovej funkcie. Ak si označíme ľubovoľný bod krivky ako $P(t)$, tak pre jeho polohový vektor $\mathbf{r}(t) = P(t) - O$, platí:

$$P(t) = O + \mathbf{r}(t) = O + x(t)\mathbf{e}_1 + y(t)\mathbf{e}_2 + z(t)\mathbf{e}_3, \qquad t \in \langle t_{\min}, t_{\max} \rangle.$$

Táto rovnosť reprezentuje krivku pomocou bodovej funkcie. Pre súradnicový zápis tejto bodovej funkcie použijeme opäť zápis

$$P(t) = [x(t), y(t), z(t)].$$

Vzhľadom na následné štúdium kubických polynomických kriviek, budeme zapisovať vektorovú reprezentáciu krivky v tvare

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 t + \mathbf{a}_2 t^2 + \mathbf{a}_3 t^3, \quad t \in \langle t_{\min}, t_{\max} \rangle$$

a jej bodovú reprezentáciu v tvare:

$$P(t) = O + \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 t + \mathbf{a}_2 t^2 + \mathbf{a}_3 t^3, \quad t \in \langle t_{\min}, t_{\max} \rangle$$

kde $\mathbf{a}_j$, j=0,1,2,3, sú vektory priestoru $V(E)$ ($V(E^2)$, $V(E^3)$).

Deriváciou bodovej funkcie $P(t)$, resp. vektorovej funkcie $\mathbf{r}(t)$ v bode $t_0 \in \langle t_{\min}, t_{\max} \rangle$ je vektor

$$\left.\frac{dP(t)}{dt}\right|_{t=t_0} = \mathbf{r}'(t_0) = [x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)]$$

a jej druhou deriváciou je vektor:

$$\left.\frac{d^2P(t)}{dt^2}\right|_{t=t_0} = \mathbf{r}''(t_0) = [x''(t_0), y''(t_0), z''(t_0)].$$

Dotyčnicou krivky danej bodovou [vektorovou] parametrizáciou $P(t) = O + \mathbf{r}(t)$ [$\mathbf{r}(t)$] v bode $P(t_0)$, $t_0 \in \langle t_{\min}, t_{\max} \rangle$, sa rozumie priamka určená bodom $P(t_0)$ a vektorom $P'(t_0) = \mathbf{r}'(t_0)$. Vektor $\mathbf{r}'(t_0)$ sa nazýva *dotykový vektor* krivky v bode t_0. Jednotkový dotykový vektor krivky v bode $t = t_0$ je vektor $\mathbf{d}(t_0) = \left.\dfrac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\right|_{t=t_0}$.

Krivosť krivky $P(t) = O + \mathbf{r}(t)$ je skalárna funkcia $k(t) = \dfrac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$ a pre vektorovú funkciu $\mathbf{k}(t) = \dfrac{(\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)) \times \mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|^4}$ je zaužívaný názov *vektor krivosti* krivky $P(t)$ [$\mathbf{r}(t)$]. Na druhej strane, skalárna veličina (číselná hodnota) $k(t_0)$ sa nazýva krivosťou a vektorová veličina $\mathbf{k}(t_0)$ vektorom krivosti krivky $P(t)$ v bode $t = t_0$.

Špecifikácie splajnov

V počítačovej grafike sa stretávame s tromi ekvivalentnými metódami pre špecifikáciu jednotlivých typov splajnových reprezentácií:

(1) *Sformulovanie podmienok*, ktoré sa položia hranice susediacich segmentov splajnu, alebo ich možno zo zadaných geometrických prvkov odvodiť. Najčastejšie sú to požiadavky na hodnoty parametrických vyjadrení krivky, ich derivácií a pod. Môžu to byť napr. hraničné body segmentov, sklony krivky v nich t.j. hodnoty 1.derivácií (prípadne aj vyšších) v hraničných bodoch a pod. Tieto sa obyčajne dajú ľahko vyjadriť ako afinné kombinácie polynomických koeficientov parametrického vyjadrenia segmentu. Korektnosť voľby podmienok si však vyžaduje, aby sa aj obrátene, polynomické koeficienty dali vyjadriť ako afinné kombinácie geometrických prvkov reprezentujúcich hraničné podmienky splajnu.

(2) *Voľbou matice*, ktorá reprezentuje typ splajnu. Je to matica, ktorá vyjadruje polynomické koeficienty ako afinné kombinácie vyššie spomínaných geometrických prvkov.

(3) *Voľbou* tzv. *zmiešavacích funkcií* reprezentujúcich splajn. Sú to funkcie, ktoré „zliepajú“ geometrické prvky, ktorými je konkrétny splajn určený do parametrického vyjadrenia segmentu krivky, ktoré je afinnou kombináciou geometrických prvkov so zmiešavacími funkciami v úlohe koeficientov.
Na ilustráciu týchto troch splajnových špecifikácií predpokladajme, že parametrická reprezentácia polynomického segmentu kubickej krivky je nasledovná:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 t + \mathbf{a}_2 t^2 + \mathbf{a}_3 t^3, t \in \langle t_{\min}, t_{\max} \rangle .$$

Pre zjednodušenie vyjadrení predpokladajme, že krivka je definovaná na intervale $\langle 0,1 \rangle$ t.j. $t_{\min} = 0,\; t_{\max} = 1.$

A.1 Hermitove kubiky

Zápis polynomickej krivky v tvare:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 t + \mathbf{a}_2 t^2 + \mathbf{a}_3 t^3 = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0 & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}^T, t \in \langle 0,1 \rangle \qquad \text{(A)}$$

má z hľadiska geometrického modelovania nevýhodu v tom, že nepoznáme geometrický význam koeficientov $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ a ich vzťah ku krivke.

Výhodnejšie je zadávať takúto krivku jej krajnými bodmi $\mathbf{R}_0,\ \mathbf{R}_1$ a sklonmi – dotykovými vektormi $\mathbf{r}_0',\ \mathbf{r}_1'$ v týchto krajných bodov. Úlohou je napísať parametrické vyjadrenie polynomickej krivky 3° určenej krajnými bodmi $\mathbf{R}_0,\ \mathbf{R}_1$ a sklonmi $\mathbf{r}_0',\ \mathbf{r}_1'$(dotykové vektory v bodoch $\mathbf{R}_0,\ \mathbf{R}_1$). Táto krivka zapísaná v tvare

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0 & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}^T$$

má deriváciu (2)

$$\mathbf{r}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2t & 3t^2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0 & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}^T .$$

Ak do týchto vzťahov (2) dosadíme hodnoty 0,1 za parameter *t* a zohľadníme pozíciu, do ktorej sme „nominovali“ body $\mathbf{R}_0,\ \mathbf{R}_1$ a vektory $\mathbf{r}_0',\ \mathbf{r}_1'$ dostaneme:

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{R}_0 \qquad \mathbf{r}'(0) = \mathbf{r}_0'$$
$$\mathbf{r}(1) = \mathbf{R}_1 \qquad \mathbf{r}'(1) = \mathbf{r}_1'$$

resp.

$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{R}_0 \qquad \mathbf{a}_1 = \mathbf{r}_0'$$
$$\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = \mathbf{R}_1 \qquad \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_3 = \mathbf{r}_1'$$

Z toho vyplýva:

$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{R}_0$$
$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{r}_0'$$
$$\mathbf{a}_2 = 3(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_0) - 2\mathbf{r}_0' - \mathbf{r}_1'$$
$$\mathbf{a}_3 = 2(\mathbf{R}_0 - \mathbf{R}_1) + \mathbf{r}_0' + \mathbf{r}_1'$$

Potom môžeme v (A) zapísať:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0 \\ \mathbf{r}_0' \\ 3(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_0) - 2\mathbf{r}_0' - \mathbf{r}_1' \\ 2(\mathbf{R}_0 - \mathbf{R}_1) + \mathbf{r}_0' + \mathbf{r}_1' \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0 \\ \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{r}_0' \\ \mathbf{r}_1' \end{bmatrix} = T.M_H.G_H \qquad (3)$$

Teda $\mathbf{r}(t) = T.M_H.G_H$ je hľadané <u>maticové vyjadrenie</u> polynomického kubického segmentu (A) pomocou <u>geometrických prvkov</u>: krajných bodov $\mathbf{R}_0,\ \mathbf{R}_1$ a dotykových vektorov $\mathbf{r}_0',\ \mathbf{r}_1'$ v týchto krajných bodoch. Tieto sú uložené v tzv. *geometrickej matici G_H*. Matica M_H je tzv. *matica koeficientov Hermita.*

Ak vo vzťahu (3) vynásobíme matice T a M_H dostaneme riadkovú maticu:

$$B_H(t) = \left[(1-3t^2+2t^3) \ \ (3t^2-2t^3) \ \ (t-2t^2+t^3) \ \ (-t^2+t^3) \right].$$

Prvky tejto matice označíme:

$$\left[H_{03}(t) = (1-3t^2+2t^3),\ H_{33}(t) = (3t^2-2t^3), H_{13}(t) = (t-2t^2+t^3), H_{23}(t) = (-t^2+t^3) \right]$$

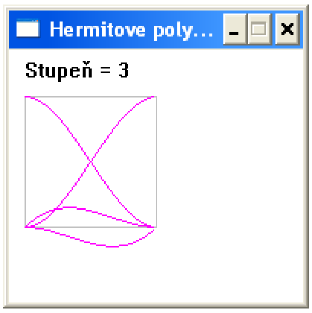
sú to tzv. <u>zmiešavacie funkcie</u> (blending functions).

Teraz parametrickú reprezentáciu polynomického segmentu (A) kubickej krivky zapíšeme pomocou zmiešavacích funkcií a geometrických prvkov:

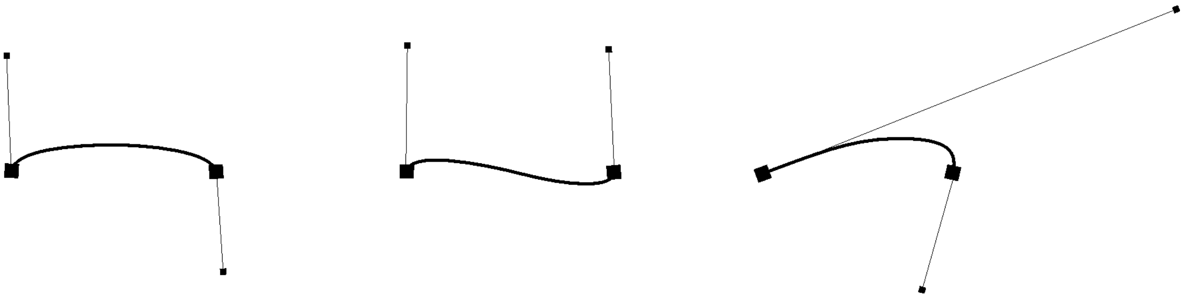
$$\mathbf{r}(t) = H_{03}(t)\mathbf{R}_0 + H_{33}(t)\mathbf{R}_1 + H_{13}(t)\mathbf{r}_0' + H_{23}(t)\mathbf{r}_1',\quad t \in \langle 0,1 \rangle. \qquad (4)$$

Túto reprezentáciu (4) segmentu kubickej krivky do literatúry o geometrickom modelovaní zaviedol J. Ferguson (1963). Polynómy $H_{j3}(t),\ j = 0,1,2,3$, sa nazývajú <u>Hermitove kubické polynómy</u> (Ch. Hermit- francúzsky matematik 19.storočia použil tieto polynómy k interpolácii funkcií) a zabezpečujú stmelenie štyroch vstupných hodnôt [$\mathbf{R}_0,\ \mathbf{R}_1, \mathbf{r}_0',\ \mathbf{r}_1'$], ktoré nazveme <u>vstupnou dátovou štvoricou</u>. Navyše výsledná krivka interpoluje zadané krajné body i zadané vektory v tom zmysle, že sú hodnotami jej derivácie v krajných bodoch jej definičného oboru. Z tohto dôvodu krivku (4) nazývame **Hermitovou kubickou interpolačnou krivkou** resp. **Hermitovým interpolantom (segmentom)** alebo **Fergusonovou kubikou.**

Niektoré vlastnosti Hermitových kubických polynómov:
1.graf



2. $H_{03}(t) + H_{33}(t) = 1$



a) b) c)

Hermitove segmenty

A2. **Modelovanie Hermitových kriviek.**

Každý bod na Hermitovom segmente (4) je vyjadrený ako kombinácia dvoch krajných bodov a dotykových vektorov v týchto bodoch. Graf Hemitovho segmentu s pevnými krajnými bodmi môžeme modelovať pomocou dotykových vektorov v týchto krajných bodoch a to buď zmenou ich veľkosti alebo zmenou ich smeru .

∗ **zmena veľkosti dotykových vektorov** : položme $\mathbf{r}_0' = \alpha_0 \mathbf{d}_0(0)$, $\mathbf{r}_1' = \alpha_1 \mathbf{d}_1(1)$, $\alpha_0, \alpha_1 > 0$, $\mathbf{d}_i(t)$ sú jednotkové vektory, potom pre

- rovnomerné zväčšovanie/zmenšovanie: $\alpha_0 = \alpha_1$
- nerovnomerné zväčšovanie/zmenšovanie: $\alpha_0 = k.\alpha_1, k > 1$
- $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$

∗ **zmena smeru dotykového vektora**

∗ **modifikácie tvaru** Hermitovho segmentu **pomocou parametra:**

♣ normalizovaný parameter $t \in \langle 0,1 \rangle$ a segment nazývame <u>uniformovaný</u>

♣ $t_{max} = \Delta$, $\Delta > 0$, parameter $t \in \langle 0, \Delta \rangle$ a segment nazývame <u>neuniformovaný</u>

Do vzťahov (2) dosadíme hodnoty 0, Δ za parameter *t*:

$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{R}_0 \qquad \mathbf{a}_1 = \mathbf{r}_0'$$

$$\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1\Delta + \mathbf{a}_2\Delta^2 + \mathbf{a}_3\Delta^3 = \mathbf{R}_1 \qquad \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2\Delta + 3\mathbf{a}_3\Delta^2 = \mathbf{r}_1'$$

s riešením:

$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{R}_0$$

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{r}_0'$$

$$\mathbf{a}_2 = \frac{3(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_0)}{\Delta^2} - \frac{2\mathbf{r}_0'}{\Delta} - \frac{\mathbf{r}_1'}{\Delta}$$

$$\mathbf{a}_3 = \frac{2(\mathbf{R}_0 - \mathbf{R}_1)}{\Delta^3} + \frac{\mathbf{r}_0'}{\Delta^2} + \frac{\mathbf{r}_1'}{\Delta^2}$$

Teda segment krivky môžeme zapísať:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-3}{\Delta^2} & \frac{3}{\Delta^2} & -\frac{2}{\Delta} & \frac{-1}{\Delta} \\ \frac{2}{\Delta^3} & \frac{-2}{\Delta^3} & \frac{1}{\Delta^2} & \frac{1}{\Delta^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0 \\ \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{r}_0' \\ \mathbf{r}_1' \end{bmatrix} = T.M_{nH}.G_H \quad (5)$$

Rôzne hodnoty Δ ponúkajú rôzne Hermitove kubiky. Možno povedať, že zväčšovanie hodnoty Δ ťahá krivku v krajných bodoch v smere dotykového vektora. Preto sa často krát „upraví“ vyjadrenie (5) na :

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0 \\ \mathbf{R}_1 \\ \Delta\mathbf{r}_0' \\ \Delta\mathbf{r}_1' \end{bmatrix} \quad t \in \langle 0, \Delta \rangle$$

A3. **Vyčísľovacie algoritmy**

A. $\mathbf{r}(t) = H_{03}(t)\mathbf{R}_0 + H_{33}(t)\mathbf{R}_1 + H_{13}(t)\mathbf{r}_0' + H_{23}(t)\mathbf{r}_1', \quad t \in \langle 0,1 \rangle$

Výpočet bodov krivky spočíva v dosadzovaní hodnôt parametra t do uvedeného vzťahu a následné spájanie vypočítaných bodov úsečkami.

B. Hornerova schéma

Najjednoduchšou metódou pre výpočet hodnôt polynómov po postupnom vyčísľovaní ich členov je Hornerovo pravidlo, ktoré realizuje výpočty postupnou faktorizáciou. Táto si vyžaduje jedno násobenie a jedno sčítanie v každom kroku. Pre polynómy n° je takýchto krokov n.

Ako príklad uvažujme kubickú reprezentáciu: $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 t + \mathbf{a}_2 t^2 + \mathbf{a}_3 t^3$.

Pre konkrétnu hodnotu parametra *t*, vypočítame hodnotu polynómu podľa nasledujúcej faktorizácie členov: $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a}_0 + t(\mathbf{a}_1 + t(\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 t))$.

Z nej vidno, že výpočet hodnoty polynómu v bode *t* si vyžaduje tri násobenia a tri sčítania resp. deväť násobení a deväť sčítaní, ak chceme vypočítať súradnice $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ bodu $\mathbf{r}(t)$.

C. Metóda dopredného diferencovania

Výpočet hodnôt polynómov pomocou dopredného diferencovania súvisí s Taylorovým rozvojom funkcie.

Je to pomerne silná metóda pre vyčísľovanie polynomických funkcií a je založená na rekurzívnom určovaní nasledujúcich hodnôt funkcií inkrementáciou – prírastkom zo skôr vypočítaných hodnôt v tvare: $X_{k+1} = X_k + \Delta X_k$ resp. $\Delta X_k = X_{k+1} - X_k$.

Ak teda poznáme prírastok ΔX_k a hodnotu X_k v určitom kroku, tak hodnotu v nasledujúcom kroku dostaneme pripočítaním prírastku k súčasnej hodnote X_k. Prírastok ΔX_k sa nazýva dopřednou diferenciou.