

B. 1 Bezierove kubiky

„bread-and-butter“ curves

Hermitova kubika má v geometrickej matici G_H dva krajné body $\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_1$ a dva dotykové vektory $\mathbf{r}'_0, \mathbf{r}'_1$ v týchto krajných bodov. Tieto Hermitove kubiky modifikáciou veľkostí dotykových vektorov $\mathbf{r}'_0, \mathbf{r}'_1$ alebo ich polohy ponúkajú širokú paletu kubických kriviek. Pri ilustrácii týchto kriviek intuitívne cítime zmenu krivky, ale chýba nám výraznejšie „ohraničenie“ oblasti, v ktorej krivka leží.

Autormi spracovania kriviek, ktoré ležia v „ohraničenej“ oblasti boli v období rokov 1958-60 dvaja Francúzi:

Pierre Etienne Bézier – aplikovaný matematik vo firme Renault

Paul de Faget Casteljau - aplikovaný matematik vo firme Citroen.

V roku 1970 poukázal Forrest na súvislosti medzi Bezierovými vyjadreniami a Bernsteinovými polynómami (Bernshtein- ruský matematik odvodil tieto polynómy v roku 1912 v práci o aproximačných teóriach).

Postup opisu kubických Bezierových kriviek ilustrujeme v súlade s myšlienkou „ohraničiť“ oblasť, v ktorej krivka leží. Úpravy zrealizujeme v geometrickej matici G_H :

$$G_H = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0 & \mathbf{R}_1 & \mathbf{r}'_0 & \mathbf{r}'_1 \end{bmatrix}^T$$

Určíme štvoricu bodov: $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$:

$$\mathbf{V}_0 = \mathbf{R}_0, \quad \mathbf{V}_1 = \mathbf{R}_0 + \frac{1}{3}\mathbf{r}'_0, \quad \mathbf{V}_2 = \mathbf{R}_1 - \frac{1}{3}\mathbf{r}'_1, \quad \mathbf{V}_3 = \mathbf{R}_1$$

Kde $\mathbf{V}_i, i=0,1,2,3$, označuje polohové vektory bodov. Vyjadríme dátovú štvoricu $\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_1$ a

$\mathbf{r}'_0, \mathbf{r}'_1$ pomocou štvorice bodov $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$:

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{V}_0, \quad \mathbf{R}_1 = \mathbf{V}_3, \quad \mathbf{r}'_0 = 3(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0), \quad \mathbf{r}'_1 = 3(\mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_2).$$

Dosadíme do geometrickej matice

$$G_H = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0 \\ \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{r}'_0 \\ \mathbf{r}'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_3 \\ 3(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0) \\ 3(\mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_3 \end{bmatrix}$$

a následne do vyjadrenia Hermita:

$$\mathbf{r}(t) = T \cdot M_H \cdot G_H = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_3 \end{bmatrix} = T \cdot M_B \cdot G_B.$$

Získali sme maticové vyjadrenie polynomickeho segmentu pomocou geometrických prvkov: bodov: $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$. Tieto sú uložené v tzv. geometrickej matici G_B . Lomená čiara $\mathbf{V}_0 \mathbf{V}_1 \mathbf{V}_2 \mathbf{V}_3$ sa nazýva riadiaci polygón a je to vstupná dátová štvorica $[\mathbf{V}_0 \mathbf{V}_1 \mathbf{V}_2 \mathbf{V}_3]$

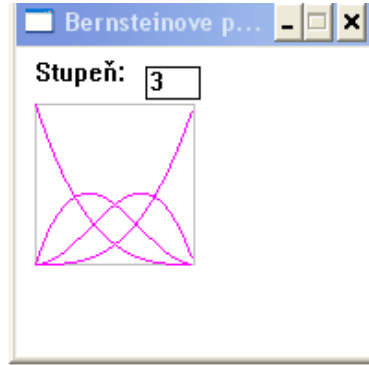
Po vynásobení matíc T a M_B dostaneme riadkovú maticu :

$$B_B(t) = \begin{bmatrix} (1-t)^3 & 3t(1-t)^2 & 3t^2(1-t) & t^3 \end{bmatrix}.$$

Prvky tejto matice označme :

$$B_{03}(t) = (1-t)^3, B_{13}(t) = 3t(1-t)^2, B_{23}(t) = 3t^2(1-t), B_{33}(t) = t^3$$

a sú to zmiešavacie funkcie 3°.



Teraz parametrickú reprezentáciu polynomickeho segmentu (A) kubickej krivky zapíšeme pomocou Bernsteinových polynómov $B_{i3}(t), i = 0, 1, 2, 3$, a riadiacich bodov $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$:

$$\mathbf{r}(t) = B_{03}(t)\mathbf{V}_0 + B_{13}(t)\mathbf{V}_1 + B_{23}(t)\mathbf{V}_2 + B_{33}(t)\mathbf{V}_3, t \in \langle 0, 1 \rangle$$

a hovoríme, že je zapísaná v Bezierovom tvare a označuje sa $\mathbf{b}^3(t)$.

Teda:

$$\mathbf{b}^3(t) = \sum_{i=0}^3 \mathbf{V}_i B_{i3}(t), t \in \langle 0, 1 \rangle \quad (1)$$

je Bezierovou krivkou 3° na intervale $\langle 0, 1 \rangle$.

Polynómy $B_{03}(t) = (1-t)^3, B_{13}(t) = 3t(1-t)^2, B_{23}(t) = 3t^2(1-t), B_{33}(t) = t^3$ môžeme zapísať:

$$B_{i3}(t) = \binom{3}{i} t^i (1-t)^{3-i}, \quad i = 0, 1, 2, 3 \quad (2)$$

sú Bernsteinove polynómy 3°.

Ak vo vzťahoch (1) a (2) zameníme 3 číslom n , dostaneme Bernsteinove polynómy n°

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

$$\text{kde } \binom{n}{i} = \begin{cases} \frac{n!}{i!(n-i)!} & \text{ak } 0 \leq i \leq n \\ 0 & \text{inak} \end{cases} \quad t \in \langle 0, 1 \rangle \quad 0! = 1$$

a Bezierove krivky n°

$$\mathbf{b}^n(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \mathbf{V}_i \quad t \in \langle 0,1 \rangle$$

Treba však poznamenať, že ak $i \notin \{0,1,\dots,n\}$ je $\binom{n}{i} = 0$ a teda aj $B_{in}(t) \equiv 0$. Toto prirodzene platí aj pre $n = 3$.

Bernsteinove polynómy majú mnoho zaujímavých vlastností, z ktorých vyplývajú dôležité vlastnosti Bezierových kriviek.

(1) Z vlastnosti kombinačných čísel $\binom{n}{i} = \binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}$ vyplýva, že

$$\binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = (1-t) \binom{n-1}{i} t^i (1-t)^{n-1-i} + t \binom{n-1}{i-1} t^{i-1} (1-t)^{(n-1)-(i-1)}$$

a teda môžeme zapísať: $B_{in}(t) = (1-t)B_{in-1}(t) + tB_{i-1,n-1}(t)$ tzv. rekurentný vzorec

(2) Z binomickej vety dostávame: $1 = [t + (1-t)]^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = \sum_{i=0}^n B_{in}(t)$ a teda

$$\sum_{i=0}^n B_{in}(t) = 1, \text{ pre každé } t, \text{ tzv. } \underline{\text{rozklad jednotky}}$$

(3) Z definície Bernsteinových polynómov a predchádzajúcej vlastnosti vyplýva:

$$B_{0n}(0) = 1 \text{ a } B_{in}(0) = 0 \text{ pre } i = 1, 2, \dots, n$$

$$B_{in}(1) = 1 \text{ a } B_{in}(1) = 0 \text{ pre } i = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

(4) $B_{i,n}(t) \geq 0$ pre každé i, n a $t \in \langle 0,1 \rangle$, tzv. nezápornosť

V ďalšom texte sa sústreďíme hlavne na Bezierove krivky 3^o a preto vyššie uvedené vlastnosti Bernsteinových polynómov nás budú zaujímať pre $n=3$.

Vlastnosti Bezierových kubík

Nech $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$ je daná postupnosť bodov v priestore $E(E^2, E^3)$. Potom množina bodov v priestore E , ktorých súradnice vyhovujú rovnici:

$$\mathbf{b}^3(t) = \sum_{i=0}^3 \mathbf{V}_i B_{i3}(t), \quad t \in \langle 0,1 \rangle,$$

kde $B_{i3}(t), i = 0, 1, 2, 3$, sú Bernsteinove polynómy, je Bezierova krivka 3^o.

1.interpolácia krajných bodov riadiaceho polygónu : $\mathbf{b}^3(0) = \mathbf{V}_0, \quad \mathbf{b}^3(1) = \mathbf{V}_3$

2.konvexný obal : Bezierova krivka $\mathbf{b}^3(t)$ leží v konvexnom obale svojich riadiacich bodov $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$ (polynómy $B_{i3}(t)$ sú pre $t \in \langle 0,1 \rangle$ nezáporné, $\mathbf{b}^3(t)$ je konvexnou kombináciou riadiacich bodov \mathbf{V}_i)

3.vektor 1.derivácie :

$$\mathbf{b}'(t) = \sum_{i=0}^3 B_{i3}'(t)\mathbf{V}_i = -3(1-t)^2\mathbf{V}_0 + (3(1-t)^2 - 6t(1-t))\mathbf{V}_1 + 3t(2-3t)\mathbf{V}_2 + 3t^2\mathbf{V}_3 =$$

$$= 3(1-t)^2(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0) + 6t(1-t)(\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1) + 3t^2(\mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_2)$$

Ak použijeme $\Delta\mathbf{V}_i = \mathbf{V}_{i+1} - \mathbf{V}_i$, tak

$$\mathbf{b}'(t) = 3 \begin{bmatrix} (1-t)^2 & 2t(1-t) & t^2 \end{bmatrix} [\Delta\mathbf{V}_0 \quad \Delta\mathbf{V}_1 \quad \Delta\mathbf{V}_2]^T = 3 \sum_{i=0}^2 \Delta\mathbf{V}_i B_{i2}(t)$$

a je to Bezierova krivka 2° na vektorovej zložke.

Pre $t = 0$: $\mathbf{b}'(0) = 3\Delta\mathbf{V}_0 = 3(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0)$, teda Bezierova krivka $\mathbf{b}^3(t)$ sa v začiatočnom bode \mathbf{V}_0 dotýka prvej strany svojho riadiaceho polygónu (dotykový vektor je $3(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0)$)

a pre $t = 1$: $\mathbf{b}'(1) = 3\Delta\mathbf{V}_2 = 3(\mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_2)$, Bezierova krivka $\mathbf{b}^3(t)$ sa v koncovom bode \mathbf{V}_3 sa dotýka poslednej strany svojho riadiaceho polygónu (dotykový vektor je $3(\mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_2)$).

4.vektor 2.derivácie :

$$\mathbf{b}^{3''}(t) = 6 \sum_{i=0}^1 (\mathbf{V}_{i+2} - 2\mathbf{V}_{i+1} + \mathbf{V}_i) B_{i1}(t)$$

Pre $t = 0$: $\mathbf{b}^{3''}(0) = 6(\mathbf{V}_2 - 2\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_0)$ t.j. vektor 2. derivácie v začiatočnom bode \mathbf{V}_0 je rovnobežný s uhlopriečkou rovnobežníka určeného bodmi $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$

a pre $t = 1$: $\mathbf{b}^{3''}(1) = 6(\mathbf{V}_3 - 2\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_1)$ t.j. vektor 2. derivácie v koncovom bode \mathbf{V}_3 je rovnobežný s uhlopriečkou rovnobežníka určeného bodmi $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$.

Z ďalších vlastností Bezierových kriviek uvádzame:

5.symetria

$$\sum_{i=0}^3 B_{i3}(t)\mathbf{V}_i = \sum_{i=0}^3 B_{i3}(1-t)\mathbf{V}_{3-i}$$

t.j. Bezierova krivka sa nezmení ak zameníme poradie jej riadiacich bodov a súčasne parameter t necháme prebiehať od 1 po 0. [lebo $B_{3-i,3}(1-t) = B_{i3}(t)$]

6.invariantnosť vzhľadom na transformáciu parametra:

$$\sum_{i=0}^3 B_{i3}(t)\mathbf{V}_i = \sum_{i=0}^3 B_{i3}\left(\frac{u-a}{b-a}\right)\mathbf{V}_i \quad u \in \langle a, b \rangle \quad t \in \langle 0, 1 \rangle$$

7.afinná invariantnosť Bezierove krivky sú invariantné vzhľadom na afinné transformácie t.j. pre každú afinnú transformáciu T platí:

$$T\left(\sum_{i=0}^3 B_{i3}(t)\mathbf{V}_i\right) = \sum_{i=0}^3 B_{i3}(t)T(\mathbf{V}_i)$$

t.j. afinný obraz Bezierovej krivky s vrcholmi \mathbf{V}_i je Bezierova krivka s vrcholmi $T(\mathbf{V}_i)$.

8.pseudolokálne riadenie: Bezierove krivky nemožno lokálne upravovať, zmena riadiaceho bodu \mathbf{V}_i síce spôsobí zmenu tvaru celej krivky, ale výrazné zmeny nastanú v okolí bodu $t = \frac{i}{3}$ (lokálne maximum polynómov) inde sú menej výrazné.

B. 2 Modelovanie Bezierových kubík

$\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$ vstupná dátová štvorica

- nekolineárne
- kolineárne

B. 3. Vyčísľovacie algoritmy

$$A. \mathbf{b}^3(t) = B_{03}(t)\mathbf{V}_0 + B_{13}(t)\mathbf{V}_1 + B_{23}(t)\mathbf{V}_2 + B_{33}(t)\mathbf{V}_3, \quad t \in \langle 0,1 \rangle$$

Výpočet Bezierovej krivky môžeme zrealizovať dosadzovaním hodnôt parametra t do uvedeného vzťahu a následne pospájať vypočítané body úsečkami. Zmena parametra t je obyčajne konštantná. Tento spôsob nie je veľmi efektívny lebo nerešpektuje veľkosť zakrivenia. Jeho výhodou je, že generuje dopredu známy počet úsečiek.

B. Casteljau algoritmus (CA)

V roku 1959 spracoval de Casteljau pre firmu Citroen algoritmus pre vyčísľovanie bodov Bezierovej krivky, ktorým sa bod na krivke vyčísľuje pomocou lineárnej interpolácie, teda nie priamo pomocou Bernsteinových polynómov, ale vychádza sa z rekurzívnej vlastnosti Bernsteinových polynómov: $B_{in}(t) = (1-t)B_{i-1,n-1}(t) + tB_{i,n-1}(t)$.

Pre kubické Bezierove krivky algoritmus počíta hodnotu $\mathbf{b}^3(t)$ pre pevne zvolené $t \in \langle 0,1 \rangle$:

$$\mathbf{b}^3(t) = \dots = \mathbf{V}_0^3(t)$$

Výpočet možno formálne reprezentovať schémou:

CA: Dané riadiace body: $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$, parameter $t \in \langle 0,1 \rangle$

$$\mathbf{V}_i^0(t) = \mathbf{V}_i, \quad i = 0,1,2,3$$

$$\mathbf{V}_i^1(t) = (1-t)\mathbf{V}_i^0(t) + t\mathbf{V}_{i+1}^0(t), \quad i = 0,1,2$$

$$\mathbf{V}_0^2(t) = (1-t)\mathbf{V}_i^1(t) + t\mathbf{V}_{i+1}^1(t), \quad i = 0,1$$

$$\mathbf{V}_0^3(t) = (1-t)\mathbf{V}_0^2(t) + t\mathbf{V}_1^2(t)$$

$$\mathbf{b}^3(t) = \mathbf{V}_0^3(t)$$

Zápis CA algoritmu pre $n \in \mathbb{N}$:

Vstup: riadiace body: $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n$ a $t \in \langle 0,1 \rangle$

$$0) \quad \mathbf{V}_i^0(t) = \mathbf{V}_i, \quad i = 0,1, \dots, n$$

$$1) \quad \mathbf{V}_i^1(t) = (1-t)\mathbf{V}_i^0(t) + t\mathbf{V}_{i+1}^0(t), \quad i = 0,1, \dots, n-1$$

:

$$r) \quad \mathbf{V}_i^r(t) = (1-t)\mathbf{V}_i^{r-1}(t) + t\mathbf{V}_{i+1}^{r-1}(t), \quad r = 1,2, \dots, n; \quad i = 0,1, \dots, n-r$$

:

$$n-1) \quad \mathbf{V}_0^{n-1}(t) = (1-t)\mathbf{V}_0^{n-2}(t) + t\mathbf{V}_1^{n-2}(t); \quad \mathbf{V}_1^{n-1}(t) = (1-t)\mathbf{V}_1^{n-2}(t) + t\mathbf{V}_2^{n-2}(t)$$

$$n) \quad \mathbf{V}_0^n(t) = (1-t)\mathbf{V}_0^{n-1}(t) + t\mathbf{V}_1^{n-1}(t)$$

Výstup: bod krivky: $\mathbf{b}^n(t) = \mathbf{V}_0^n(t)$

Teda predpis pre CA algoritmus k výpočtu bodu na Bezierovej krivke:

$$\mathbf{b}^n(t) = \mathbf{V}_0^n(t)$$

Vyčíslime pomocou :

$$\mathbf{V}_i^r(t) = (1-t)\mathbf{V}_i^{r-1}(t) + t\mathbf{V}_{i+1}^{r-1}(t), \quad r = 1, 2, \dots, n; \quad i = 0, 1, \dots, n-r$$

Pričom:

$$\mathbf{V}_i^0(t) = \mathbf{V}_i$$

Všimnime si keď robíme CA pre Bezierovu krivku ľubovoľného stupňa n v pevnom bode $t \in \langle 0, 1 \rangle$ potom :

a) na každej strane $\mathbf{V}_i\mathbf{V}_{i+1}$ jej riadiaceho polygónu vytvárame bod $\mathbf{V}_i^1(t) = (1-t)\mathbf{V}_i + t\mathbf{V}_{i+1}$

b) pre každé $r \in \{1, 2, \dots, n\}$ ku každej hrane $\mathbf{V}_i^{r-1}(t)\mathbf{V}_{i+1}^{r-1}(t)$ vytvárame bod

$$\mathbf{V}_i^r(t) = (1-t)\mathbf{V}_i^{r-1}(t) + t\mathbf{V}_{i+1}^{r-1}(t), \quad .$$

Takémuto procesu tvorby bodov sa hovorí **lineárna interpolácia**.

C. Prerozdeľovanie – subdivision

Rekurzívne prerozdeľovacie metódy sa používajú na opätovné delenie segmentov krivky na polovicu, vďaka čomu po každom kroku narastá počet riadiacich bodov. Tieto metódy sú efektívne pri zobrazovaní aproximačných kriviek, pretože rozdeľovací proces môžeme predlžovať dovtedy pokiaľ riadiaci graf neaproximuje krivku dostatočne presne. Súradnice riadiacich bodov potom možno považovať za súradnice bodov krivky a riadiaci polygón stotožniť s krivkou samotnou. Iné použitie prerozdeľovacieho procesu je zamerané na generovanie väčšieho počtu riadiacich bodov pre efektívnejšie upravovanie tvaru krivky. Umožní to navrhovať krivky dost' zložitého tvaru vychádzajúc z nevel'kého počtu riadiacich vrcholov tak, že aplikovaním prerozdeľovacieho procesu si obstaráme ďalšie riadiace body.

Splajnové prerozdeľovanie sa najjednoduchšie aplikuje na krivkové polynomicke segmenty na intervale $\langle 0, 1 \rangle$ reprezentované v tzv. Bezierovom tvare t.j. pomocou aproximačného riadiaceho polygónu, ktorého prvý bod je začiatočným a posledný koncovým bodom krivky a dotykové vektory krivky v nich sú určené prvou a poslednou stranou riadiaceho polygónu.

Nech $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$ sú riadiace body a $\mathbf{b}^3(t)$ je Bezierova krivka. Pre každé $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$ rozdelí bod $\mathbf{b}^3(\alpha)$ Bezierovu krivku na dva segmenty: $LS(t), PS(t)$. Oba segmenty sú segmenty polynomickej krivky 3° a preto ich možno opísať ako Bezierove krivky 3° s riadiacimi bodmi: $LS(t) : \mathbf{V}_0^0(\alpha), \mathbf{V}_0^1(\alpha), \mathbf{V}_0^2(\alpha), \mathbf{V}_0^3(\alpha)$ a $PS(t) : \mathbf{V}_3^3(\alpha), \mathbf{V}_1^2(\alpha), \mathbf{V}_2^1(\alpha), \mathbf{V}_3^0(\alpha)$ na intervale $\langle 0, 1 \rangle$.

Určenie týchto dvoch polygónov sa nazýva **metóda subdivision – prerozdeľovanie**.

Všimnime si, že v diagrame CA-schémy sú riadiace body týchto kriviek na stranách tejto trojuholníkovej schémy.

Najčastejšie sa $\alpha = \frac{1}{2}$, potom je krivka rozdelená do dvoch oblúkov v parametrickom strede (vo všeobecnosti dva oblúky nemajú rovnakú dĺžku). Metódu subdivision možno zopakovať. Každé dva nové riadiace polygóny sa prerozdelia. Tieto kroky možno opakovať

ľubovoľný počet krát v závislosti od toho, či prerozdeľujeme krivku preto, aby sme získali viac riadiacich bodov alebo aby sme získali dostatok bodov aproximujúcich body na krivke.

Výsledná postupnosť riadiacich polygónov v závere konverguje ku krivke (konvergencia je rýchla). Na zachytenie „tvaru“ krivky sú potrebné pri rovinnej krivke dve prerozdelenia a v priestore tri prerozdelenia.

V druhom prípade ukončíme prerozdeľovací proces, keď segmenty krivky sú dostatočne malé resp. dĺžka najväčšej strany lomenej čiary je menšia ako dopredu zvolené $\epsilon > 0$.

D. Zvyšovanie stupňa – degree elevation (Farin)

E. Metóda dopredného diferencovania (Salomon)