PODMIENKY SPOJITOSTI SPLAJNOVÝCH KRIVIEK

Pri riešení úloh praxe sa ukazuje, že jednoduché oblúky Hermita či Beziera nie vždy dostatočne spĺňajú požiadavky (predstavy) návrhára na tvar výslednej krivky. Získaná krivka môže dosť „zle“ aproximovať zadané body riadiaceho polygónu (veľmi „ďaleko“).

Ukazuje sa preto vhodnejšie vytvoriť celú krivku z viacerých segmentov – jednoduchých oblúkov. Pričom jednotlivé segmenty majú rovnaký stupeň tj. ich zmiešavacie funkcie sú rovnakého stupňa. Znamená to, že výsledná krivka bude „zošitá“ zo segmentov, ale k tomu, aby bola „pekná - hladká“ je potrebné zadať podmienky spojitosti v bode spájania dvoch segmentov.

A.Parametrická spojitosť

Na zabezpečenie hladkého prechodu z jedného segmentu čiastkovej polynomickej krivky na druhý, môžeme využiť rôzne podmienky spojitosti v spojovacích bodoch segmentov. Ak každý segment krivky je opísaný bodovou parametrickou funkciou tvaru:

$$ {}^{i}X(u), u_i \le u \le u_{i+1}, $$

alebo sústavou parametrických súradnicových funkcií tvaru:

$$ x = {}^{i}x(u); \quad y = {}^{i}y(u); \quad z = {}^{i}z(u); \quad u \in \langle u_i, u_{i+1} \rangle, $$

môžeme parametrickú spojitosť krivky zabezpečiť stotožnením parametrických derivácií (t.j. derivácií podľa parametra u funkcie ${}^{i}X(u)$ resp. všetkých troch súradnicových funkcií ${}^{i}x(u)$, ${}^{i}y(u)$, ${}^{i}z(u)$) každých dvoch susediacich krivkových segmentov v ich spoločnom hraničnom bode, pričom deriváciou rozumieme aj 0-tú deriváciu.

Ak teda predpokladáme, že:

${}^{0}X(u), u \in \langle u_0, u_1 \rangle$ $({}^{0}x(u),\ {}^{0}y(u),\ {}^{0}z(u);\quad u \in \langle u_0, u_1 \rangle)$ a

${}^{1}X(u), u \in \langle v_0, v_1 \rangle$ $({}^{1}x(u),\ {}^{1}y(u),\ {}^{1}z(u);\quad u \in \langle v_0, v_1 \rangle)$,

pričom môže byť napr. $\langle v_0, v_1 \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle$, kde $u_0 < u_1 < u_2$ tak, podmienky parametrickej spojitosti možno zapísať takto:

1°.parametrická spojitosť 0-tého rádu , alebo **C^0-spojitosť**, znamená polohovú spojitosť t.j. splnenie podmienok:

(1) ${}^{0}X(u_1) = {}^{1}X(v_0)$ resp. ${}^{0}x(u_1) = {}^{1}x(v_0); {}^{0}y(u_1) = {}^{1}y(v_0); {}^{0}z(u_1) = {}^{1}z(v_0);$

2°.parametrická spojitosť 1-ho rádu , alebo **C^1-spojitosť**, je ekvivalentná spojitosti 0-tej a prvej derivácie, čiže splneniu podmienok (1) a tiež nasledujúcich:

(2) ${}^{0}X'(u_1) = {}^{1}X'(v_0)$ resp. ${}^{0}x'(u_1) = {}^{1}x'(v_0); {}^{0}y'(u_1) = {}^{1}y'(v_0); {}^{0}z'(u_1) = {}^{1}z'(v_0);$

3°.parametrická spojitosť 2-ho rádu , alebo **C^2-spojitosť**, je ekvivalentná spojitosti 0-tej, 1.a 2.derivácie, čiže splneniu podmienok (1), (2) a tiež nasledujúcej podmienky:

(3) ${}^{0}X''(u_1) = {}^{1}X''(v_0)$ resp. ${}^{0}x''(u_1) = {}^{1}x''(v_0); {}^{0}y''(u_1) = {}^{1}y''(v_0); {}^{0}z''(u_1) = {}^{1}z''(v_0);$.

V prípade parametrickej spojitosti 2-ho rádu je rýchlosť zmeny dotykového vektora v spoji dvoch segmentov rovnaká. Teda dotyčnica krivky hladko prechádza z jedného segmentu krivky na druhý. Ale u spojitosti 1.rádu rýchlosť zmeny dotykového vektora môže byť na susedných segmentoch úplne odlišná, čiže vo všeobecnosti sa tvary dvoch segmentov krivky môžu v okolí ich spoločného bodu výrazne líšiť. Spojitosť 1.rádu je často postačujúca pre digitalizáciu kresieb a niektoré dizajnérske aplikácie, zatiaľ čo spojitosť 2.rádu je užitočná pri opise animačných dráh pre pohyb kamery.

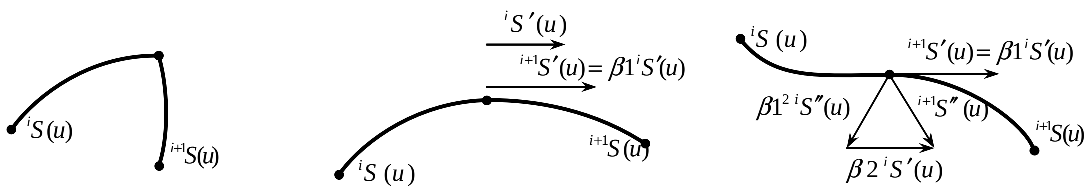
B.Geometrická spojitosť

V tomto, trochu nepresne povedané, nevyžadujeme rovnosť derivácií parametrických vyjadrení segmentov krivky v spojoch, ale iba ich úmernosť. Získame tým určité tvarovacie parametre, ktorými možno ovplyvňovať tvar krivky. Presnejšie:
1°.geometrická spojitosť 0-tého rádu resp. **G^0-spojitosť** je rovnaká ako C^0-spojitosť krivky t.j. dva susedné segmenty musia mať spoločný hraničný bod, inými slovami musí platiť (1). $G^0=C^0$.

2°.geometrická spojitosť 1-ho rádu , alebo **G^1-spojitosť**, si okrem G^0-spojitosti vyžaduje, aby dva susedné segmenty mali vo svojom spoji úmerné 1.derivácie, čo je ekvivalentné spojitosti jednotkového dotykového vektora resp. existencii spoločnej dotyčnice v tomto bode. Matematická formulácia tejto podmienky je:
$\exists\ \beta 1 \in \mathbb{R},\ \beta 1 > 0 :\ {}^1X'(v_0) = \beta 1\, {}^0X'(u_1)$

3°.geometrická spojitosť 2-ho rádu, alebo **G^2-spojitosť**, si okrem G^0- a G^1-spojitosti vyžaduje, aby dva susedné segmenty krivky mali vo svojom spoločnom bode spojitý tzv. vektor krivosti, v dôsledku čoho majú v tomto bode spojitú aj 1.krivosť, ktorá je jeho absolútnou hodnotou.
Matematická formulácia tejto požiadavky pre susedné segmenty krivky je:
$\exists\ \beta 2 \in \mathbb{R} :\ {}^1X''(v_0) = \beta 1^2\ {}^0X''(u_1) + \beta 2\ {}^0X'(u_1)$
kde $\beta 1$, $\beta 2$ sú spomínanými tvarovacími parametrami.

Ak označíme ${}^0X(u)$ ako ${}^iS(u)$ a ${}^1X(u)$ ako ${}^{i+1}S(u)$, tak môžeme podmienky geometrickej spojitosti pre segmenty ${}^iS(u)$, ${}^{i+1}S(u)$ ilustrovať:



Krivka generovaná pomocou geometrickej spojitosti je dosť podobná krivke generovanej pomocou parametrickej spojitosti (pri voľbe $\beta 1=1$, $\beta 2=0$ sa dokonca stotožnia), ale vhodnými voľbami $\beta 1$, $\beta 2$ možno tieto odlišnosti upravovať.

POLYNOMICKÁ INTERPOLÁCIA – SPLAJN FUNKCIE

Nech $n \in N$ a $(x_0, y_0), \ldots, (x_k, y_k)$ je postupnosť (k+1) bodov v rovine E^2, kde $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b$. Funkciu $y = f(x), \quad x \in \langle a, b \rangle$, nazveme po častiach polynomickou funkciou, PP-funkciou, splajnom stupňa n, na množine $x_0 < x_1 < \ldots < x_k$, ak platí:

1° $f(x) = {}^i p(x), \quad x \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle$

2° ${}^i p^{(j)}(x_{i+1}) = {}^{i+1} p^{(j)}(x_{i+1}), \quad i = 0, \ldots, k-2, \; j = 0, \ldots, r-1$.

Body $x_1, \ldots, x_{k-1}$, ktoré delia interval $\langle a, b \rangle$ na k-intervalov sa nazývajú uzly (deliace body intervalu). Body $(x_1, y_1), \ldots, (x_{k-1}, y_{k-1})$ sa nazývajú spoje (body spojenia).

Kubické splajnové funkcie: *n*=3

$f(x) = {}^i p(x) = {}^i a_0 + {}^i a_1 (x - x_i) + {}^i a_2 (x - x_i)^2 + {}^i a_3 (x - x_i)^3, \quad x \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle$.

Nech $(x_0, y_0), \ldots, (x_k, y_k)$ a $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b$, t.j. máme k – intervalov a potrebujeme určiť k- polynómov 3°. Každý polynóm ${}^i p(x)$ má štyri koeficienty ${}^i a_0, {}^i a_1, {}^i a_2, {}^i a_3$ a teda potrebujeme určiť 4k polynomických koeficientov. Tieto koeficienty určíme pomocou podmienok 1° a 2°:

1°. prechádza k+1 bodmi $(x_0, y_0), \ldots, (x_k, y_k)$: k+1 rovníc

2°. spojitosť 0.,1.a 2.derivácie v k-1spojoch: 3(k-1) rovníc.

Pre 4k neznámych poznáme (k+1)+ 3(k-1) = 4k-2 podmienok (rovníc). K jednoznačnému určeniu 4k neznámych doplníme dve rovnice, ktoré reprezentujú dve doplňujúce podmienky, ktoré sa zadávajú na krajoch intervalu $a = x_0$, $b = x_k$ a preto ich nazývame krajné, okrajové či hraničné podmienky.

Varianty zadávania krajných podmienok:

1.prvá derivácia polynómov:

${}^0 p'(x_0) = q_0, \quad {}^{k-1} p'(x_k) = q_k$ **clamped (fixovaný,zviazaný,ukotvený) splajn**

2.druhá derivácia polynómov v krajných uzloch je rovná 0:

${}^0 p''(x_0) = 0, \quad {}^{k-1} p''(x_k) = 0$ **prirodzený(natural, relaxed) splajn**

3.rovnosť 1. a 2. derivácie polynómov v krajných uzloch:

${}^0 p'(x_0) = {}^{k-1} p'(x_k), \; {}^0 p''(x_0) = {}^{k-1} p''(x_k)$ **cyklický splajn**

4.opačná rovnosť 1. a 2. derivácie polynómov v krajných uzloch:

${}^0 p'(x_0) = -{}^{k-1} p'(x_k), \; {}^0 p''(x_0) = -{}^{k-1} p''(x_k)$ **acyklický splajn**

5.rovnosť 2.derivácií polynómov v prvých dvoch a posledných dvoch uzloch:

${}^0 p''(x_0) = {}^1 p''(x_1), \; {}^{k-2} p''(x_{k-1}) = {}^{k-1} p''(x_k)$ **kvadratická podmienka**

6. rovnosť 3.derivácie polynómov v druhom a predposlednom uzle:

${}^0 p'''(x_1) = {}^1 p'''(x_1), \; {}^{k-2} p'''(x_{k-1}) = {}^{k-1} p'''(x_{k-1})$ **podmienka 3.derivácie**

HERMITOVE KUBICKÉ SPLAJNY, HERMITOVA INTERPOLÁCIA, C^2-SPLAJN.

Nech sú v priestore E (E^2,E^3) dané body, ktorých polohové vektory označíme $\mathbf{R}_0,...,\mathbf{R}_k$. Zadané body chceme interpolovať krivkou – splajnom, ktorý je čiastkovou kubickou krivkou zloženou z Hermitovych segmentov ${}^i\mathbf{r}(t)$: $\mathbf{R}_i, \mathbf{R}_{i+1}$, i=0,...,k-1 , teda každý segment je opísaný:

$$ {}^i\mathbf{r}(t) = H_{03}(t)\mathbf{R}_i + H_{33}(t)\mathbf{R}_{i+1} + H_{13}(t)\mathbf{r}_i' + H_{23}(t)\mathbf{r}_{i+1}', \quad t \in \langle 0,1 \rangle $$

Na ich určenie je nutné a stačí poznať, okrem daných bodov $\mathbf{R}_0,...,\mathbf{R}_k$, aj dotykové vektory $\mathbf{r}_0', \mathbf{r}_1', ..., \mathbf{r}_{k-1}', \mathbf{r}_k'$. Tieto vektory určíme pomocou podmienky parametrickej spojitosti 2.rádu v spoji dvoch segmentov:

C^2-spojitosť: ${}^i\mathbf{r}''(1) = {}^{i+1}\mathbf{r}''(0)$.

Vieme, že ${}^i\mathbf{r}''(t) = H_{03}''(t)\mathbf{R}_i + H_{33}''(t)\mathbf{R}_{i+1} + H_{13}''(t)\mathbf{r}_i' + H_{23}''(t)\mathbf{r}_{i+1}' =$

$$ = (-6+12t)\mathbf{R}_i + (6-12t)\mathbf{R}_{i+1} + (-4+6t)\mathbf{r}_i' + (-2+6t)\mathbf{r}_{i+1}' $$

a $$ {}^{i+1}\mathbf{r}''(t) = (-6+12t)\mathbf{R}_{i+1} + (6-12t)\mathbf{R}_{i+2} + (-4+6t)\mathbf{r}_{i+1}' + (-2+6t)\mathbf{r}_{i+2}' . $$

Teda ${}^i\mathbf{r}''(1) = 6(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_{i+1}) + 2\mathbf{r}_i' + 4\mathbf{r}_{i+1}'$ a ${}^{i+1}\mathbf{r}''(0) = 6(\mathbf{R}_{i+2} - \mathbf{R}_{i+1}) - 4\mathbf{r}_{i+1}' - 2\mathbf{r}_{i+2}'$.

Z týchto vzťahov, po dosadení do podmienky spojitosti 2.derivácií: ${}^i\mathbf{r}''(1) = {}^{i+1}\mathbf{r}''(0), i = 0,...,k-2$ dostávame sústavu rovníc:

$$ \mathbf{r}_i' + 4\mathbf{r}_{i+1}' + \mathbf{r}_{i+2}' = 3(\mathbf{R}_{i+2} - \mathbf{R}_i), \qquad \text{(A)} $$

pre vektory $\mathbf{r}_1', ..., \mathbf{r}_{k-1}'$. Zápis pomocou matíc:

$$ \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & ... & 0 \\ : & : & : & : & : & : \\ 0 & ... & 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_0' \\ : \\ : \\ \mathbf{r}_k' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_0) \\ : \\ : \\ 3(\mathbf{R}_k - \mathbf{R}_{k-2}) \end{bmatrix} $$

Táto sústava reprezentuje (k-1) rovníc pre k+1 neznámych $\mathbf{r}_0', \mathbf{r}_1', ..., \mathbf{r}_{k-1}', \mathbf{r}_k'$. Označme jednotlivé matice: M rozmer (k-1)x(k+1); R rozmer (k+1)x1; Q rozmer (k-1)x1.

K jednoznačnému určeniu vektorov $\mathbf{r}_0', \mathbf{r}_1', ..., \mathbf{r}_{k-1}', \mathbf{r}_k'$ v matici R , je potrebné určiť k matici M inverznú maticu. Matica M však nie je štvorcová a preto je potrebné doplniť ju na štvorcovú maticu rozmeru (k+1)x(k+1) t.j. doplniť o dva nenulové riadky. Podobne aj matica Q sa doplní o dva riadky na maticu rozmeru (k+1)x1. Postupy doplnenia závisia na vybraných okrajových podmienkach, ktoré ovplyvnia tvar splajnovej krivky na prvom a poslednom segmente.

Hermitov splajn je matematickým modelom fyzického splajnu a má niektoré nevýhody. Najväčšou nevýhodou je to, že ak zmeníme jeden jeho riadiaci bod tak sa zmení tvar celej krivky. Hovoríme, že splajn nemá lokálne riadenie t.j. nemôžeme zrekonštruovať časť krivky bez toho, aby sme neporušili celú krivku a preto tento splajn nazývame globálny Hermitov splajn. Modelovanie krivky sa realizuje výberom okrajových podmienok.

1. Clamped (fixovaný) splajn

Zadané sú hodnoty vektorov 1.derivácií v začiatočnom a koncovom bode $\mathbf{R}_0$, $\mathbf{R}_k$ t.j.:

$$\mathbf{r}_0' = \mathbf{q}_0 \ \text{ a } \ \mathbf{r}_k' = \mathbf{q}_k$$

Existujú rôzne možnosti určenia týchto vektorov napr.ako Besselove dotyčnice (lit) alebo ich zadáva návrhár podľa požiadaviek na tvar - sklon krivky v krajných bodoch $\mathbf{R}_0$, $\mathbf{R}_k$.

Maticový zápis:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & .. & 0 \\ & & M & & \\ 0 & .. & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_0' \\ : \\ \mathbf{r}_k' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_0 \\ Q \\ \mathbf{q}_k \end{bmatrix} \qquad \text{(B)}$$

a zo sústavy (B) vypočítame $\begin{bmatrix} \mathbf{r}_0' \\ : \\ \mathbf{r}_k' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & .. & 0 \\ & & M & & \\ 0 & .. & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_0 \\ Q \\ \mathbf{q}_k \end{bmatrix}$

Teraz vieme opísať všetky segmenty Hermitovho splajnu v tvare:

$$^{i}\mathbf{r}(t) = H_{03}(t)\mathbf{R}_i + H_{33}(t)\mathbf{R}_{i+1} + H_{13}(t)\mathbf{r}_i' + H_{23}(t)\mathbf{r}_{i+1}', \quad t \in \langle 0,1 \rangle$$

kde i=0,...,k-1 (všetky údaje sú známe). Keďže poznáme všetky segmenty Hermitovho splajnu, poznáme aj samotný splajn.

<u>*Poznámka*</u>: Ďalší, avšak menej „presný“ spôsob určenia Hermitovho splajnu (nie je globálny) je založený na tom, že namiesto dotykových vektorov v krajných bodoch zadanej postupnosti t.j. $\mathbf{r}_0'$, $\mathbf{r}_k'$, zvolíme dotykové vektory $\mathbf{r}_0'$a $\mathbf{r}_1'$ a následne využijeme sústavu rovníc (A):

$$\mathbf{r}_0' + 4\mathbf{r}_1' + \mathbf{r}_2' = 3(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_0) \Rightarrow \ \mathbf{r}_2' = 3(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_0) - \mathbf{r}_0' - 4\mathbf{r}_1'$$

$$\mathbf{r}_1' + 4\mathbf{r}_2' + \mathbf{r}_3' = 3(\mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_1) \Rightarrow \ \mathbf{r}_3' = 3(\mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_1) - \mathbf{r}_1' - 4\mathbf{r}_2'$$

:

Tieto Hermitove splajny sa dajú lokálne upravovať (riadiť), lebo každý segment závisí na svojich hraničných podmienkach (zmena riadiaceho bodu resp. dotykového vektora zmení iba dva segmenty). Aj keď pri konštrukcii splajnu vychádzame iba zo spojitosti 2.derivácií, z opisu segmentov je zrejmé, že tieto splajny sú aj spojité a majú spojité aj prvé derivácie ako sa požaduje v definícii splajnu.

2. Prirodzený (relaxed) splajn

V začiatočnom a koncovom bode $\mathbf{R}_0$, $\mathbf{R}_k$ sú vektory 2.derivácie parametrického vyjadrenia krivky nulové t.j. 2. derivácia polynomického vyjadrenia prvého segmentu v bode t = 0 a 2.derivácie posledného segmentu v bode t = 1 sú rovné **0**-vektoru.

Teda v začiatočnom bode $\mathbf{R}_0$: $^{0}\mathbf{r}''(0) = \mathbf{0}$ t.j. $\quad 3(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_0) - 2\mathbf{r}_0' - \mathbf{r}_1' = \mathbf{0}$,

potom závislosť vektorov 1.derivácie na polohových vektoroch daných bodov môžeme zapísať:

$$2\mathbf{r}_0' + \mathbf{r}_1' = 3(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_0).$$

V poslednom krajnom bode $\mathbf{R}_k$: $^{k-1}\mathbf{r}''(1) = \mathbf{0}$ t.j $\quad 3(\mathbf{R}_{k-1} - \mathbf{R}_k) + \mathbf{r}_{k-1}' + 2\mathbf{r}_k' = \mathbf{0}$,

teda závislosť vektorov 1.derivácie na polohových vektoroch daných bodov zapíšeme:

$$\mathbf{r}_{k-1}' + 2\mathbf{r}_k' = 3(\mathbf{R}_k - \mathbf{R}_{k-1}) .$$

Teraz maticu M rozšírime o dva riadky, analogicky aj maticu Q:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & .. & 0 \\ & & M & & \\ 0 & .. & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_0' \\ : \\ \mathbf{r}_k' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_0) \\ Q \\ 3(\mathbf{R}_k - \mathbf{R}_{k-1}) \end{bmatrix} \qquad \text{(C)}$$

a zo sústavy (C) vypočítame $\begin{bmatrix} \mathbf{r}_0' \\ : \\ \mathbf{r}_k' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & .. & 0 \\ & & M & & \\ 0 & .. & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_0) \\ Q \\ 3(\mathbf{R}_k - \mathbf{R}_{k-1}) \end{bmatrix}$.

Príklad:

Ďalšie okrajové podmienky:

3. **Cyklický splajn**
4. **Acyklický splajn**
5. **Kvadratická okrajová podmienka**
6. **Podmienka 3.derivácie**

Algoritmus konštrukcie globálneho Hermitovho splajnu:

1. vstup: riadiace body $\mathbf{R}_0,...,\mathbf{R}_k$
2. výber okrajovej podmienky a určenie rovníc pre zvolenú okrajovú podmienku
3. sústava k+1 rovníc pre k+1 neznámych $\mathbf{r}_0', \mathbf{r}_1', ..., \mathbf{r}_{k-1}', \mathbf{r}_k'$ a ich vyčíslenie
4. vykreslenie Hermitových segmentov:
   $${}^i\mathbf{r}(t) = H_{03}(t)\mathbf{R}_i + H_{33}(t)\mathbf{R}_{i+1} + H_{13}(t)\mathbf{r}_i' + H_{23}(t)\mathbf{r}_{i+1}', \quad t \in \langle 0,1 \rangle, \ i=0,...,k-1$$
5. výstup: globálny Hermitov splajn.

Využitie Hermitových splajnov je najmä pri digitalizáciii takých aplikácií, v ktorých nie je obtiažne navrhnúť sklon krivky. Pre mnohé aplikácie je výhodnejšie ak sa sklony (dotykové vektory) nemusia priamo zadávať, ale dajú sa získať alebo odhadnúť z iných, najčastejšie bodových dát, alebo z nejakých iných doplnkových informácií ako napríklad kardinálny splajn, kde sa nevyžaduje zadávanie žiadnych dotykových vektorov resp. derivácií, ale vypočítajú sa z daných riadiacich bodov a doplňujúceho parametra.