KARDINÁLNE SPLAJNY

Interpolačné kubické splajny, u ktorých sa určujú dotykové vektory v krajných bodoch segmentov pomocou dvoch priľahlých (susedných) riadiacich bodov a nie je potrebné zadávať ani dotykové vektory na začiatku a konci krivky.

Nech $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \ldots \mathbf{V}_n$ je zadaná postupnosť bodov priestoru E (E^2,E^3), ktorými potrebujeme preložiť krivku zloženú z Hermitových kubických segmentov. Hermitov segment ${}^i\mathbf{r}(t)$ sme definovali pomocou dvoch rôznych bodov $\mathbf{R}_i$ a $\mathbf{R}_{i+1}$ a vektorov $\mathbf{r}_i'$, $\mathbf{r}_{i+1}'$, ktoré boli postavené do úlohy dotykových vektorov v daných bodoch.

Takéto Hermitove segmenty chceme teraz definovať pomocou usporiadanej štvorice bodov $\mathbf{V}_{i-1}, \mathbf{V}_i, \mathbf{V}_{i+1}, \mathbf{V}_{i+2}$ a reálnej konštanty $s > 0$ takto:

- bod $\mathbf{V}_i$ je začiatočný a bod $\mathbf{V}_{i+1}$ je koncový bod segmentu:

  ${}^i\mathbf{r}(0) = \mathbf{V}_i = \mathbf{R}_i, \quad {}^i\mathbf{r}(1) = \mathbf{V}_{i+1} = \mathbf{R}_{i+1}$

- zvyšné body $\mathbf{V}_{i-1}, \mathbf{V}_{i+2}$ slúžia na určenie dotykových vektorov :

  $\mathbf{r}_i' = {}^i\mathbf{r}'(0) = s(\mathbf{V}_{i+1} - \mathbf{V}_{i-1})$, $\mathbf{r}_{i+1}' = {}^i\mathbf{r}'(1) = s(\mathbf{V}_{i+2} - \mathbf{V}_i)$.

Číslo $s > 0$ nazývame koeficient úmernosti, pretože vyjadruje pomer medzi dĺžkami dotykových vektorov segmentu v jeho krajných bodoch a dĺžkami uhlopriečok štvoruholníka $\mathbf{V}_{i-1}\mathbf{V}_i\mathbf{V}_{i+1}\mathbf{V}_{i+2}$ protiľahlých k týmto bodom.

K tomu, aby sme určili parametrické vyjadrenie segmentu kardinálneho splajnu, dosadíme do Hermitovho vyjadrenia, presnejšie do geometrickej matice krajné body a dotykové vektory v týchto bodoch tak, ako sme ich vyššie opísali:

$$
{}^i\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_i \\ \mathbf{V}_{i+1} \\ s(\mathbf{V}_{i+1} - \mathbf{V}_{i-1}) \\ s(\mathbf{V}_{i+2} - \mathbf{V}_i) \end{bmatrix} =
$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s & 0 & s & 0 \\ 0 & -s & 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{i-1} \\ \mathbf{V}_i \\ \mathbf{V}_{i+1} \\ \mathbf{V}_{i+2} \end{bmatrix} =
$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s & 0 & s & 0 \\ 2s & s-3 & 3-2s & -s \\ -s & 2-s & s-2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{i-1} \\ \mathbf{V}_i \\ \mathbf{V}_{i+1} \\ \mathbf{V}_{i+2} \end{bmatrix} = T \,.\, M_C \,.\, G_C. \qquad \text{(X)}
$$

Získali sme maticové vyjadrenie polynomického segmentu kardinálneho splajnu. Po vynásobení matíc T a M_C dostaneme riadkovú maticu, ktorej prvky sú štyri zmiešavacie funkcie:

$C_{-1}(t) = -st + 2st^2 - st^3$ $\qquad C_0(t) = 1 + (s-3)t^2 + (2-s)t^3$

$C_1(t) = st + (3-2s)t^2 + (s-2)t^3$ $\qquad C_2(t) = -st^2 + st^3$.

Grafy zmiešavacích funkcií pre s =1/2. (Hearn 326).
Dve zmiešavacie funkcie $C_{-1}(t)$, $C_2(t)$ sú záporné, funkcie $C_0(t)$, $C_1(t)$ sú symetrické a pre všetky štyri zmiešavacie funkcie platí rozklad jednotky t.j. $\sum_{r=-1}^{2} C_r(t) = 1$.

Teda parametrickú reprezentáciu segmentu (X) zapíšeme pomocou zmiešavacích funkcií a riadiacich bodov:

$$^{i}\mathbf{c}(t) = \sum_{r=-1}^{2} C_r(t)\mathbf{V}_{i+r}\ , t \in \langle 0,1 \rangle\ ,\ s > 0.$$

Modelovať segment kardinálneho splajnu môžeme pomocou koeficientu úmernosti $s > 0$. Vyjadrime bod segmentu pre t = ½:

$$^{i}\mathbf{c}(\frac{1}{2}) = \frac{\mathbf{V}_i + \mathbf{V}_{i+1}}{2} + \frac{1}{4}\left[\frac{\mathbf{V}_i + \mathbf{V}_{i+1}}{2} - \frac{\mathbf{V}_{i-1} + \mathbf{V}_{i+2}}{2}\right]s = \mathbf{S}_i + \frac{1}{4}(\mathbf{S}_i - \mathbf{T}_i)\ s\,.$$

Koeficient úmernosti s ovplyvňuje napnutie krivky nad úsečkou $\mathbf{V}_{i-1}\mathbf{V}_i$:

- v zásade koeficient úmernosti s môžeme voliť ľubovoľne $s \in \langle 0, \infty)$
- zväčšovanie hodnoty koeficientu úmernosti s t.j. predlžovanie dotykových vektorov v krajných bodoch vyvoláva zmenšovanie odklonu krivky od dotyčníc, čiže „ťahanie“ sa krivky v smere dotykového vektora a tým vznik kriviek so slabým napnutím a s možným výskytom sľučiek.
- pre malé hodnoty koeficientu úmernosti s, krivka iba „krátko sleduje“ dotykový vektor. Teda odklon krivky sa zmenšovaním hodnoty parametra s zväčšuje a najväčší je pre s = 0, kedy segment $^{i}\mathbf{c}(t)$ je úsečka $\mathbf{V}_i\mathbf{V}_{i+1}$.

Teraz pristúpime ku konštrukcii kardinálneho splajnu, ktorý bude vytvorený z opísaných kardinálnych segmentov .

Nech je daná postupnosť riadiacich bodov $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1,\ ...\ \mathbf{V}_n$. Vytvoríme usporiadané štvorice: $V_0, V_1, V_2, V_3; V_1, V_2, V_3, V_4; ...; V_{i-1}, V_i, V_{i+1}, V_{i+2}; V_i, V_{i+1}, V_{i+2}, V_{i+3}; ...; V_{n-3}, V_{n-2}, V_{n-1}, V_n;$
a zistíme, že:

1. segmenty interpolujú body $\mathbf{V}_1,\ ...,\ \mathbf{V}_{n-1}$, tzv. prirodzené ukončenie kardinálneho splajnu a riadiace body $\mathbf{V}_0,\ \mathbf{V}_n$ sú voľné ukončenia.
2. podmienky spojitosti pre susedné segmenty: $^{i}\mathbf{c}(t)$, $^{i+1}\mathbf{c}(t)$ a zistíme, že:

(1°) $^{i}\mathbf{c}(1) = \mathbf{V}_{i+1}$ a $^{i+1}\mathbf{c}(0) = \mathbf{V}_{i+1}$ t.j. $^{i}\mathbf{c}(1) = {}^{i+1}\mathbf{c}(0)$.

V spoji je C^0-spojitosť (parametrická spojitosť 0.rádu)

(2°) $^{i}\mathbf{c}'(1) = s(\mathbf{V}_{i+2} - \mathbf{V}_i)$ a $^{i+1}\mathbf{c}'(0) = s(\mathbf{V}_{i+2} - \mathbf{V}_i)$ t.j. $^{i}\mathbf{c}'(1) = {}^{i+1}\mathbf{c}'(0)$.

Teda v spoji je C^1-spojitosť (parametrická spojitosť 1.rádu)

(3°) $^{i}\mathbf{c}''(1) = -2s\mathbf{V}_{i-1} + 2(3-2s)\mathbf{V}_i + 2(s-3)\mathbf{V}_{i+1} + 4s\mathbf{V}_{i+2}$ a

$^{i+1}\mathbf{c}''(0) = 4s\mathbf{V}_i + 2(s-3)\mathbf{V}_{i+1} + 2(3-2s)\mathbf{V}_{i+2} - 2s\mathbf{V}_{i+3}$ t.j. $^{i}\mathbf{c}''(1) \neq {}^{i+1}\mathbf{c}''(0)$

V spoji nie je splnená požiadavka na C^2-spojitosť (parametrická spojitosť 2. rádu (ani G^2)).
Teda kardinálny splajn je v spojoch C^1-spojitý t.j. v spoji je parametrická spojitosť 1.rádu.

3. tvarovací parameter – koeficient úmernosti pre rôzne hodnoty parametra s dostaneme rôzne kardinálne splajny. Parameter s je globálny parameter t.j. riadi napnutie krivky rovnako na

všetkých segmentoch. Ak vzdialenosti medzi riadiacimi bodmi sú rôzne tak, na niektorých segmentoch globálny parameter (jeden pre celý splajn) môže vyvolať nežiaduce napnutia. Existujú postupy na zaradenie spojite sa meniaceho tvarovacieho parametra.

4. interpolácia voľných koncov $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_n$ sa dá zabezpečiť pomocou násobných bodov alebo fantómových bodov:

násobné body: doplníme postupnosť bodov o body $\mathbf{V}_{-1} = \mathbf{V}_0$, $\mathbf{V}_{n+1} = \mathbf{V}_n$. Tým budú známe štvorice $\mathbf{V}_{-1}\mathbf{V}_0\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2$ pre segment ${}^0\mathbf{c}(t)$ a $\mathbf{V}_{n-2}\mathbf{V}_{n-1}\mathbf{V}_n\mathbf{V}_{n+1}$ pre segment ${}^{n-1}\mathbf{c}(t)$.

fantómové body: pridaním segmentu ${}^0\mathbf{c}(t)$: $\mathbf{V}_{-1}\mathbf{V}_0\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2$ a segmentu ${}^{n-1}\mathbf{c}(t)$: $\mathbf{V}_{n-2}\mathbf{V}_{n-1}\mathbf{V}_n\mathbf{V}_{n+1}$ získame interpoláciu voľných koncov $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_n$. Ak máme požiadavku na tvar týchto segmentov tak môžeme ich zadávať ako okrajové podmienky.

1. **Fixovaný (clamped) splajn**

Zadané vektory 1. derivácie v bodoch $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_n$ t.j. ${}^0\mathbf{c}'(0) = \mathbf{q}_0$ ${}^{n-1}\mathbf{c}'(1) = \mathbf{q}_n$

Vyčíslime fantómové body: $\mathbf{V}_{-1}$: $s(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_{-1}) = \mathbf{q}_0 \Rightarrow \mathbf{V}_{-1} = \mathbf{V}_1 - \dfrac{1}{s}\mathbf{q}_0$

$$\mathbf{V}_{n+1}: \; s(\mathbf{V}_{n+1} - \mathbf{V}_{n-1}) = \mathbf{q}_n \Rightarrow \mathbf{V}_{n+1} = \mathbf{V}_{n-1} + \frac{1}{s}\mathbf{q}_n$$

2. **Prirodzený (relaxed) splajn**

Vektor 2. derivácie v krajných bodoch je rovný **0**-vektoru: ${}^0\mathbf{c}''(0) = \mathbf{0}$ ${}^{n-1}\mathbf{c}''(1) = \mathbf{0}$.

Teda fantómové body :

$${}^0\mathbf{c}''(0) = 4s\mathbf{V}_{-1} + 2(s-3)\mathbf{V}_0 + 2(3-2s)\mathbf{V}_1 - 2s\mathbf{V}_2 = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{V}_{-1} = \frac{1}{4s}\left[-2(s-3)\mathbf{V}_0 - 2(3-2s)\mathbf{V}_1 + 2s\mathbf{V}_2\right] =$$

$$= \mathbf{V}_1 - \frac{3}{2s}(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0) + \frac{1}{2}(\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_0)$$

$${}^{n-1}\mathbf{c}''(1) = -2s\mathbf{V}_{n-2} + 2(3-2s)\mathbf{V}_{n-1} + 2(s-3)\mathbf{V}_n + 4s\mathbf{V}_{n+1} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{V}_{n+1} = \frac{1}{4s}\left[2s\mathbf{V}_{n-2} - 2(3-2s)\mathbf{V}_{n-1} - 2(s-3)\mathbf{V}_n\right] =$$

$$= \mathbf{V}_{n-1} + \frac{3}{2s}(\mathbf{V}_n - \mathbf{V}_{n-1}) - \frac{1}{2}(\mathbf{V}_n - \mathbf{V}_{n-2})$$

Ako sme uviedli koeficient úmernosti s ovplyvňuje napnutie krivky a vieme tento parameter meniť $s \in \langle 0, \infty)$. Maximálne napnutie dosiahneme pre $s = 0$, ukazuje sa však, že tento parameter s nepredstavuje typické napnutie a preto sa definuje pri kardinálnych splajnoch parameter napätia *T*- tension ako $s := (1-T)/2$ čo dáva $T = 1-2s$.

Hodnotu T = 0 získame ak s = ½ a kardinálne splajny s nulovým napnutím t.j. T = 0 nazývame **Catmull-Rommove** splajny alebo **Overhauserove** splajny (Hearn-Baker, Salomon 253-255, opis konštrukcie).

Ešte uvedieme jeden prípad kardinálnych splajnov, ktoré sú ich zovšeobecnením resp. rozšírením. Uprednostňujem názov rozšírenie, pretože dodávame ďalšie dva parametre *b*- bias, *c*-continuity. Tieto dva parametre poskytnú ďalšiu flexibilitu pri modelovaní tvaru ich segmentov.

Kochanek – Bartelsove splajny: nech riadiace body $\mathbf{V}_{i-1}, \mathbf{V}_i, \mathbf{V}_{i+1}, \mathbf{V}_{i+2}$ sú vstupná dátová štvorica ako pre kardinálny segment . Kochanek-Bartelsove splajny ${}^i\mathbf{k}(t)$ majú nasledovné vstupné podmienky:

- bod ${}^i\mathbf{k}(0) = \mathbf{V}_i$ je začiatočný a bod ${}^i\mathbf{k}(1) = \mathbf{V}_{i+1}$je koncový bod segmentu
- vektory dotyčníc v krajných bodoch:

$$ {}^i\mathbf{k}'(0) = \frac{1}{2}(1-T)\left[(1+b)(1-c)(\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_{i-1}) + (1-b)(1+c)(\mathbf{V}_{i+1} - \mathbf{V}_i)\right] $$

$$ {}^i\mathbf{k}'(1) = \frac{1}{2}(1-T)\left[(1+b)(1+c)(\mathbf{V}_{i+1} - \mathbf{V}_i) + (1-b)(1-c)(\mathbf{V}_{i+2} - \mathbf{V}_{i+1})\right] $$

kde T – tension je parameter napätia,

b – bias- parameter predpätia , alebo šikmosti

c – continuity – parameter spojitosti.

Podľa Kochanek-Bartelsovej formulácie, derivácie parametrickej reprezentácie nemusia byť spojité v krajných bodoch segmentov. Konkrétnejšie, parameter c riadi spojitosť dotykového vektora v hraničných bodoch segmentu v tom zmysle, že ak $T \neq 1$ (t.j. $s \neq 0$) a parametru c je priradená nenulová hodnota, tak sklony segmentov krivky v ich hraničných bodoch môžu byť nespojité. Parameter b sa používa na úpravu veľkosti ohybu segmentu krivky v koncových bodoch. Kochanek-Bartelsove splajny sa používajú na modelovanie animačných dráh. Prudké zmeny v pohybe objektu možno simulovať nenulovými hodnotami parametra spojitosti c.
(Hearn-Baker 325, Salomon 258).

ZLOŽENÉ BEZIEROVE KRIVKY

Opis krivky zložitého tvaru (s veľkým počtom riadiacich bodov) si vyžaduje Bezierovu krivku vysokého stupňa, čo je nevýhodné najmä z numerických dôvodov a navyše často jednoduchý Bezierov oblúk nespĺňa požiadavky "dobrej" aproximácie riadiaceho polygónu. Riešením môžu byť zložené Bezierove krivky, ktoré sú vytvorené zo segmentov jednoduchých Bezierovych oblúkov, v našom prípade Bezierovych kubík, pri splnení podmienok ich hladkého spojenia – "zošitia".

Nech ${}^0S$ je segment Bezierovej krivky 3° s riadiacimi bodmi ${}^0\mathbf{V}_0, {}^0\mathbf{V}_1, {}^0\mathbf{V}_2, {}^0\mathbf{V}_3$:

$$ {}^0S: \ {}^0\mathbf{b}(t) = \sum_{i=0}^{3} B_{i,3}(t)\, {}^0\mathbf{V}_i \quad t \in \langle 0,1 \rangle . $$

Úlohou je na túto krivku ${}^0S$ hladko napojiť inú Bezierovu krivku 3°:

$$ {}^1S: \ {}^1\mathbf{b}(t) = \sum_{i=0}^{3} B_{i,3}(t)\, {}^1\mathbf{V}_i \quad t \in \langle 0,1 \rangle $$

ktorej riadiace body budú ${}^1\mathbf{V}_0, {}^1\mathbf{V}_1, {}^1\mathbf{V}_2, {}^1\mathbf{V}_3$. Tieto riadiace body ${}^1\mathbf{V}_0, {}^1\mathbf{V}_1, {}^1\mathbf{V}_2, {}^1\mathbf{V}_3$ vyčíslime a to na základe podmienok **geometrickej spojitosti**:

(1°) geometrická spojitosť 0. rádu **G^0-spojitosť** (polohová spojitosť):

$$ {}^1\mathbf{b}(0) = {}^0\mathbf{b}(1) \ \Leftrightarrow \ {}^1\mathbf{V}_0 = {}^0\mathbf{V}_3 $$

(2°) geometrická spojitosť 1.rádu **G^1-spojitosť** (dotyčnicová spojitosť):

$$ {}^1\mathbf{b}'(0) = \beta 1\, {}^0\mathbf{b}'(1),\ \beta 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \ {}^1\mathbf{V}_1 = {}^0\mathbf{V}_3 + \beta 1 ({}^0\mathbf{V}_3 - {}^0\mathbf{V}_2) $$

Bod ${}^1\mathbf{V}_1$ je bodom priamky ${}^0\mathbf{V}_2 {}^0\mathbf{V}_3$.

(3°) geometrická spojitosť 2.rádu **G^2-spojitosť** (krivosťová spojitosť):

$$ {}^1\mathbf{b}''(0) = \beta 1^2\, {}^0\mathbf{b}''(1) + \beta 2\, {}^0\mathbf{b}'(1) \Leftrightarrow $$

$$ {}^1\mathbf{V}_2 = \beta 1^2\, {}^0\mathbf{V}_1 + (-2\beta 1 - 2\beta 1^2 - \frac{1}{2}\beta 2)\, {}^0\mathbf{V}_2 + (1 + 2\beta 1 + \beta 1^2 + \frac{1}{2}\beta 2)\, {}^0\mathbf{V}_3 $$

Riadiaci bod ${}^1\mathbf{V}_2$ je určený pomocou bodov ${}^0\mathbf{V}_1, {}^0\mathbf{V}_2, {}^0\mathbf{V}_3$.

Teda pri zabezpečení geometrickej spojitosti 2.rádu zostáva nám voľba jedného riadiaceho bodu a to ${}^1\mathbf{V}_3$ pre napájaný Bezierov segment ${}^1\mathbf{b}(t)$.

Je pravda, že možnosť voľby parametrov $\beta 1$, $\beta 2$ ponúka modelovať krivku najmä v okolí napojenia dvoch segmentov. Pri praktických aplikáciách sa siaha k "tvrdšej" požiadavke a tou je **parametrická spojitosť** t.j. $\beta 1 = 1$, $\beta 2 = 0$.

(1°°) parametrická spojitosť 0. rádu **C^0-spojitosť** :

$$ {}^1\mathbf{b}(0) = {}^0\mathbf{b}(1) \ \Leftrightarrow \ {}^1\mathbf{V}_0 = {}^0\mathbf{V}_3 $$

(2°°) parametrická spojitosť 1.rádu **C^1-spojitosť** :

$$ {}^1\mathbf{b}'(0) = {}^0\mathbf{b}'(1) \ \Leftrightarrow \ {}^1\mathbf{V}_1 = {}^0\mathbf{V}_3 + ({}^0\mathbf{V}_3 - {}^0\mathbf{V}_2) \ \Leftrightarrow {}^0\mathbf{V}_3 = \frac{1}{2}({}^1\mathbf{V}_1 + {}^0\mathbf{V}_2) $$

Bod ${}^0\mathbf{V}_3$ je stred úsečky ${}^0\mathbf{V}_2 {}^1\mathbf{V}_1$.

(3°°) parametrická spojitosť 2.rádu $\mathbf{C^2}$**-spojitosť** :

$^1\mathbf{b}''(0) = {}^0\mathbf{b}''(1) \Leftrightarrow {}^1\mathbf{V}_2 = {}^0\mathbf{V}_1 + 4({}^0\mathbf{V}_3 - {}^0\mathbf{V}_2)$

Riadiaci bod $^1\mathbf{V}_2$ leží na priamke prechádzajúcej bodom $^0\mathbf{V}_1$ a rovnobežnej s priamkou $^0\mathbf{V}_2{}^0\mathbf{V}_3$.

ČIASTKOVÝ BEZIEROV SPLAJN

Teraz keď poznáme postup vyčísľovania vrcholov riadiacich polygónov pre Bezierove krivky 3°, môžeme prejsť k splajnom, ktoré budú vytvorené zo segmentov Bezierovych kubík.

Splajnová krivka $S=S(u)$ je spojitý obraz systému intervalov definovaných postupnosťou $u_0 < u_1 < .. < u_L$ do priestoru $E(E^2, E^3)$ taký, že každý z intervalov $< u_i, u_{i+1}>$, $i= 0,1,..,L$-1, sa zobrazí na Bezierovu krivku 3°.

Prvky postupnosti $\{u_i\}_{i=0}^{L}$ sú uzly a každej hodnote $u \in \langle u_0, u_L \rangle$ prislúcha bod $S(u)$ na splajne. Parameter u sa nazýva globálny parameter. Okrem globálneho parametra možno bod $S(u)$ opísať aj pomocou lokálneho parametra $t \in <0,1>$ t.j. ku každému $u \in < u_i, u_{i+1}>$ existuje $t \in <0,1>$, ktorý získame $t = \frac{u-u_i}{u_{i+1}-u_i} = \frac{u-u_i}{\Delta_i}$.

Ak pracujeme s celým splajnom, tak je výhodnejšie používať globálny parameter $u \in \langle u_0, u_L \rangle$. Naopak, ak pracujeme len s niektorým jeho segmentom tak je výhodnejšie pracovať s lokálnym parametrom. Budeme používať označenie $\mathbf{s}(u) = {}^i\mathbf{s}(t)$.

Lokálne súradnice sú výhodné pri deriváciách:

1. derivácia $\quad \frac{d\mathbf{s}(u)}{du} = \frac{d\,{}^i\mathbf{s}(t)}{dt}\frac{dt}{du} = \frac{1}{\Delta_i}\frac{d\,{}^i\mathbf{s}(t)}{dt} = \frac{1}{\Delta_i}\,{}^i\mathbf{s}'(t)$

2. derivácia $\quad \frac{d^2\mathbf{s}(u)}{du^2} = (\frac{1}{\Delta_i})^2\ {}^i\mathbf{s}''(t)$

Body $\mathbf{s}(u_{i+1}) = {}^i\mathbf{s}(1) = {}^{i+1}\mathbf{s}(0)$, $i= 0,..,L$-2 , sa nazývajú spojovacie body , krátko spoje na Bezierovom splajne.

Súhrn Bezierovych riadiacich polygónov všetkých segmentov sa nazýva čiastkový Bezierov polygón.

Teraz bude úlohou určiť – vypočítať vrcholy riadiacich polygónov pre každý segment tak, aby v spojoch boli splnené požiadavky na spojitosť výslednej krivky – splajnu.

Nech sú dané dve Bezierove kubiky:

^0S: $^0\mathbf{b}(u) = {}^0\mathbf{b}(\mathbf{V}_0\, \mathbf{V}_1\, \mathbf{V}_2\, \mathbf{V}_3)$, $\quad u \in < u_0, u_1>$

^1S : $^1\mathbf{b}(u) = {}^1\mathbf{b}(\mathbf{V}_3\, \mathbf{V}_4\, \mathbf{V}_5\, \mathbf{V}_6)$, $\quad u \in < u_1, u_2>$, $\quad u_0 < u_1 < u_2$

$\mathbf{C^0}$ **–spojitosť:**

krivka $\mathbf{s}(u) = {}^0S \cup {}^1S$, $u \in < u_0, u_2>$, je v bode $u= u_1$ C^0 spojitá $\Leftrightarrow$

$$^0\mathbf{s}(u)\Big|_{u=u_1} = {}^1\mathbf{s}(u)\Big|_{u=u_1} \Leftrightarrow {}^0\mathbf{s}(t)\Big|_{t=1} = {}^1\mathbf{s}(t)\Big|_{t=0} \Leftrightarrow \mathbf{V}_3 = \mathbf{V}_3$$

$\mathbf{C^1}$ **–spojitosť**:

krivka $\mathbf{s}(u) = {}^0S \cup {}^1S$, $u \in < u_0, u_2>$, je v bode $u= u_1$ C^1 spojitá $\Leftrightarrow$

$$\frac{d\,{}^{0}\mathbf{s}(u)}{du}\bigg|_{u=u_1}=\frac{d\,{}^{1}\mathbf{s}(u)}{du}\bigg|_{u=u_1}\Leftrightarrow\frac{1}{\Delta_0}\,{}^{0}\mathbf{s}'(t)\big|_{t=1}=\frac{1}{\Delta_1}\,{}^{1}\mathbf{s}'(t)\big|_{t=0}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad\frac{1}{\Delta_0}3(\mathbf{V}_3-\mathbf{V}_2)=\frac{1}{\Delta_1}3(\mathbf{V}_4-\mathbf{V}_3)\Leftrightarrow\mathbf{V}_3=\frac{\Delta_1}{\Delta_0+\Delta_1}\mathbf{V}_2+\frac{\Delta_0}{\Delta_0+\Delta_1}\mathbf{V}_4\,.$$

Túto vlastnosť môžeme interpretovať geometricky : riadiace body $\mathbf{V}_2$ $\mathbf{V}_3$ $\mathbf{V}_4$ musia byť kolineárne a musí platiť deliaci pomer: $ratio(\mathbf{V}_2\,\mathbf{V}_3\,\mathbf{V}_4)=\frac{\Delta_0}{\Delta_1}$.

C^2 -spojitosť:

krivka $\mathbf{s}(u)={}^{0}S\cup{}^{1}S$, $u\in<u_0, u_2>$, je v bode $u=u_1$ C^2 spojitá (C^1 +spojitosť 2.derivácie) spojitosť 2.derivácie

$$\frac{d^{2}\,{}^{0}\mathbf{s}(u)}{du^2}\bigg|_{u=u_1}=\frac{d^{2}\,{}^{1}\mathbf{s}(u)}{du^2}\bigg|_{u=u_1}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{\Delta_0}\right)^{2}{}^{0}\mathbf{s}''(t)\big|_{t=1}=\left(\frac{1}{\Delta_1}\right)^{2}{}^{1}\mathbf{s}''(t)\big|_{t=0}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{\Delta_0}\right)^2 3.2(\mathbf{V}_3-2\mathbf{V}_2+\mathbf{V}_1)=\left(\frac{1}{\Delta_1}\right)^2 3.2(\mathbf{V}_3-2\mathbf{V}_4+\mathbf{V}_5)$$

Po algebrických úpravách dostaneme:

$$-\frac{\Delta_1}{\Delta_0}\mathbf{V}_1+\frac{\Delta_0+\Delta_1}{\Delta_0}\mathbf{V}_2=\frac{\Delta_0+\Delta_1}{\Delta_1}\mathbf{V}_4-\frac{\Delta_0}{\Delta_1}\mathbf{V}_5 \qquad \text{(X)}$$

Každá strana vyjadrenia (X) určuje bod. Pre ľavú stranu je to bod $\mathbf{D}_-$ a pravú stranu $\mathbf{D}_+$ t.j.:

$$\mathbf{D}_-=-\frac{\Delta_1}{\Delta_0}\mathbf{V}_1+\frac{\Delta_0+\Delta_1}{\Delta_0}\mathbf{V}_2 \quad \text{a} \quad \mathbf{D}_+=\frac{\Delta_0+\Delta_1}{\Delta_1}\mathbf{V}_4-\frac{\Delta_0}{\Delta_1}\mathbf{V}_5 \qquad \text{(XX)}$$

Podmienka parametrickej spojitosti 2.rádu požaduje $\mathbf{D}_-=\mathbf{D}_+$, ktorý nazveme $\mathbf{D}$ a úpravou (XX) dostaneme

$$\mathbf{V}_2=\frac{\Delta_1}{\Delta_0+\Delta_1}\mathbf{V}_1+\frac{\Delta_0}{\Delta_0+\Delta_1}\mathbf{D} \ \text{ a } \ \mathbf{V}_4=\frac{\Delta_1}{\Delta_0+\Delta_1}\mathbf{D}+\frac{\Delta_0}{\Delta_0+\Delta_1}\mathbf{V}_5\,.$$

Navyše platia deliace pomery: $ratio(\mathbf{V}_1\,\mathbf{V}_2\,\mathbf{D}) = ratio(\mathbf{D}\mathbf{V}_4\,\mathbf{V}_5) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}$.

Teda krivka $\mathbf{s}(u)={}^{0}S\cup{}^{1}S$ je v bode $u=u_1$ C^2 spojitá $\Leftrightarrow$ ak je

1. C^1-spojitá $\Leftrightarrow$ $\mathbf{V}_2$ $\mathbf{V}_3$ $\mathbf{V}_4$ sú kolineárne a $ratio(\mathbf{V}_2\,\mathbf{V}_3\,\mathbf{V}_4)=\frac{\Delta_0}{\Delta_1}$

2. existuje bod $\mathbf{D}$ tak, že platí: $ratio(\mathbf{V}_1\,\mathbf{V}_2\,\mathbf{D}) = ratio(\mathbf{D}\mathbf{V}_4\,\mathbf{V}_5) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}$.