BETA-SPLAJNOVÉ KRIVKY
G^2-SPLAJN

Autor: Brian **BARSKY**: Computer Graphics and Geometric Modeling Using Beta-splines (1988)

Nech je zadaná postupnosť riadiacich $\mathbf{V}_0,...,\mathbf{V}_n$ bodov v priestore E (E^2, E^3).
β-splajnová krivka je po častiach polynomická krivka 3° vytvorená zo segmentov :

$$ {}^{i}\mathbf{q}(\beta 1,\beta 2,t)=\sum_{j=0}^{3}Q_j(\beta 1,\beta 2,t)\mathbf{V}_{i+j},\quad t\in\langle 0,1\rangle, $$

kde zmiešavacie funkcie $Q_j(\beta 1,\beta 2,t),\ j=0,1,2,3$ sú určené tak, aby v spoji dvoch segmentov bola splnená geometrická spojitosť 2.rádu.
Označme dva susedné segmenty:

$$ {}^{i}\mathbf{q}(\beta 1,\beta 2,t)=\sum_{j=0}^{3}Q_j(\beta 1,\beta 2,t)\mathbf{V}_{i+j} \quad \text{a} \quad {}^{i+1}\mathbf{q}(\beta 1,\beta 2,t)=\sum_{j=0}^{3}Q_j(\beta 1,\beta 2,t)\mathbf{V}_{i+j+1}. $$

Každá zmiešavacia funkcia $Q_j(\beta 1,\beta 2,t),\ j=0,1,2,3$ je funkciou $\beta 1$, $\beta 2$ a parametra t:

$$ Q_j(\beta 1,\beta 2,t)=c_{0j}(\beta 1,\beta 2)+c_{1j}(\beta 1,\beta 2)t+c_{2j}(\beta 1,\beta 2)t^2+c_{3j}(\beta 1,\beta 2)t^3, t\in\langle 0,1\rangle,\ j=0,1,2,3, $$

a koeficienty $c_{gj}(\beta 1,\beta 2),\ g=0,1,2,3,\ j=0,1,2,3$, určíme z podmienok geometrickej spojitosti:

- polohová spojitosť **G^0-spojitosť**:

$$ {}^{i+1}\mathbf{q}(\beta 1,\beta 2,0)={}^{i}\mathbf{q}(\beta 1,\beta 2,1) $$

$$ \sum_{j=0}^{3}Q_j(\beta 1,\beta 2,0)\mathbf{V}_{i+j+1}=\sum_{j=0}^{3}Q_j(\beta 1,\beta 2,1)\mathbf{V}_{i+j} $$

- dotyčnicová spojitosť **G^1-spojitosť**:

$$ {}^{i+1}\mathbf{q}'(\beta 1,\beta 2,0)=\beta 1\,{}^{i}\mathbf{q}'(\beta 1,\beta 2,1),\ \beta 1>0 $$

$$ \sum_{j=0}^{3}Q_j'(\beta 1,\beta 2,0)\mathbf{V}_{i+j+1}=\beta 1\sum_{j=0}^{3}Q_j'(\beta 1,\beta 2,1)\mathbf{V}_{i+j},\ \beta 1>0 $$

- krivosťová spojitosť **G^2-spojitosť**:

$$ {}^{i+1}\mathbf{q}''(\beta 1,\beta 2,0)=\beta 1^2\,{}^{i}\mathbf{q}''(\beta 1,\beta 2,1)+\beta 2\,{}^{i}\mathbf{q}'(\beta 1,\beta 2,1) $$

$$ \sum_{j=0}^{3}Q_j''(\beta 1,\beta 2,0)\mathbf{V}_{i+j+1}=\beta 1^2\sum_{j=0}^{3}Q_j''(\beta 1,\beta 2,1)\mathbf{V}_{i+j}+\beta 2\sum_{j=0}^{3}Q_j'(\beta 1,\beta 2,1)\mathbf{V}_{i+j}. $$

Tieto tri podmienky zabezpečia 15 rovníc a doplnením požiadavky:

- rozklad jednotky:

$$ \sum_{j=0}^{3}Q_j(\beta 1,\beta 2,t)=1 $$

získame 16 rovníc pre 16 neznámych $c_{gj}(\beta 1,\beta 2),\ g=0,1,2,3,\ j=0,1,2,3$. Riešením sústavy rovníc sú koeficienty $c_{gj}(\beta 1,\beta 2),\ g=0,1,2,3,\ j=0,1,2,3$ a funkcie $Q_j(\beta 1,\beta 2,t),\ j=0,1,2,3$ môžeme zapísať:

$$ Q_0(\beta 1,\beta 2,t)=\frac{1}{\delta}(2\beta 1^3-6\beta 1^3t+6\beta 1^3t^2-2\beta 1^3t^3) $$

$$ Q_1(\beta 1,\beta 2,t)=\frac{1}{\delta}\left[(4\beta 1^2+4\beta 1+\beta 2)+(6\beta 1^3-6\beta 1)t-3(2\beta 1^3+2\beta 1^2+\beta 2)t^2+2(\beta 1^3+\beta 1^2+\beta 1+\beta 2)t^3\right] $$

$$ Q_2(\beta 1,\beta 2,t)=\frac{1}{\delta}\left[2+6\beta 1t+3(2\beta 1^2+\beta 2)t^2-2(\beta 1^2+\beta 1+\beta 2+1)t^3\right] $$

$Q_3(\beta 1,\beta 2,t)=\frac{1}{\delta}2t^3$, kde $\delta = 2\beta 1^3+4\beta 1^2+4\beta 1+\beta 2+2\neq 0$

Teda *i*- ty segment je opísaný pomocou zmiešavacích funkcií $Q_j(\beta 1,\beta 2,t),\ j=0,1,2,3$ a riadiacich bodov $\mathbf{V}_i\ \mathbf{V}_{i+1}\ \mathbf{V}_{i+2}\ \mathbf{V}_{i+3}$:

$^i\mathbf{q}(\beta 1,\beta 2,t)=Q_0(\beta 1,\beta 2,t)\mathbf{V}_i+Q_1(\beta 1,\beta 2,t)\mathbf{V}_{i+1}+Q_2(\beta 1,\beta 2,t)\mathbf{V}_{i+2}+Q_3(\beta 1,\beta 2,t)\mathbf{V}_{i+3}$.

<u>K maticovému vyjadreniu β-splajnového segmentu</u> použijeme zápis zmiešavacích funkcií pomocou monomiálnej bázy:

$$^i\mathbf{q}(t)=\begin{bmatrix}1 & t & t^2 & t^3\end{bmatrix}.\frac{1}{\delta}\begin{bmatrix}2\beta 1^3 & 4\beta 1^2+4\beta 1+\beta 2 & 2 & 0\\ -6\beta 1^3 & 6\beta 1(\beta 1^2-1) & 6\beta 1 & 0\\ 6\beta 1^3 & -3(2\beta 1^3+2\beta 1^2+\beta 2) & 3(2\beta 1^2+\beta 2) & 0\\ -2\beta 1^3 & 2(\beta 1^3+\beta 1^2+\beta 1+\beta 2) & -2(\beta 1^2+\beta 1+\beta 2+1) & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{V}_i\\ \mathbf{V}_{i+1}\\ \mathbf{V}_{i+2}\\ \mathbf{V}_{i+3}\end{bmatrix}=$$

$= T\,.M_\beta\,.\,G_\beta$

kde matica M_β je maticou koeficientov β-splajnového segmentu a geometrická matica G_β má vstupnú dátovú štvoricu $\mathbf{V}_i\ \mathbf{V}_{i+1}\ \mathbf{V}_{i+2}\ \mathbf{V}_{i+3}$.

Vlastnosti segmentu β-splajnovej krivky:

- <u>Krajné body segmentu</u> $^i\mathbf{q}(\beta 1,\beta 2,t)=\sum_{j=0}^{3}Q_j(\beta 1,\beta 2,t)\mathbf{V}_{i+j}$:

začiatok : $^i\mathbf{q}(\beta 1,\beta 2,0)=\frac{1}{\delta}\left[2\beta 1^3\mathbf{V}_i+(4\beta 1^2+4\beta 1+\beta 2)\mathbf{V}_{i+1}+2\mathbf{V}_{i+2}\right]$

koniec : $^i\mathbf{q}(\beta 1,\beta 2,1)=\frac{1}{\delta}\left[2\beta 1^3\mathbf{V}_{i+1}+(4\beta 1^2+4\beta 1+\beta 2)\mathbf{V}_{i+2}+2\mathbf{V}_{i+3}\right]$

Pre $\beta 1>0$, $\beta 2\geq 0$ sú to vnútorné body trojuholníka $\mathbf{V}_i\ \mathbf{V}_{i+1}\ \mathbf{V}_{i+2}$ a $\mathbf{V}_{i+1}\ \mathbf{V}_{i+2}\ \mathbf{V}_{i+3}$, umiestnenie závisí na hodnotách parametrov $\beta 1$, $\beta 2$.

- <u>Konvexný obal</u>: každá zo zmiešavacích funkcií $Q_j(\beta 1,\beta 2,t),\ j=0,1,2,3$ pre $t\in\langle 0,1\rangle$ a $\beta 1>0$, $\beta 2\geq 0$ nadobúda nezáporné hodnoty a zmiešavacie funkcie tvoria rozklad jednotky, teda bod segmentu je konvexnou kombináciou riadiacich bodov a segment leží v ich konvexnom obale.

Ukončenie β-splajnovej krivky

Pre riadiaci polygón $\mathbf{V}_0,\dots,\mathbf{V}_n$ je β-splajnová krivka vytvorená z *n*-2 segmentov:

$$^0\mathbf{q}(\beta 1,\beta 2,t),\dots,{}^{n-3}\mathbf{q}(\beta 1,\beta 2,t)$$

so začiatkom v bode: $^0\mathbf{q}(\beta 1,\beta 2,0)=\frac{1}{\delta}\left[2\beta 1^3\mathbf{V}_0+(4\beta 1^2+4\beta 1+\beta 2)\mathbf{V}_1+2\mathbf{V}_2\right]$

a posledným bodom $^{n-3}\mathbf{q}(\beta 1,\beta 2,1)=\frac{1}{\delta}\left[2\beta 1^3\mathbf{V}_{n-2}+(4\beta 1^2+4\beta 1+\beta 2)\mathbf{V}_{n-1}+2\mathbf{V}_n\right]$.

Iné ukončenie krivky sa získa pomocou násobných alebo fantómových bodov.

Technika násobných bodov:

- **dvojnásobné body**: pridaný segment ${}^{-1}\mathbf{q}(\beta 1,\beta 2,t)$ má riadiace body $\mathbf{V}_{-1}=\mathbf{V}_0,\mathbf{V}_0,\mathbf{V}_1,\mathbf{V}_2$ a segment ${}^{n-2}\mathbf{q}(\beta 1,\beta 2,t)$ je určený bodmi $\mathbf{V}_{n-2},\mathbf{V}_{n-1},\mathbf{V}_n,\mathbf{V}_n=\mathbf{V}_{n+1}$ a β-splajnová krivka začína v bode ${}^{-1}\mathbf{q}(\beta 1,\beta 2,0)=\mathbf{V}_0+\dfrac{2}{\delta}(\mathbf{V}_1-\mathbf{V}_0)$ a končí v bode ${}^{n-2}\mathbf{q}(\beta 1,\beta 2,1)=\mathbf{V}_n+\dfrac{2\beta 1^3}{\delta}(\mathbf{V}_{n-1}-\mathbf{V}_n)$.
- **trojnásobné body**: pridaný segment ${}^{-2}\mathbf{q}(\beta 1,\beta 2,t)$ má riadiace body $\mathbf{V}_{-2}=\mathbf{V}_{-1}=\mathbf{V}_0,\mathbf{V}_1,$ a segment ${}^{n-1}\mathbf{q}(\beta 1,\beta 2,t)$ je určený bodmi $\mathbf{V}_{n-1},\mathbf{V}_n=\mathbf{V}_{n+1}=\mathbf{V}_{n+2}$, v tomto prípade β-splajnová krivka začína v bode ${}^{-2}\mathbf{q}(\beta 1,\beta 2,0)=\mathbf{V}_0$ a končí v bode ${}^{n-1}\mathbf{q}(\beta 1,\beta 2,1)=\mathbf{V}_n$.

Technika fantómových bodov: využíva doplnenie riadiaceho bodu $\mathbf{V}_{-1}$ na začiatku a bodu $\mathbf{V}_{n+1}$na konci postupnosti riadiacich bodov. Výber okrajových podmienok ovplyvní tvar krivky na prvých a posledných segmentoch.

1. **fixovaný (clamped)** na výber krajných bodov
2. **fixovaný (clamped)** špecifikácia vektora 1.derivácie
3. **prirodzený splajn**

Modelovanie β-splajnových kriviek: geometrický význam tvarovacích parametrov (globálne parametre)

β1-bias, predpätie

Zo vzťahu ${}^{i+1}\mathbf{q}'(\beta 1,\beta 2,0)=\beta 1\,{}^{i}\mathbf{q}'(\beta 1,\beta 2,1)$ vyplýva, že $\beta 1=\dfrac{\left|{}^{i+1}\mathbf{q}'(\beta 1,\beta 2,0)\right|}{\left|{}^{i}\mathbf{q}'(\beta 1,\beta 2,1)\right|}$ t.j. β1 je pomer veľkosti vektorov 1.derivácie susedných segmentov krivky v ich spoji.

- Ak hodnoty $\beta 1>1$, tak (i+1)-vý segment krivky sa priťahuje bližšie k spoločnej dotyčnici ako segment i-ty.
- Pre hodnoty 0< β1<1 je to obrátene.
- Ak β1=1, tak je odklon od dotyčnice v okolí spoja rovnaký.

β2-tension, napätie

Označme spoje krivky $\mathbf{S}_i$ t.j. položíme ${}^{i+1}\mathbf{q}(\beta 1,\beta 2,0)=\mathbf{S}_i={}^{i}\mathbf{q}(\beta 1,\beta 2,1)$

a teda $${}^{i}\mathbf{q}(\beta 1,\beta 2,1)=\frac{1}{\delta}\left[2\beta 1^3\mathbf{V}_{i+1}+(4\beta 1^2+4\beta 1+\beta 2)\mathbf{V}_{i+2}+2\mathbf{V}_{i+3}\right]=\mathbf{S}_i.$$

Predpokladajme, že parameter β1 je konštanta napr. β1=1 a definujme nasledovné parametre: $k:=\delta-\beta 2=2\beta 1^3+4\beta 1^2+4\beta 1+2$ a $\mathbf{K}_i:=2\beta 1^3\mathbf{V}_{i+1}+(4\beta 1^2+4\beta 1)\mathbf{V}_{i+2}+2\mathbf{V}_{i+3}$.

Potom pre spoj $\mathbf{S}_i$ platí: $$\mathbf{S}_i=\frac{1}{k+\beta 2}\left[\mathbf{K}_i+\beta 2\mathbf{V}_{i+2}\right].$$

Určíme vektor $\mathbf{V}_{i+2}\mathbf{S}_i$ t.j. $$\mathbf{S}_i-\mathbf{V}_{i+2}=\frac{1}{k+\beta 2}\left[\mathbf{K}_i+k\mathbf{V}_{i+2}\right].$$

Z tejto rovnosti vyplývajú nasledovné závery:

- Ak $\beta 2>0$, tak $(1/(k+\beta 2)\to 0$ a spoj $\mathbf{S}_i$ sa približuje k „svojmu“ riadiacemu vrcholu $\mathbf{V}_{i+2}$

• Ak $\beta 2 < 0$, tak získame podobný efekt ako pre $\beta 2 > 0$, avšak niektoré zmiešavacie funkcie môžu byť záporné a segment nepadne do konvexného obalu riadiacich bodov a môže mať i sľučku.
• Ak $\beta 2 \to -k$, tak $(1/|k+\beta 2| \to \infty$ a bod $\mathbf{S}_i$ sa odtláča od riadiaceho bodu $\mathbf{V}_{i+2}$.

Všimnime si, že vektor $\mathbf{S}_i - \mathbf{V}_{i+2}$ „v podstate" nezávisí na parametri $\beta 2$, okrem menovateľa $k+\beta 2$. To znamená, že vektor $\mathbf{S}_i - \mathbf{V}_{i+2}$ má smer nezávislý od $\beta 2$. Znamená to, že ak modifikujeme $\beta 2$, tak sa mení iba vzdialenosť medzi bodmi nimi určeného vektora. Teda úprava hodnoty $\beta 2$ v spoji má za následok priťahovanie/odtláčanie tohto spoja od príslušného riadiaceho bodu po spojnici $\mathbf{V}_{i+2}\ \mathbf{S}_i$. Teda parameter $\beta 2$ obstaráva mechanizmus modelovania napnutia β-splajnu. Väčšia hodnota $\beta 2$ určuje priliehavú – napnutú krivku s minimálnym počtom inflexných bodov.

Vyčísľovanie β-splajnových kriviek

Pri vyčísľovaní β-splajnových segmentov ${}^i\mathbf{q}(\beta 1, \beta 2, t) = \sum_{j=0}^{3} Q_j(\beta 1, \beta 2, t)\mathbf{V}_{i+j}$, $t \in \langle 0,1 \rangle$ sa využíva ich prepis na Bezierov kubiky, presnejšie na G^2-spojité zložené Bezierove kubiky – tzv. The Farin-Boehm construction.

Predpokladajme, že máme daný riadiaci polygón určený β-splajnovými riadiacimi bodmi $\mathbf{V}_0, \ldots, \mathbf{V}_n$ a dve skupiny tvarovacích parametrov $\beta\overline{1} = \{\beta 1_0, \beta 1_1, \ldots, \beta 1_n\}$ a $\beta\overline{2} = \{\beta 2_0, \beta 2_1, \ldots, \beta 2_n\}$. Teda neberieme hodnoty $\beta 1$, $\beta 2$ globálne, ale lokálne pre každý segment.

Z týchto dvoch skupín parametrov skonštruujeme postupnosť

$$\gamma_i = \frac{2(1+\beta 1_i)}{\beta 2_i + 2\beta 1_i(1+\beta 1_i)}$$

pre $i = 0,1,\ldots,n$ a z týchto dát vytvoríme dve skupiny Bezierových riadiacich bodov, ktoré opíšeme graficky aj matematicky:

a) na každej strane $\mathbf{V}_i\ \mathbf{V}_{i+1}$, $i = 0,1,\ldots,n-1$, priradíme dva tzv. <u>vnútorné</u> Bezierove body $\mathbf{W}_{i1}$, $\mathbf{W}_{i2}$ (pričom $\mathbf{W}_{01}$, $\mathbf{W}_{n-1,2}$ nebudú nás zaujímať), pre ktoré platí:

$$ratio(\mathbf{V}_i\mathbf{W}_{i1}\mathbf{V}_{i+1}) = \frac{\mathbf{W}_{i1} - \mathbf{V}_i}{\mathbf{V}_{i+1} - \mathbf{W}_{i1}} = \frac{\gamma_i}{1+\beta 1_{i+1}^2 \gamma_{i+1}} \quad \text{a} \quad ratio(\mathbf{V}_i\mathbf{W}_{i2}\mathbf{V}_{i+1}) = \frac{\mathbf{W}_{i2} - \mathbf{V}_i}{\mathbf{V}_{i+1} - \mathbf{W}_{i2}} = \frac{1+\gamma_i}{\beta 1_{i+1}^2 \gamma_{i+1}}$$

Teda môžeme ich vyjadriť:

$$\mathbf{W}_{i1} = \frac{(1+\beta 1_{i+1}^2 \gamma_{i+1})\mathbf{V}_i + \gamma_i \mathbf{V}_{i+1}}{1+\beta 1_{i+1}^2 \gamma_{i+1} + \gamma_i} \quad \text{a} \quad \mathbf{W}_{i2} = \frac{\beta 1_{i+1}^2 \gamma_{i+1} \mathbf{V}_i + (1+\gamma_i)\mathbf{V}_{i+1}}{1+\beta 1_{i+1}^2 \gamma_{i+1} + \gamma_i}, \ i = 0,1,\ldots,n-1.$$

b) na každej strane $\mathbf{W}_{i2}\ \mathbf{W}_{i+1,1}$, $i = 1,\ldots,n-2$, skonštruujeme jeden <u>spojovací</u> Bezierov bod $\mathbf{W}_{i3} = \mathbf{W}_{i+1,0}$ takto:

$$ratio(\mathbf{W}_{i2}\mathbf{W}_{i3}\mathbf{W}_{i+1,1}) = \frac{\mathbf{W}_{i3}-\mathbf{W}_{i2}}{\mathbf{W}_{i+1,1}-\mathbf{W}_{i3}} = \frac{1}{\beta 1_{i+1}} \Leftrightarrow \beta 1_{i+1}(\mathbf{W}_{i3}-\mathbf{W}_{i2}) = (\mathbf{W}_{i+1,1}-\mathbf{W}_{i3})$$

Z toho vyplýva

$$\mathbf{W}_{i3} = \mathbf{W}_{i+1,0} = \frac{1}{1+\beta 1_{i+1}}(\mathbf{W}_{i+1,1} + \beta 1_{i+1}\mathbf{W}_{i2}),\ i = 1,...,n\text{-}2.$$

Spojovacie Bezierove body $\mathbf{W}_{i3}$ = $\mathbf{W}_{i+1,0}$ spolu s vnútornými bodmi $\mathbf{W}_{i1}$, $\mathbf{W}_{i2}$ určia n-2 Bezierovych kriviek ${}^{i}\mathbf{b}(t)$ určených dátovými štvoricami [$\mathbf{W}_{i0}$, $\mathbf{W}_{i1}$, $\mathbf{W}_{i2}$, $\mathbf{W}_{i3}$], i = 0,1,...,n-2, ktoré sú navzájom pospájané spojovacími riadiacimi bodmi $\mathbf{W}_{i0}$, $\mathbf{W}_{i3}$ do C^0 spojitej splajnovej krivky. Ale vieme dokázať, že splajnová krivka je G^2-spojitá a jej segmenty – Bezierove kubiky s riadiacimi bodmi [$\mathbf{W}_{i0}$, $\mathbf{W}_{i1}$, $\mathbf{W}_{i2}$, $\mathbf{W}_{i3}$] vyčíslime Casteljau algoritmom.

Parametre $\beta 1_i$, $\beta 2_i$ sú priradené spojom krivky (body $\mathbf{W}_{i3}$ = $\mathbf{W}_{i+1,0}$) a lokálne ovplyvňujú tvar krivky v okolí spoja (medzi spoje zaraďujeme aj začiatočný a koncový bod riadiaceho polygónu).

Špeciálny prípad lokálnych β-splajnových kriviek sú globálne β-splajnové krivky. Tie dostaneme ak položíme $\beta 1_i = \beta 1$ a $\beta 2_i = \beta 2$, pre všetky i = 0,1,...,n, a to sú β-splajnové krivky, ktorých vytvorenie a modelovanie sme už opísali.