B-SPLAJNOVÉ KRIVKY
C^2-SPLAJN APROXIMAČNÝ

Pri B-splajnových krivkách sa konštruujú oveľa flexibilnejšie, po častiach polynomické funkcie, nazývané B-splajnové funkcie: „B“-basis spline. Je známe, že prvý pracoval s B-splajnovými funkciami **Lobačevskij** (19.stor). V roku 1946 **Schoenberg** využil B-splajnové funkcie k vyhladzovaniu štatistických údajov a odštartoval modernú teóriu aproximácie splajnami. Významnou osobnosťou v teórii B-splajnov bol **Riesenfeld** a praktikom **Carl de Boor** (1972).

B-splajnová krivka je aproximačná krivka vzhľadom na riadiaci polygón. Navyše okrem riadiacich bodov sa pracuje aj s uzlami, ktoré ponúkajú dodatočné modifikácie tvaru krivky.

Kubická B-splajnová krivka

Na úvod o B-splajnových krivkách sa zameriame na konštrukciu B-splajnových kubických kriviek aplikáciou požiadaviek na spojitosť v spoji dvoch segmentov. Základný prístup konštrukcie B-splajnovej krivky ignoruje uzly, neskôr opíšeme konštrukciu uzlov a ich vplyv pri modelovaní B-splajnovej krivky.

Nech $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_n$ je postupnosť vrcholov v riadiacom polygóne. Každý segment kubického splajnu je zviazaný so štyrmi riadiacimi bodmi $\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_{i+1}, \mathbf{V}_{i+2}, \mathbf{V}_{i+3}$ a štyrmi zmiešavacími funkciami $N_{j,3}(t)$:

$$^{i}\mathbf{s}(t) = \sum_{j=0}^{3} N_{j,3}(t)\mathbf{V}_{i+j} \qquad t \in \langle 0,1 \rangle$$

kde $N_{j,3}(t) = a_j + b_j t + c_j t^2 + d_j t^3$, j= 0,1,2,3, sú polynómy 3°.

Koeficienty a_j, b_j, c_j, d_j , j= 0,1,2,3, určíme na základe požiadaviek parametrickej spojitosti v spoji segmentov $^{i}\mathbf{s}(t) = \sum_{j=0}^{3} N_{j,3}(t)\mathbf{V}_{i+j}$ a $^{i+1}\mathbf{s}(t) = \sum_{j=0}^{3} N_{j,3}(t)\mathbf{V}_{i+j+1}$:

- parametrická spojitosť **C^0-spojitosť** :

$$^{i+1}\mathbf{s}(0) = {}^{i}\mathbf{s}(1) \text{ t.j. } \sum_{j=0}^{3} N_{j,3}(0)\mathbf{V}_{i+j+1} = \sum_{j=0}^{3} N_{j,3}(1)\mathbf{V}_{i+j}$$

- parametrická spojitosť **C^1-spojitosť** :

$$^{i+1}\mathbf{s}'(0) = {}^{i}\mathbf{s}'(1) \text{ t.j. } \sum_{j=0}^{3} N_{j,3}'(0)\mathbf{V}_{i+j+1} = \sum_{j=0}^{3} N_{j,3}'(1)\mathbf{V}_{i+j}$$

- parametrická spojitosť **C^2-spojitosť** :

$$^{i+1}\mathbf{s}''(0) = {}^{i}\mathbf{s}''(1) \text{ t.j. } \sum_{j=0}^{3} N_{j,3}''(0)\mathbf{V}_{i+j+1} = \sum_{j=0}^{3} N_{j,3}''(1)\mathbf{V}_{i+j}$$

Z týchto podmienok získame 15 rovníc pre 16 neznámych a_j, b_j, c_j, d_j, *j*= 0,1,2,3. Vieme, že *i*-ty segment $^{i}\mathbf{s}(t) = \sum_{j=0}^{3} N_{j,3}(t)\mathbf{V}_{i+j}$ je zapísaný ako kombinácia bodov a funkcií, pre ktoré musí platiť

- rozklad jednotky: $\sum_{j=0}^{3} N_{j,3}(t) = 1$, čím získame 16. rovnicu.

Riešením sú koeficienty a_j, b_j, c_j, d_j, *j*= 0,1,2,3:

a_0=1/6 b_0= - 1/2 c_0= 1/2 d_0= -1/6; a_1=2/3 b_1= 0 c_1= -1 d_1= 1/2

a_2=1/6 b_2= 1/2 c_2= 1/2 d_2= -1/2; a_3=0 b_3= 0 c_3= 0 d_3= 1/6.

Zmiešavacie funkcie: $N_{03}(t) = \frac{1}{6}(1 - 3t + 3t^2 - t^3)$ $N_{13}(t) = \frac{1}{6}(4 - 6t^2 + 3t^3)$

$$N_{23}(t) = \frac{1}{6}(1 + 3t + 3t^2 - 3t^3) \qquad N_{33}(t) = \frac{1}{6}t^3.$$

Ich zápis v monomiálnej báze:

$$\begin{bmatrix} N_{03}(t) & N_{13}(t) & N_{23}(t) & N_{33}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

K maticovému vyjadreniu B-splajnovej krivky použijeme zápis:

$$^{i}\mathbf{s}(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_i \\ \mathbf{V}_{i+1} \\ \mathbf{V}_{i+2} \\ \mathbf{V}_{i+3} \end{bmatrix} = T \,.\, M_{BS} \,.\, G_{BS}$$

Kde matica M_{BS} je maticou koeficientov B-splajnovej krivky 3°.

Vlastnosti segmentu: $^{i}\mathbf{s}(t) = \sum_{j=0}^{3} N_{j,3}(t)\mathbf{V}_{i+j} \quad t \in \langle 0,1 \rangle$

- Krajné body segmentu :

  začiatok: $^{i}\mathbf{s}(0) = \frac{1}{6}(\mathbf{V}_i + 4\mathbf{V}_{i+1} + \mathbf{V}_{i+2}) = \mathbf{V}_{i+1} + \frac{1}{3}(\frac{\mathbf{V}_i + \mathbf{V}_{i+2}}{2} - \mathbf{V}_{i+1})$ a je antiťažisko trojuholníka V_i V_{i+1} V_{i+2}

  koniec: $^{i}\mathbf{s}(1) = \mathbf{V}_{i+2} + \frac{1}{3}(\frac{\mathbf{V}_{i+1} + \mathbf{V}_{i+3}}{2} - \mathbf{V}_{i+2})$ a je antiťažisko trojuholníka V_{i+1} V_{i+2} V_{i+3},

- Vektor 1.derivácie segmentu: $^{i}\mathbf{s}'(t) = \sum_{j}^{3} N'_{j,3}(t)\ \mathbf{V}_{i+j}$

začiatok: ${}^{i}\mathbf{s}'(0)=\frac{1}{2}\left(\mathbf{V}_{i+2}-\mathbf{V}_{i}\right)$ a je rovnobežný so spojnicou bodov $\mathbf{V}_i\mathbf{V}_{i+2}$

koniec: ${}^{i}\mathbf{s}'(1)=\frac{1}{2}\left(\mathbf{V}_{i+3}-\mathbf{V}_{i+1}\right)$ a je rovnobežný so spojnicou bodov $\mathbf{V}_{i+1}\mathbf{V}_{i+3}$.

- <u>Vektor 2.derivácie segmentu</u>: ${}^{i}\mathbf{s}''(t)=\sum_{j}^{3} N''_{j,3}(t)\,\mathbf{V}_{i+j}$

začiatok: ${}^{i}\mathbf{s}''(0)=\left(\mathbf{V}_i-2\mathbf{V}_{i+1}+\mathbf{V}_{i+2}\right)=\left(\mathbf{V}_i-\mathbf{V}_{i+1}\right)+\left(\mathbf{V}_{i+2}-\mathbf{V}_{i+1}\right)$ výsledkom je rovnobežník $\mathbf{V}_i\,\mathbf{V}_{i+1}\mathbf{V}_{i+2}\,\mathbf{V}$, ktorého uhlopriečky sa rozpoľujú a teda vektor 2.derivácie má umiestnenie ako vektor $\mathbf{V}_{i+1}\,\mathbf{V}_M$, $\mathbf{V}_M$ stred $\mathbf{V}_i\,\mathbf{V}_{i+2}$

koniec: ${}^{i}\mathbf{s}''(1)=\left(\mathbf{V}_{i+1}-2\mathbf{V}_{i+2}+\mathbf{V}_{i+3}\right)=\left(\mathbf{V}_{i+1}-\mathbf{V}_{i+2}\right)+\left(\mathbf{V}_{i+3}-\mathbf{V}_{i+2}\right)$ výsledkom je rovnobežník $\mathbf{V}_{i+1}\mathbf{V}_{i+2}\mathbf{V}_{i+3}\mathbf{W}$, ktorého uhlopriečky sa rozpoľujú a vektor 2.derivácie má umiestnenie ako vektor $\mathbf{V}_{i+2}\,\mathbf{V}_N$, $\mathbf{V}_N$ stred $\mathbf{V}_{i+1}\mathbf{V}_{i+3}$

B-splajnové krivky

Nech $\mathbf{V}_0,\mathbf{V}_1,\ \dots,\mathbf{V}_n$ je postupnosť vrcholov v riadiacom polygóne a funkcie $N_{i,p}(u)$ sú B-splajnové funkcie stupňa p, $u\in\langle a,b\rangle$ definované na uzlovom vektore $U=\{u_0,\ \dots,u_m;\ u_i\le u_{i+1}, m=n+p+1\}$. Potom množina bodov v priestore E definovaná predpisom

$$\mathbf{s}(u)=\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u)\mathbf{V}_i \qquad\qquad u\in\langle a,b\rangle$$

je B-splajnová krivka stupňa p.

B-splajnové funkcie $N_{i,p}(u)$

Je niekoľko spôsobov ako definovať B-splajnové funkcie. Uvedieme rekurentný predpis, ktorý v roku 1972 zaviedli Cox a de Boor.

<u>Dané:</u>

- p- stupeň (rád = stupeň + 1 = p+1), $p\in N$ - všetky uvažované funkcie sú stupňa $\le p$
- $\langle a,b\rangle$ - interval, $a<b$, definičný obor splajnových funkcií
- m – prirodzené číslo a neklesajúca postupnosť reálnych čísel $u_0\le u_1\le\ \dots\ \le u_m$; u_i – uzly ; $i=0,1,\ \dots,m$

B-splajnová funkcia $N_{i,p}(u)$, $i\in\{0,1,\ \dots,n\}$ stupňa p pre uzlový vektor $U=\{u_0,\ \dots,u_m\}$ je definovaná Cox – de Boor rekurzívne:

$$N_{i,0}(u)=\begin{cases}1 & \text{ak } u\in\langle u_i,u_{i+1})\\ 0 & \text{ináč}\end{cases}$$

$$N_{i,p}(u)=\frac{u-u_i}{u_{i+p}-u_i}N_{i,p-1}(u)+\frac{u_{i+p+1}-u}{u_{i+p+1}-u_{i+1}}N_{i+1,p-1}(u) \qquad\qquad u\in\langle u_i,u_{i+p+1})$$

- $N_{i,0}(u)$ - stupňa 0, je skoková funkcia, ktorej hodnoty sú 0, okrem polootvoreného intervalu $u \in \langle u_i, u_{i+1})$

- $p > 0$, $N_{i,p}(u)$ je lineárna kombinácia dvoch funkcií stupňa *p*-1: $N_{i,p-1}(u)$ a $N_{i+1,p-1}(u)$

Vlastnosti B-splajnových funkcií

1. pozitívnosť: $N_{i,p}(u) > 0$, pre $u \in \langle u_i, u_{i+p+1})$
2. lokálny nosič: $N_{i,p}(u) = 0$, pre $u \notin \langle u_i, u_{i+p+1} \rangle$
3. čiastkové polynomické funkcie: $N_{i,p}(u)$ sú čiastkové polynomické funkcie vytvorené z (*p*+1) polynómov stupňa *p*.
4. rozklad jednotky: pre každé $u \in \langle u_i, u_{i+1})$: $\sum_{j=i-p}^{i} N_{j,p}(u) = 1$
5. spojitosť: ak vnútorný uzol u_i má násobnosť k_i, tak funkcia $N_{i,p}(u)$ je v bode $u = u_i$ C^{p-k_i} spojitá a všade inde je C^∞ spojitá (len mimo uzlov).

6. vyjadrenie B-splajnových funkcií v monomiálnej báze:

$t \in \langle 0,1 \rangle$ - lokálny parameter $\quad t = \dfrac{u - u_i}{u_{i+1} - u_i}$ - reparametrizácia

$p = 0 \qquad N_{i0}(t) = 1$

$p = 1 \qquad N_{i-1,1}(u) \rightarrow N_{01}(t) = 1 - t$

$\qquad\qquad N_{i,1}(u) \rightarrow N_{11}(t) = t$

$p = 2 \qquad N_{i-2,2}(u) \rightarrow N_{02}(t) = \dfrac{1}{2}(1 - 2t + t^2)$

$\qquad\qquad N_{i-1,2}(u) \rightarrow N_{12}(t) = \dfrac{1}{2}(1 + 2t - 2t^2)$

$\qquad\qquad N_{i,2}(u) \rightarrow N_{22}(t) = \dfrac{1}{2}t^2$

$p = 3 \qquad N_{i-3,3}(u) \rightarrow N_{03}(t)$

$\qquad\qquad N_{i-2,3}(u) \rightarrow N_{13}(t)$

$\qquad\qquad N_{i-1,3}(u) \rightarrow N_{23}(t)$

$\qquad\qquad N_{i,3}(u) \rightarrow N_{33}(t)$

7. uzlový vektor – pre následné modelovanie kriviek je dôležité pochopiť význam násobných uzlov; číslo k_i - **násobnosť uzla** u_i, koľkokrát sa hodnota uzla u_i vyskytuje v uzlovej postupnosti

$k_i = 1$ jednoduchý, jednonásobný uzol

$k_i = p + 1$ maximálna násobnosť uzla

vlastnosti B-splajnovej funkcie na násobných uzloch:

$k_i \rightarrow p + 1$ redukuje sa dĺžka nosiča

B-splajnová funkcia stupňa p je na k_i-násobných uzloch C^{p-k_i} spojite diferencovateľná (násobnosť uzla znižuje spojitosť B-splajnovej funkcie)

Pri uzlovom vektore $\{u_0, \ ... \ , u_m\}$ budeme hovoriť, že je **rovnomerný** (**uniform**), t.j. existuje reálne číslo $d = u_{i+1} - u_i$ pre všetky $p \le i \le m - p - 1$.

V ostatných prípadoch – **nerovnomerný** (**nonuniform**).

B-splajnové krivky stupňa *p*

B-splajnová krivka stupňa p určená riadiacimi bodmi $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \ ... \ , \mathbf{V}_n$ (resp. riadiacim polygónom $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \ ... \ , \mathbf{V}_n$) a uzlovým vektorom $U = \{u_0, \ ... \ , u_m; \ u_i \le u_{i+1}, m = n + p + 1\}$ je definovaná predpisom:

$$\mathbf{s}(u) = \sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u)\mathbf{V}_i \qquad\qquad u \in \langle a, b \rangle$$

kde $N_{i,p}(u)$ - B-splajnové funkcie stupňa p definované na uzlovom vektore U.

Je zrejmé, že ak $\mathbf{V}_i = [x_i, y_i, z_i], \ i = 0, 1, \ ... \ , n$, tak

$$\mathbf{s}(u) = \sum_{i=0}^{n} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} N_{i,p}(u) = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n} x_i N_{i,p}(u) \\ \sum_{i=0}^{n} y_i N_{i,p}(u) \\ \sum_{i=0}^{n} z_i N_{i,p}(u) \end{pmatrix}$$

a teda: $x(u) = \sum_{i=0}^{n} x_i N_{i,p}(u), y(u) = \sum_{i=0}^{n} y_i N_{i,p}(u), \ z(u) = \sum_{i=0}^{n} z_i N_{i,p}(u)$ je parametrické vyjadrenie B-splajnovej krivky stupňa p.

Vlastnosti *i*-teho segmentu ${}^{i}\mathbf{s}(u)$ stupňa p, $u \in \langle u_i, u_{i+1})$ pre stupeň p = 1, 2, 3, … :

- p = 1

$${}^{i}\mathbf{s}(u) = \begin{bmatrix} N_{i-1,1}(u) & N_{i,1}(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_i \\ \mathbf{V}_{i+1} \end{bmatrix}$$

$${}^{i}\mathbf{s}(t) = \begin{bmatrix} N_{0,1}(t) & N_{1,1}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_i \\ \mathbf{V}_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-t & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_i \\ \mathbf{V}_{i+1} \end{bmatrix} = (1-t)\mathbf{V}_i + t\mathbf{V}_{i+1} \qquad t \in \langle 0, 1 \rangle$$

Segment ${}^{i}\mathbf{s}(u)$ stupňa p=1 je úsečka $\mathbf{V}_i\mathbf{V}_{i+1}$.

- p = 2

$${}^{i}\mathbf{s}(u) = \begin{bmatrix} N_{i-2,2}(u) & N_{i-1,2}(u) & N_{i,2}(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_i \\ \mathbf{V}_{i+1} \\ \mathbf{V}_{i+2} \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} u \in \langle u_i, u_{i+1} \rangle \\ t \in \langle 0, 1 \rangle \end{matrix}$$

$${}^{i}\mathbf{s}(t) = \begin{bmatrix} N_{0,2}(t) & N_{1,2}(t) & N_{2,2}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_i \\ \mathbf{V}_{i+1} \\ \mathbf{V}_{i+2} \end{bmatrix} = N_{0,2}(t)\mathbf{V}_i + N_{1,2}(t)\mathbf{V}_{i+1} + N_{2,2}(t)\mathbf{V}_{i+2}$$

Krajné body segmentu $^i\mathbf{s}(t) = \sum_{j=0}^{2} N_{j,2}(t)\mathbf{V}_{i+j} \quad t \in \langle 0,1 \rangle$

začiatok : $^i\mathbf{s}(0) = \frac{1}{2}(\mathbf{V}_i + \mathbf{V}_{i+1})$

koniec : $^i\mathbf{s}(1) = \frac{1}{2}(\mathbf{V}_{i+1} + \mathbf{V}_{i+2})$

Vektor prvej derivácie: $^i\mathbf{s}'(t) = [0\ 1\ 2t]\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{V}_i \\ \mathbf{V}_{i+1} \\ \mathbf{V}_{i+2} \end{bmatrix}$

začiatok : $^i\mathbf{s}'(0) = \mathbf{V}_{i+1} - \mathbf{V}_i$

koniec: $^i\mathbf{s}'(1) = \mathbf{V}_{i+2} - \mathbf{V}_{i+1}$

- $p = 3$ $\quad ^i\mathbf{s}(u) = \left[N_{i-3,3}(u)\ N_{i-2,3}(u)\ N_{i-1,3}(u)\ N_{i,3}(u) \right]\begin{bmatrix} \mathbf{V}_i \\ \mathbf{V}_{i+1} \\ \mathbf{V}_{i+2} \\ \mathbf{V}_{i+3} \end{bmatrix}$

Teda, ako sme uviedli, B-splajnová krivka stupňa *p*, je vytvorená zo segmentov $^i\mathbf{s}(u)$ stupňa *p*.

B-splajnové krivky- konštrukcia

I. Nech $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \ ... \ , \mathbf{V}_n$ je postupnosť vrcholov v riadiacom polygóne . B-splajnová krivka stupňa *p*, má uzlový vektor $U = \{u_0, \ ... \ , u_m\}, m = n + p + 1$.

A. U - **rovnomerný (uniform)** $d = u_{i+1} - u_i$

Počet segmentov: $^i\mathbf{s}(u)$ stupňa *p*, $u \in \langle u_i, u_{i+1})$, je n - p+1 a maximálny stupeň $p = n$

B. U – **nerovnomerný, násobné uzly** :

Počet segmentov: $^i\mathbf{s}(u)$ stupňa *p*, $u \in \langle u_i, u_{i+1})$ sa zníži, maximálna násobnosť uzla $k_i = p+1$

Spojitosť segmentov v bode napojenia je C^{p-k_i}

C. U – **neperiodický** (clamped,otvorený): krajné uzly s maximálnou násobnosťou uzla $u_0 = ... = u_p$; $u_{m-p} = ... = u_m$

Začiatok B-splajnovej krivky $\quad \mathbf{s}(u_p) = \sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u_p)\mathbf{V}_i = \mathbf{V}_0$

koniec B-splajnovej krivky $\quad \mathbf{s}(u_{m-p}) = \sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u_{m-p})\mathbf{V}_i = \mathbf{V}_n$

Derivácie na začiatku B-splajnovej krivky $\mathbf{s}'(u_p) = \frac{p}{u_{p+1} - u_1}(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0)$

na konci B-splajnovej krivky $\mathbf{s}'\left(u_{m-p}\right)=\dfrac{p}{u_{m-1}-u_{m-p-1}}\left(\mathbf{V}_n-\mathbf{V}_{n-1}\right)$

B-splajnová krivka stupňa p $\mathbf{s}(u)=\bigcup_i {}^i\mathbf{s}\left(u\right)$, $u\in\left\langle a,b\right\rangle$ má nasledujúce vlastnosti:

1° <u>definičný obor</u> funkcií (kriviek) – interval $D_f=\left\langle a,b\right\rangle=\left\langle u_p,u_{m-p}\right\rangle$

2° <u>lokálne riadenie:</u> segment krivky definovaný na intervale $\left\langle u_r,u_{r+1}\right)$, $p\le r\le m-p-1$ je určený (len) riadiacimi bodmi $\mathbf{V}_{r-p},\ldots,\mathbf{V}_r$.

3° <u>konvexný obal:</u> Ak $u\in\left\langle u_r,u_{r+1}\right\rangle$ a $p\le r\le m-p-1$, tak ${}^r\mathbf{s}(u)\in KO\left[\mathbf{V}_{r-p},\ \ldots,\mathbf{V}_r\right]$

4° <u>spojitosť:</u> Ak k_i je násobnosť uzla $u=u_i$, tak $\mathbf{s}(u)$ je C^{p-k_i} spojitá v $u=u_i$ a C^∞ spojitá mimo uzlov

5° <u>invariantnosť</u> vzhľadom na afinné transformácie: $T\left(\sum_{i=0}^{n}N_{i,p}(u)\mathbf{V}_i\right)=\sum_{i=0}^{n}N_{i,p}(u)T\left(\mathbf{V}_i\right)$

Ďalšie možnosti konštrukcie a modifikácie tvaru B-splajnovej krivky

II. Násobné vrcholy

III. Fantómové vrcholy

IV. Kolineárnosť riadiacich bodov

V. Periodické B-splajnové krivky

<u>Vyčísľovanie B-spajnových kriviek.</u>

A. **De Boorov algoritmus**

Podobne ako u Bezierových kriviek sa nezaobídeme bez dobrého algoritmu na vyčíslovanie bodov B-splajnovej krivky. Výpočet bodov na B-splajnovej krivke môžeme zrealizovať metódou známou ako <u>de Boorov algoritmus</u> .

Práve tak, ako Casteljau algoritmus pre Bezierove krivky využíva rekurzívny predpis pre Bernsteinove polynómy aj de Boorov algoritmus sa opiera o rekurziu B-splajnových funkcií:

$$N_{i,p}(u)=\frac{u-u_i}{u_{i+p}-u_i}N_{i,p-1}(u)\ +\ \frac{u_{i+p+1}-u}{u_{i+p+1}-u_{i+1}}N_{i+1,p-1}(u)\,.$$

Podobne ako CA algoritmus aj de Boorov algoritmus možno používať <u>iba</u> na vyčísľovanie polynomických segmentov. Teda B-splajnová krivka $\mathbf{s}(u)$ sa bude de Boorovým algoritmom vyčísľovať <u>po svojich segmentoch</u> $\mathbf{s}(u)$ pre $\left\{u_0,\ \ldots,u_m\right\}$:

$$\mathbf{s}(u)=\sum_{i=r-p}^{r}\mathbf{V}_iN_{i,p}(u)=\ldots$$

$$=\sum_{i=r-p+1}^{r}(\mathbf{V}_i\frac{u-u_i}{u_{i+p}-u_i}\ +\ \mathbf{V}_{i-1}\frac{u_{i+p}-u}{u_{i+p}-u_i})N_{i,p-1}(u)=\sum_{i=r-p+1}^{r}\mathbf{V}_i^{(1)}N_{i,p-1}(u)$$

De Boorov algoritmus pre B-splajnovú krivku st. *p*

Vstup: riadiace body $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \ldots \mathbf{V}_n$, $u \in \langle a, b \rangle$

1. Určíme prirodzené číslo $r : u \in \langle u_r, u_{r+1})$
2. Položíme: $\mathbf{V}_i^0(u) = \mathbf{V}_i, \quad i = r-p, \ldots, r$

:

$$\mathbf{V}_i^j(u) = \left[1 - \alpha_i^j(u)\right] \mathbf{V}_{i-1}^{j-1}(u) + \alpha_i^j(u) \mathbf{V}_i^{j-1}(u),$$

j.

kde $\alpha_i^j(u) = \dfrac{u - u_i}{u_{i+p+1-j} - u_i}$, $j = 0, 1, \ldots p; \quad i = r - p + j, \ldots, r$

:

$p^\circ : \mathbf{s}(u) = \mathbf{V}_r^p(u)$ - bod krivky prislúchajúci parametru u .

B. **Boehmov algoritmus** - vkladanie uzla, zjemňovanie uzlového vektora.

Vloženie nového uzla do uzlovej postupnosti B-splajnovej krivky $\mathbf{s}(u)$ je operácia určenia novej reprezentácie tejto krivky na zjemnenom – rozšírenom uzlovom vektore (o ten vložený uzol) a tomu odpovedajúcom – zjemnenom riadiacom polygóne (o jeden vrchol viac ako pôvodný polygón).

Nech $\mathbf{s}(u) = \sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u) \mathbf{V}_i$ je B-splajnová krivka s uzlovým vektorom $\{u_0, \ldots, u_m\}$ a nech $\hat{u} \in \langle u_s, u_{s+1})$. Potom reprezentácia krivky $\mathbf{s}(u)$ na novom uzlovom vektore $\{u_0, \ldots, u_s, \hat{u}, u_{s+1}, \ldots, u_m\}$ je daná vzťahom: $\mathbf{s}(u) = \sum_{i=0}^{n+1} \hat{N}_{i,p}(u) \hat{\mathbf{V}}_i$ kde

$$\hat{\mathbf{V}}_i = \begin{cases} \mathbf{V}_i & 0 \le i < s - p \\ (1-\alpha_i)\mathbf{V}_{i-1} + \alpha_i \mathbf{V}_i & s - p + 1 \le i \le s \\ \mathbf{V}_{i-1} & s + 1 \le i < n + 1 \end{cases} \quad \text{a} \quad \alpha_i(u) = \frac{\hat{u} - u_i}{u_{i+p} - u_i} = \frac{\hat{u} - \hat{u}_i}{\hat{u}_{i+p+1} - \hat{u}_i} \quad .$$