KONŠTRUKCIA RACIONÁLNYCH KRIVIEK

Doteraz sme pracovali s bodom **A** z priestoru E^2 resp. E^3, ktorý mal afinné súradnice (x, y) resp. (x, y, z) a teda aj bod na krivke $\mathbf{r}(t)$ sme opísali pomocou dvoch $x(t)$, $y(t)$ resp. troch $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ parametrických vyjadrení.

Pre zvýšenie možnosti modelovania kriviek sa zavádzajú pre bod reprezentovaný afinnými súradnicami jeho rozšírené afinné súradnice:

$(x, y) \to (X, Y, W)$ kde $x = \dfrac{X}{W},\quad y = \dfrac{Y}{W}$ resp. $(x, y, z) \to (X,Y,Z,W)$ kde $x = \dfrac{X}{W},\quad y = \dfrac{Y}{W},\quad z = \dfrac{Z}{W}$.

Táto algebrická konštrukcia sa vizualizuje ako stredový priemet bodu do nadroviny s rovnicou $W = 1$, kde stred premietania je začiatok súradnicovej sústavy $OXYW$ resp. $OXYZW$.

V súlade s touto konštrukciou budeme riadiacim bodom $\mathbf{V}_i$, $i = 0,...,n$, pridávať ich váhy w_i, $i = 0,...,n$, t.j.

$$\mathbf{V}_i^w = (w_i X_i, w_i Y_i, w_i) = (w_i \mathbf{V}_i, w_i) \text{ resp. } \mathbf{V}_i^w = (w_i X_i, w_i Y_i, w_i Z_i, w_i) = (w_i \mathbf{V}_i, w_i)\,.$$

Krivky sme vytvárali ako kombinácie riadiacich bodov $\mathbf{V}_i$, $i = 0,...,n$, a zmiešavacích funkcií $T_i(t)$, $i = 0,...,n$, v priestore E (E^2, E^3).

Teraz opíšeme krivku v priestore E^4 nasledovne:

$$\mathbf{r}^w(t) = \mathbf{R}(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{V}_i^w T_i(t)\,,$$

čo rozpíšeme pomocou súradníc:

$$X(t) = \sum_{i=0}^{n} w_i X_i T_i(t)\,, Y(t) = \sum_{i=0}^{n} w_i Y_i T_i(t)\,, Z(t) = \sum_{i=0}^{n} w_i Z_i T_i(t)\,, W(t) = \sum_{i=0}^{n} w_i T_i(t)\,.$$

Tak ako pri konštrukcii bodu sme určili jeho stredový priemet do nadroviny s rovnicou $W = 1$, to urobíme aj s „celou“ krivkou $\mathbf{R}(t)$ t.j. s každým jej bodom:

$$x(t) = \frac{X(t)}{W(t)} = \frac{\sum_{i=0}^{n} w_i X_i T_i(t)}{\sum_{i=0}^{n} w_i T_i(t)},\quad y(t) = \frac{Y(t)}{W(t)} = \frac{\sum_{i=0}^{n} w_i Y_i T_i(t)}{\sum_{i=0}^{n} w_i T_i(t)},\quad z(t) = \frac{Z(t)}{W(t)} = \frac{\sum_{i=0}^{n} w_i Z_i T_i(t)}{\sum_{i=0}^{n} w_i T_i(t)}\,,$$

čo môžeme zapísať:

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\mathbf{R}(t)}{W(t)} = \frac{\sum_{i=0}^{n} w_i \mathbf{V}_i T_i(t)}{\sum_{i=0}^{n} w_i T_i(t)} = \frac{T_0(t) w_0}{\sum_{i=0}^{n} w_i T_i(t)} \mathbf{V}_0 + \frac{T_1(t) w_1}{\sum_{i=0}^{n} w_i T_i(t)} \mathbf{V}_1 + ... + \frac{T_n(t) w_n}{\sum_{i=0}^{n} w_i T_i(t)} \mathbf{V}_n =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} R_i(t) \mathbf{V}_i \quad \text{kde} \quad R_i(t) = \frac{T_i(t) w_i}{\sum_{i=0}^{n} w_i T_i(t)}\,.$$

Krivka $\mathbf{r}(t)$ je určená pomocou racionálnych polynómov t.j. algebrického podielu dvoch polynomických funkcií $\mathbf{R}(t)$ a $W(t)$. Polynómy $R_i(t)$ sú racionálne, preto názov <u>racionálne rozšírenie kriviek – racionálne krivky.</u> Pri vizualizácii teda môžeme považovať racionálnu krivku, že je stredový priemet neracionálnej - celistvej (integral) krivky $\mathbf{R}(t)$ do nadroviny s rovnicou $W = 1$.

Racionálne Bezierove krivky $n°$

Dané sú riadiace body $\mathbf{V}_i$,i = 0,...,n, $\mathbf{V}_i(x_i, y_i, z_i)$ a ich váhy w_i, $w_i > 0$, i= 0,...,n, teda ich rozšírené afinné súradnice: $\mathbf{V}_i^w = (w_i x_i, w_i y_i, w_i z_i, w_i) = (w_i \mathbf{V}_i, w_i)$.

Racionálna Bezierova krivka je určená predpisom:

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n} w_i \mathbf{V}_i B_{in}(t)}{\sum_{i=0}^{n} w_i B_{in}(t)} = \sum_{i=0}^{n} R_{in}(t)\mathbf{V}_i \quad \text{kde} \quad R_{in}(t) = \frac{B_{in}(t) w_i}{\sum_{i=0}^{n} w_i B_{in}(t)}$$

sú racionálne polynómy a funkcie $B_{in}(t)$ sú Bernsteinove polynómy $n°$.

Vlastnosti racionálnych funkcií $R_{in}(t)$

- nezápornosť : $R_{in}(t) \geq 0$, pre všetky i, n, $t \in \langle 0,1\rangle$, ak $w_i > 0$
- rozklad jednotky: $\sum_{i=0}^{n} R_{in}(t) = 1, \quad t \in \langle 0,1\rangle$
- $R_{0n}(0) = 1, \quad R_{in}(0) = 0$ pre $i = 1,...,n$ $\qquad R_{nn}(1) = 1 \quad R_{in}(1) = 0$ pre $i = 0,...,n-1$
- $R_{in}(t)$ má jedno maximum na intervale $\langle 0,1\rangle$
- $w_i = 1, \quad i = 0,...,n$, tak $R_{in}(t) = B_{in}(t)$ t.j. Bernsteinove polynómy sú špeciálny prípad racionálnych zmiešavacích funkcií $R_{in}(t)$.

Vlastnosti racionálnej Bezierovej krivky

- vlastnosť konvexného obalu:

  ak $w_i > 0$, i= 0,...,n, tak $\mathbf{r}(t) \in KO[\mathbf{V}_0, ..., \mathbf{V}_n]$
- invariantnosť vzhľadom na afinné transformácie:

$$T\left(\frac{\sum_{i=0}^{n} B_{in}(t) w_i \mathbf{V}_i}{\sum_{i=0}^{n} B_{in}(t) w_i}\right) = \frac{\sum_{i=0}^{n} B_{in}(t) w_i T(\mathbf{V}_i)}{\sum_{i=0}^{n} B_{in}(t) w_i}$$

- interpolácia krajných riadiacich bodov riadiaceho polygónu:

$$\mathbf{r}(0) = \frac{\mathbf{R}(0)}{W(0)} = \frac{w_0 \mathbf{V}_0}{w_0} = \mathbf{V}_0 \qquad \mathbf{r}(1) = \frac{\mathbf{R}(1)}{W(1)} = \frac{w_n \mathbf{V}_n}{w_n} = \mathbf{V}_n$$

- vektor 1.derivácie, vektor dotyčnice:

$$[\mathbf{r}(t)]' = \left[\frac{\mathbf{R}(t)}{W(t)}\right]' = \frac{\mathbf{R}'(t)}{W(t)} - \mathbf{r}(t)\frac{W'(t)}{W(t)}$$

V krajných bodoch:

začiatok: $\mathbf{r}'(0) = n\dfrac{w_1}{w_0}(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0)$

koniec: $\mathbf{r}'(1) = n\dfrac{w_{n-1}}{w_n}(\mathbf{V}_n - \mathbf{V}_{n-1})$.

Racionálne Bezierove kubiky n = 3

Dané sú riadiace body $\mathbf{V}_i$,i = 0,1,2,3 a ich váhy w_i, $w_i > 0$, i = 0,1,2,3.

Racionálna Bezierova kubika je určená:

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\sum_{i=0}^{3} w_i \mathbf{V}_i B_{i3}(t)}{\sum_{i=0}^{3} w_i B_{i3}(t)} = \sum_{i=0}^{3} R_{i3}(t)\mathbf{V}_i ,$$

pre ktorú $\mathbf{r}(0) = \mathbf{V}_0$, $\mathbf{r}(1) = \mathbf{V}_3$ a $\mathbf{r}'(0) = 3\dfrac{w_1}{w_0}(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0)$, $\mathbf{r}'(1) = 3\dfrac{w_2}{w_3}(\mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_2)$.

Váhy w_i, $w_i > 0$, i = 0,1,2,3, reprezentujú tvarovací parameter.

Racionálne Bezierove kvadratické krivky n = 2

Dané sú riadiace body $\mathbf{V}_i$,i = 0,1,2 , a ich váhy w_i, i = 0,1,2.
Racionálna Bezierova kvadratická krivka je určená:

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\sum_{i=0}^{2} w_i \mathbf{V}_i B_{i2}(t)}{\sum_{i=0}^{2} w_i B_{i2}(t)} = \frac{(1-t)^2 w_0 \mathbf{V}_0 + 2t(1-t)w_1\mathbf{V}_1 + t^2 w_2 \mathbf{V}_2}{(1-t)^2 w_0 + 2t(1-t)w_1 + t^2 w_2}$$

Každá krivka parametrizovaná v kvadratickom racionálnom Bezierovom tvare je kužeľosečka.
Typ kužeľosečky môžeme určiť pomocou menovateľa:
$W(t) = (1-t)^2 w_0 + 2t(1-t)w_1 + t^2 w_2 = (w_0 - 2w_1 + w_2)t^2 + 2(w_1 - w_0)t + w_0 = 0$.

Korene rovnice $t_{12} = \dfrac{(w_0 - w_1) \pm \sqrt{w_1^2 - w_2 w_0}}{w_0 - 2w_1 + w_2}$ a typ kužeľosečky:

Ak : $w_1^2 - w_2 w_0 < 0$, tak elipsa

$w_1^2 - w_2 w_0 = 0$, tak parabola

$w_1^2 - w_2 w_0 > 0$, tak hyperbola.

Z používateľského hľadiska je výhodné voliť $w_0 = w_2 = 1$, potom pre váhu w_1:

- $w_1^2 < 1 \Rightarrow$ elipsa,
- $w_1^2 = 1 \Rightarrow$ parabola
- $w_1^2 > 1 \Rightarrow$ hyperbola.
- $w_1 = 0$ krivka je úsečka $\mathbf{V}_0\mathbf{V}_2$
- $w_1 < 0$ vyvoláva singularity, výhodné je použiť pri „celej“ krivke (elipse).

Voľba váhy w_1 pre jednotlivé kužeľosečky nie je pre dizajnérov vhodným nástrojom. Pre nich je výhodnejšie zvoliť kužeľosečku výberom „tretieho“ bodu napr. $t = \dfrac{1}{2}$:

$$\mathbf{r}(\frac{1}{2}) = \frac{\mathbf{R}(\frac{1}{2})}{W(\frac{1}{2})} = \frac{\frac{1}{2}(\mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_2) + w_1\mathbf{V}_1}{1 + w_1} = \frac{1}{1 + w_1}\mathbf{M} + \frac{w_1}{1 + w_1}\mathbf{V}_1.$$

Označme $\frac{w_1}{1+w_1} = s$, tento parameter vyjadruje lineárnu interpoláciu medzi bodmi **M** a $\mathbf{V}_1$:

$$\mathbf{r}(\frac{1}{2}) = (1-s)\mathbf{M} + s\mathbf{V}_1 = \mathbf{S}$$

a je vhodný nástroj pre dizajnéra, ktorý pohybom bodu **M** do $\mathbf{V}_1$:

- $s = 0$ – úsečka $\mathbf{V}_0\mathbf{V}_2$
- $0 < s < ½$ - elipsa
- $s = ½$ - parabola
- $½ < s < 0$ – hyperbola.

Vyčísľovacie algoritmy

Racionálne Bezierove krivky poskytujú používateľovi väčšiu flexibilitu v krivkovom dizajne ako pri použití celistvých Bezierových kriviek. K zadanej postupnosti riadiacich bodov $\mathbf{V}_i$,$i = 0,...,n$, existuje nekonečne veľa racionálnych Bezierových kriviek, ktorých tvar modelujeme pomocou váh w_i, $w_i > 0$, $i= 0,...,n$,. Ak sa upraví váha niektorého z riadiacich bodov, zmení sa celá Bezierova krivka, ale predpokladaným spôsobom (pritiahnutie/odtlačenie).

Na vyčísľovanie racionálnych Bezierových kriviek sa používa Casteljau algoritmus, existujú dve možnosti aplikácie:

1. Celistvým CA aplikovaním na krivku $\mathbf{R}(t)$: Vypočítame bod $\mathbf{R}(t) \subset E^4$, $t \in \langle 0,1 \rangle$ a jeho stredový priemet získame vydelením prvých troch súradníc bodu $\mathbf{R}(t)$ jeho štvrtou súradnicou.
2. Zrealizujeme CA v E^4 s vrcholmi $\mathbf{V}_i^w = (w_i x_i, w_i y_i, w_i z_i, w_i) = (w_i \mathbf{V}_i, w_i)$ a medzivrcholy získané v jednotlivých krokoch ihneď premietneme do nadroviny $W = 1$. Výsledkom je algoritmus:

RCA:

Vstup: $RB: \mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, ...\mathbf{V}_n$; váhy: $w_0, w_1, ...w_n$ a $t \in \langle 0,1 \rangle$

Telo:

$0^\circ : w_i^0(t) = w_i, \mathbf{V}_i^0(u) = \mathbf{V}_i, \quad i = 0,1,...n$

:

$r^\circ : w_i^r(t) = (1-t)w_i^{r-1}(t) + t w_{i+1}^{r-1}(t),$

$$\mathbf{V}_i^r(t) = \frac{(1-t)w_i^{r-1}(t)\mathbf{V}_i^{r-1}(u) + t w_{i+1}^{r-1}(t)\mathbf{V}_{i+1}^{r-1}(t)}{w_i^r(t)} \quad r = 1,...n; \quad i = 0,1,...,n-r$$

:

$n^\circ : \mathbf{r}(t) = \mathbf{V}_0^n(t)$ - bod krivky prislúchajúci parametru t .

Racionálne B-splajn krivky - NURBS krivky

Non**U**niform **R**ational **B**-spline Curve**S** (súčasť normy IGES pre krivkový dizajn, literatúra:
Les **Piegl**, Wayne **Tiller**: The *NURBS* Book, Springer 1997)

Dané sú riadiace body $\mathbf{V}_i$, i= 0,...,n, $\mathbf{V}_i(x_i, y_i, z_i)$ a ich váhy w_i, $w_i > 0$, i = 0,...,n, teda ich rozšírené afinné súradnice: $\mathbf{V}_i^w = (w_i x_i, w_i y_i, w_i z_i, w_i) = (w_i \mathbf{V}_i, w_i)$.
$N_{i,p}(u)$ - B-splajnové funkcie stupňa p definované na uzlovom vektore $U = \{u_0, \ldots, u_m\}$.

NURBS-krivka stupňa p je definovaná:

$$\mathbf{s}(u) = \frac{\sum_{i=0}^{n} w_i \mathbf{V}_i N_{ip}(u)}{\sum_{i=0}^{n} w_i N_{ip}(u)} = \sum_{i=0}^{n} R_{ip}(u) \mathbf{V}_i \quad \text{kde} \quad R_{ip}(u) = \frac{N_{ip}(u) w_i}{\sum_{j=0}^{n} w_j N_{jp}(u)}, \ u \in \langle a, b \rangle = \langle u_p, u_{m-p} \rangle,$$

sú racionálne polynómy a funkcie $N_{ip}(u)$ sú B-splajnové funkcie p°.

Vlastnosti racionálnych funkcií $R_{ip}(u)$

- <u>nezápornosť</u> : $R_{ip}(u) \geq 0$, pre všetky i, p, $u \in \langle u_i, u_{i+p+1})$ ak $w_i > 0$
- <u>rozklad jednotky</u>: pre každé $u \in \langle u_i, u_{i+1})$: $\sum_{j=i-p}^{i} R_{j,p}(u) = 1$
- <u>lokálny nosič</u>: $R_{i,p}(u) = 0$, pre $u \notin \langle u_i, u_{i+p+1} \rangle$

- pre každé $p > 0$ funkcia $R_{ip}(u)$ má jedno maximum $u \in \langle u_i, u_{i+p+1} \rangle$
- <u>spojitosť</u>: ak vnútorný uzol u_i má násobnosť k_i, tak funkcia $R_{i,p}(u)$ je v bode $u = u_i$ C^{p-k_i} spojitá a všade inde je C^∞ spojitá (len mimo uzlov).
- $w_i = 1$, $i = 0, \ldots, n$, tak $R_{ip}(u) = N_{ip}(u)$ t.j. B-splajnové funkcie sú špeciálny prípad racionálnych zmiešavacích funkcií $R_{ip}(u)$.

Vlastnosti NURBS-kriviek

Pre riadiace body $\mathbf{V}_i$, i = 0,...,n, váhy w_i, $w_i > 0$, i = 0,...,n, a uzlový vektor $U = \{u_0, \ldots, u_m\}$ má NURBS-krivka stupňa p vlastnosti:

1° <u>definičný obor</u> funkcií (kriviek) – interval $D_f = \langle a, b \rangle = \langle u_p, u_{m-p} \rangle$

2° <u>lokálne riadenie:</u> segment krivky definovaný na intervale $\langle u_r, u_{r+1})$, $p \leq r \leq m - p - 1$ je určený (len) riadiacimi bodmi $\mathbf{V}_{r-p}, \ldots, \mathbf{V}_r$.

3° <u>konvexný obal:</u> Ak $u \in \langle u_r, u_{r+1} \rangle$ a $p \leq r \leq m - p - 1$, tak ${}^r\mathbf{s}(u) \in KO[\mathbf{V}_{r-p}, \ldots, \mathbf{V}_r]$

4° <u>spojitosť:</u> Ak k_i je násobnosť uzla $u = u_i$, tak $\mathbf{s}(u)$ je C^{p-k_i} spojitá v $u = u_i$ a C^∞ spojitá mimo uzlov

5° <u>invariantnosť</u> vzhľadom na afinné a projektívne transformácie (March 202)

Modelovanie NURBS-kriviek

• <u>uzlový vektor</u>

- otvorený $U = \left\{a, a, .., a, u_{p+1}, \ \dots \ , u_{m-p-1}, b, b, .., b\right\}$, interpolácia krajných riadiacich bodov
- zmeny v uzlovom vektore spôsobia na tvare krivky zmeny, ktoré je ťažko predvídať
- za výhodnejšiu zmenu sa používa Boehmov algoritmus vnorenia uzla (opísaný pri B-splajnoch), ktorým sa zabezpečí vyčíslenie nových p riadiacich bodov (ležia na stranách pôvodného riadiaceho polygónu).

• <u>zmena váhy</u>

$\mathbf{s}(u) = \sum_{i=0}^{n} R_{ip}(u)\mathbf{V}_i$ je NURBS-krivka a $\bar{u}$ je hodnota parametra z intervalu $\bar{u} \in \left\langle u_k, u_{k+p+1} \right\rangle$.
Váha w_k riadiaceho bodu $\mathbf{V}_k$ nadobúda hodnoty: $0 \le w_k < \infty$. Určíme pre hodnotu parametra $u = \bar{u}$ body na troch NURBS-krivkách:

$$\mathbf{P} = \mathbf{s}_1(\bar{u}, w_k \neq 0{,}1), \quad \mathbf{R} = \mathbf{s}_2(\bar{u}, w_k = 0), \quad \mathbf{M} = \mathbf{s}_3(\bar{u}, w_k = 1).$$

Ak označíme $t = \dfrac{N_{kp}(\bar{u})}{\sum_{i \neq j=0}^{n} N_{ip}(\bar{u}) w_i + N_{kp}(\bar{u})}$ a $v = R_{kp}(\bar{u})$, tak môžeme zapísať:
$\mathbf{M} = (1-t)\mathbf{R} + t\mathbf{V}_k$ a $\mathbf{P} = (1-v)\mathbf{R} + v\mathbf{V}_k$. Body $\mathbf{V}_k, \mathbf{R}, \mathbf{M}, \mathbf{P}$ sú kolineárne a potom ich dvojpomer:
$(\mathbf{V}_k\mathbf{RMP}) = w_k = \dfrac{\mathbf{V}_k\mathbf{M}}{\mathbf{RM}} : \dfrac{\mathbf{V}_k\mathbf{P}}{\mathbf{RP}}$.
Pre modelovanie:

° ak váha w_k riadiaceho bodu $\mathbf{V}_k$ sa zväčšuje/zmenšuje, tak hodnota parametra v sa zväčšuje/zmenšuje a krivka je priťakovaná/odtláčaná vzhľadom na riadiaci bod $\mathbf{V}_k$

° ak bod $\mathbf{P}$ sa pohybuje po úsečke incidujúcej bodom $\mathbf{V}_k$, tak krivka mení tvar predpokladaným spôsobom

° ak bod $\mathbf{P}$ "dosiahne" bod $\mathbf{V}_k$, tak $v \to 1$ a $w_k \to \infty$.

Vyčísľovacie algoritmy

Racionálny De Boorov algoritmus pre vyčísľovanie bodov NURBS-krivky
0° Pre $u \in \langle u_r, u_{r+1})$: $\mathbf{V}_i^0(u) = \mathbf{V}_i, \quad w_i^0(u) = w_i, \quad i = r-p, \dots, r$
:

$$\alpha_i^j(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p+1-j} - u_i}$$

$j°$ $\quad w_i^j(u) = \left[1 - \alpha_i^j(u)\right] w_{i-1}^{j-1}(u) + \alpha_i^j(u) w_i^{j-1}(u),$

$$w_i^j(u)\mathbf{V}_i^j(u) = \left[1 - \alpha_i^j(u)\right] w_{i-1}^{j-1}(u)\mathbf{V}_{i-1}^{j-1}(u) + \alpha_i^j(u) w_i^{j-1}(u)\mathbf{V}_i^{j-1}(u),$$

pre $\ j = 0, 1, \dots p; \ \ i = r - p + j, , \dots, r$
:

$p^{\circ}: \mathbf{s}(u) = \mathbf{V}_r^p(u)$.