<u>DVOJROZMERNÉ ÚTVARY V PRIESTORE: PLOCHY, ZÁPLATY</u>

Návrhy plôch, ako aj podklady pre ich výrobu donedávna vznikali len na kresliacich stoloch konštruktérov a v dielňach modelárov. Tento tradičný spôsob návrhu plochy má veľa nevýhod, pretože ide o prácu intuitívnu, opierajúcu sa o skúsenosti konštruktéra a modelára, časovo náročnú a málo presnú. Automatizácia výroby vyžaduje vytvoriť matematické modely týchto plôch. Matematická reprezentácia vylúči nepresnosti ručného rysovania a modelovania. V počítačovej grafike sa rozumie pod pojmom <u>konštrukcia plochy</u> určenie jej rovníc z podmienok, ktoré má plocha spĺňať.

Matematické reprezentácie plôch

Podobne ako krivky môžeme aj plochy reprezentovať pomocou implicitných rovníc, explicitných vyjadrení alebo parametrických funkcií.
Implicitná rovnica plochy Φ:

$$F(x, y, z) = 0,$$

kde premenné x, y, z sa interpretujú ako súradnice bodu plochy. Táto rovnica umožňuje zistiť, či bod $\mathbf{A} = \left[x^A, y^A, z^A\right]$ je bodom plochy.

Explicitné vyjadrenie plochy Φ :

$$z = f(x, y),$$

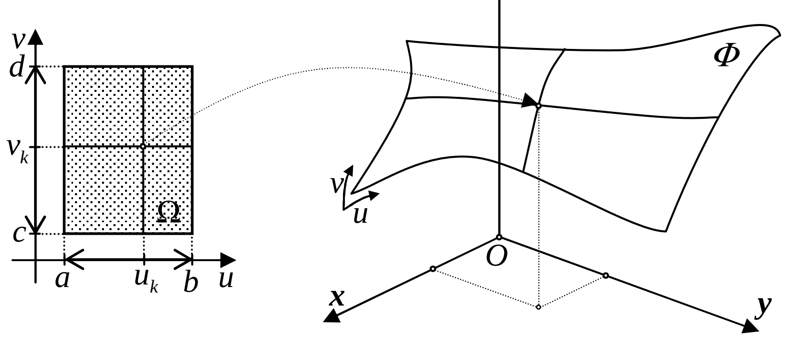
podľa ktorého určíme hodnotu z bodu plochy Φ zo súradníc x, y .

Parametrické vyjadrenie plochy Φ opisuje každú súradnicu x, y, z jej bodu osobitne pomocou explicitnej funkcie dvoch premenných u , v (premenné u, v nazývame tiež u, v parametre plochy) :

$$\begin{aligned} x &= x(u,v) \\ y &= y(u,v), \quad u,v \in U \times V \\ z &= z(u,v) \end{aligned}$$

Plocha je každá súvislá podmnožina $\Phi \subset E^3$, ktorá je spojitým obrazom súvislej oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $\Omega = U \times V$ kde $U = \langle a, b \rangle$ a $V = \langle c, d \rangle$ sú číselné intervaly.

Funkcie $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ nazývame *parametrické vyjadrenie plochy*.



Parametrické vyjadrenie plochy možno nahradiť jedinou vektorovou rovnicou $\mathbf{r}(u, v)$, ktorá je vektorovou funkciou parametrov u, v. Pre zápis tejto vektorovej funkcie použijeme označenie: $\mathbf{r}(u,v) = \left[x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right]$ čo je súradnicový zápis vektora.

Izoparametrické čiary na ploche $\mathbf{r}(u,v) = \left[x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right]$, $u\in\langle u_1,u_2\rangle$, $v\in\langle v_1,v_2\rangle$

v – čiara plochy: $u = u_k \in U$:

$$x = x(u_k, v),\ y = y(u_k, v),\ z = z(u_k, v), \quad u = u_k, v \in V.$$

V ďalšom texte budeme pre v-čiaru používať aj skrátený zápis:

$$x = x(v),\ y = y(v),\ z = z(v), \quad v \in V.$$

u - čiara plochy: $v = v_k \in V$

$$x = x(u, v_k),\ y = y(u, v_k),\ z = z(u, v_k), \quad u \in U, v = v_k$$

a skrátený zápis pre u-čiaru:

$$x = x(u),\ y = y(u),\ z = z(u), \quad u \in U.$$

Okrajové čiary plochy :

sú izoparametrické u-čiary $\mathbf{r}(u,v_1)$, $\mathbf{r}(u,v_2)$ a izoparametrické v-čiary $\mathbf{r}(u_1,v)$, $\mathbf{r}(u_2,v)$.
Okrajové čiary plochy tvoria *okraj plochy*.

Bod plochy je priesečník izoparametrických u-, v-čiar: $\mathbf{r}(u_k, v_k) = \mathbf{r}(u, v_k) \cap \mathbf{r}(u_k, v)$.

Rohové body plochy sú priesečníkmi okrajových čiar : $\mathbf{r}(u_1, v_1) = \mathbf{r}(u, v_1) \cap \mathbf{r}(u_1, v)$

$$\mathbf{r}(u_2, v_1) = \mathbf{r}(u, v_1) \cap \mathbf{r}(u_2, v)$$
$$\mathbf{r}(u_1, v_2) = \mathbf{r}(u, v_2) \cap \mathbf{r}(u_1, v)$$
$$\mathbf{r}(u_2, v_2) = \mathbf{r}(u, v_2) \cap \mathbf{r}(u_2, v)$$

V aplikáciách sa často používa $u_1 = v_1 = 0$ a $u_2 = v_2 = 1$, potom parametre $u, v \in \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$.

Pri štúdiu kriviek $\mathbf{r}(t)$ jej derivácia $\mathbf{r}'(t)$ v ľubovoľnom bode je vektor dotyčnice. Pre plochy, podobne, derivácia je dotykový vektor krivky na ploche. Presnejšie, nech $\mathbf{r}(u, v)$ je bod na ploche, ktorý je priesečníkom dvoch izoparametrických u-, v-čiar.

Vezmime u-čiaru: $\mathbf{r}(u,v_k)$ a vyčíslime jej deriváciu podľa u.

Výsledkom je vektor dotyčnice: $$\left.\frac{\partial \mathbf{r}(u,v)}{\partial u}\right|_{v=v_k} = \left.\left[\frac{\partial x(u,v)}{\partial u}, \frac{\partial y(u,v)}{\partial u}, \frac{\partial z(u,v)}{\partial u}\right]\right|_{v=v_k}.$$

Parciálna derivácia funkcie $\mathbf{r}(u, v)$ podľa u je vektorová funkcia $\mathbf{r}_u(u, v)$.

Pre v-čiaru : $\mathbf{r}(u_k,v)$ vyčíslime jej deriváciu podľa v.

Výsledkom je vektor dotyčnice: $$\left.\frac{\partial \mathbf{r}(u,v)}{\partial v}\right|_{u=u_k} = \left.\left[\frac{\partial x(u,v)}{\partial v}, \frac{\partial y(u,v)}{\partial v}, \frac{\partial z(u,v)}{\partial v}\right]\right|_{u=u_k}.$$

Parciálna derivácia funkcie $\mathbf{r}(u, v)$ podľa v je vektorová funkcia $\mathbf{r}_v(u, v)$.

V ďalšom štúdiu plôch budeme potrebovať derivácie:

- v bodoch okrajových kriviek : $\mathbf{r}_u(u, 0)$ a $\mathbf{r}_u(u, 1)$ aj $\mathbf{r}_v(0, v)$ a $\mathbf{r}_v(1, v)$ tzv. *pozdĺžne derivácie* a
  $\mathbf{r}_v(u, 0)$ a $\mathbf{r}_v(u, 1)$ aj $\mathbf{r}_u(0, v)$ a $\mathbf{r}_u(1, v)$ tzv. *priečne derivácie.*
- v rohových bodoch plochy: $\mathbf{r}_u(0, 0)$, $\mathbf{r}_u(0, 1)$, $\mathbf{r}_u(1, 0)$, $\mathbf{r}_u(1, 1)$
  $\mathbf{r}_v(0, 0)$, $\mathbf{r}_v(0, 1)$, $\mathbf{r}_v(1, 0)$, $\mathbf{r}_v(1, 1)$.

Bod plochy, v ktorom je niektorá z parciálnych derivácií nulový vektor alebo sú tieto vektory lineárne závislé je tento bod *singulárny*. V *regulárnom* bode plochy sú vektory dotyčníc izoparametrických čiar nenulové a lineárne nezávislé, určujú *dotykovú rovinu*.

Vektor normály (normála plochy) – je kolmý na dotykovú rovinu v regulárnom bode plochy:

$$\mathbf{n}(u_k, v_k) = \mathbf{r}_u(u_k, v_k) \times \mathbf{r}_v(u_k, v_k).$$

Vektor twistu (skrutu plochy)- je vektor zmiešanej druhej parciálnej derivácie :

$$\left.\frac{\partial^2 \mathbf{r}(u,v)}{\partial u \partial v}\right|_{\substack{v=v_k \\ u=u_k}} = \left.\left[\frac{\partial^2 x(u,v)}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^2 y(u,v)}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^2 z(u,v)}{\partial u \partial v}\right]\right|_{\substack{v=v_k \\ u=u_k}}.$$

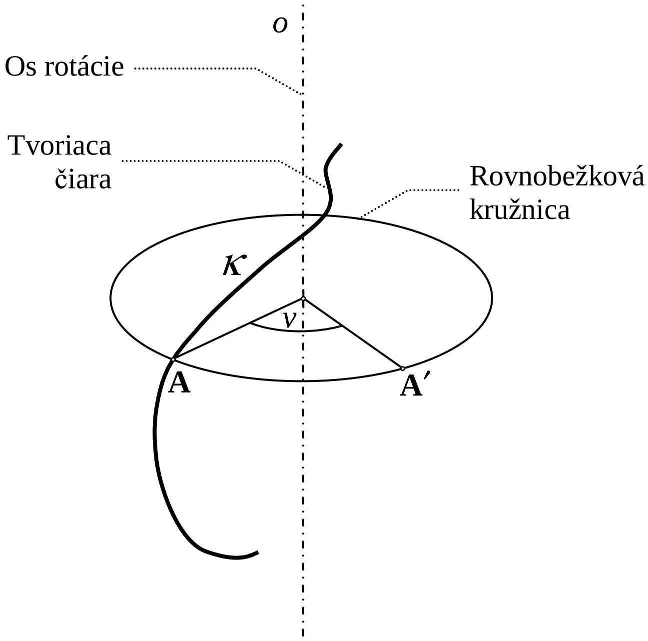
Bod, v ktorom je vektor twistu nulový, je inflexný bod a plocha v okolí tohto bodu je časťou roviny.

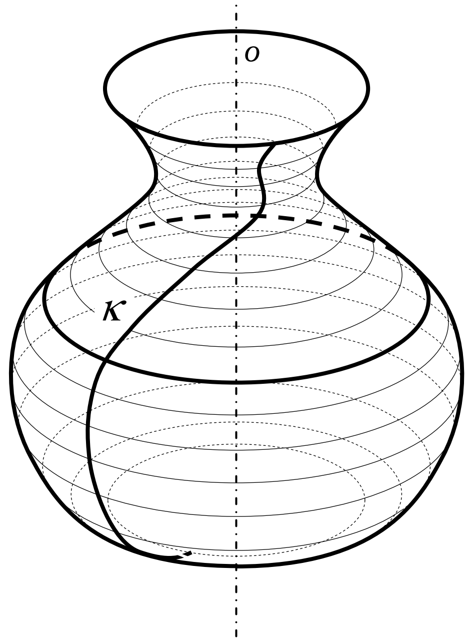
Teraz sme sa oboznámili s tými pojmami, ktoré budú vystupovať pri konštrukcii plôch z daných vstupných dát.
Tieto vstupné dáta môžeme rozdeliť do troch skupín:

1. plocha je vytvorená z čiary a geometrickej transformácie, ktorá je aplikovaná na čiaru
2. známe sú okrajové čiary, ktoré je potrebné „zlepiť“ plochou
3. poznáme riadiacu sieť bodov.

<u>1. ROTAČNÉ PLOCHY – SURFACES OF REVOLUTION</u>

Syntetická metóda opisu plochy:
Daná je čiara κ, priamka o, pričom čiara κ neleží v rovine kolmej na priamku o. Plocha Φ vytvorená rotáciou čiary κ okolo priamky o o uhol $v \in \langle 0, 2\pi \rangle$ sa nazýva *rotačná plocha*, priamka o *os rotácie* a čiara κ *tvoriaca čiara plochy*. Každý bod $A \notin o$ čiary κ vytvorí *rovnobežkovú kružnicu*, ktorá leží v rovine kolmej na priamku o.





Analytická metóda opisu plochy:

Nech $Oxyz$ je pravouhlý trojhran v priestore E^3 a os rotácie o je totožná so súradnicovou osou z. Čiara κ je u -krivka t.j. má parametrické vyjadrenie:

$$x = x(u) \qquad y = y(u) \qquad z = z(u) \qquad u \in U .$$

Nech bod $\mathbf{A}\left[x^A, y^A, z^A\right]$ je bodom čiary κ. Pri rotácii okolo osi o bod $\mathbf{A}$ leží na kružnici:

$$x^A = r.\cos\alpha, \quad y^A = r.\sin\alpha, \quad \alpha \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Po otočení o uhol v dostaneme bod $\mathbf{A'}\left[x^{A'}, y^{A'}, z^{A'}\right]$:

$$x^{A'} = r.\cos(\alpha + v) = x^A.\cos v - y^A.\sin v$$
$$y^{A'} = r.\sin(\alpha + v) = x^A.\sin v + y^A.\cos v$$
$$z^{A'} = z^A$$

Keďže bod $\mathbf{A}$ je bodom čiary κ, t.j. $x^A = x(u), y^A = y(u), z^A = z(u), \ \ u \in U$, teda *parametrické vyjadrenie rotačnej plochy* zapíšeme:

$$x(u,v) = x(u)\cos v - y(u)\sin v$$
$$y(u,v) = x(u)\sin v + y(u)\cos v$$
$$z(u,v) = z(u) \text{ , kde } u \in U , \ v \in \langle 0, 2\pi \rangle .$$

Zápis v rozšírených afinných súradniciach:

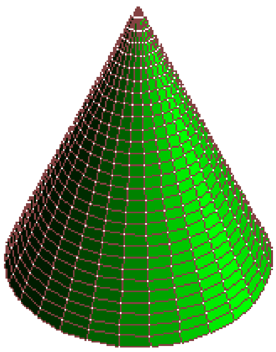
$$\begin{pmatrix} x(u,v) & y(u,v) & z(u,v) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u) & y(u) & z(u) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos v & \sin v & 0 & 0 \\ -\sin v & \cos v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$u \in U$, $v \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

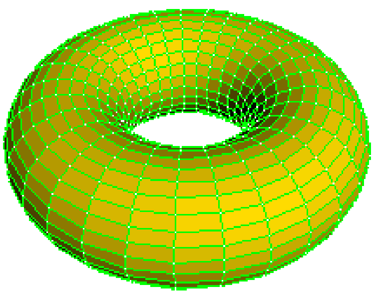
Sieť čiar na rotačnej ploche tvoria u - čiary, ktoré sú zhodné s tvoriacou čiarou κ(t.j. u -čiary nemenia tvar len polohu v priestore) a v -čiary, ktoré sú rovnobežkové kružnice ležiace v rovinách kolmých na os rotácie o. Pri grafickej ilustrácii plôch sú vykresľované sústavy u-, v- čiar. Problém viditeľnosti pri vykresľovaní čiar sa nezaraďuje.

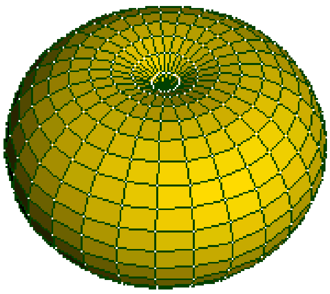
Ilustrácia rotačných plôch:

Priamkové rotačné plochy: tvoriaca čiara κ je *priamka*

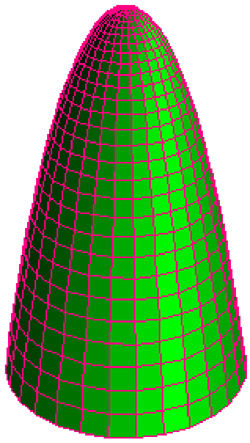


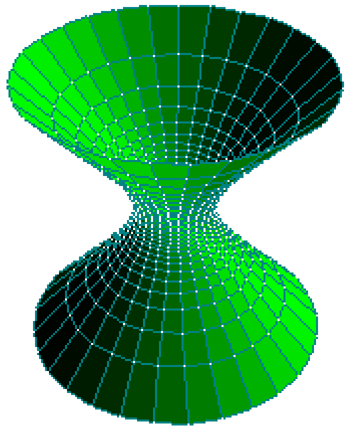
Cyklické rotačné plochy: tvoriaca čiara κ je kružnica





Kvadratické rotačné plochy: tvoriaca čiara κ je regulárna kužeľosečka





Všeobecné rotačné plochy: tvoriaca čiara κ je funkciou parametra *u*, t.j. poznáme parametrické rovnice tvoriacej čiary

Bèzierova kubická krivka

Určujúci polygón tvoria vrcholy:

$V_0 = [0,-4], V_1 = [1,5], V_2 = [3,0], V_3 = [4,6]$

$x(u) = -2*u^3 + 3*u^2 + 3*u$

$y(u) = 0$

$z(u) = 25*u^3 - 42*u^2 + 27*u - 4$

$u \in \langle 0,1 \rangle$

$x(u,v) = (-2u^3 + 3u^2 + 3u)\cos v$

$y(u,v) = (-2u^3 + 3u^2 + 3u)\sin v$

$z(u,v) = 25u^3 - 42u^2 + 27u - 4$

$u \in \mathbb{R}, v \in \langle 0, 2\pi \rangle$