2. PLOCHY URČENÉ OKRAJOM- COONS PATCHES

Autori: **Coons**- Ford, Detroid, **Gordon** - General Motors, Chicago; vychádza sa zo siete kriviek, ktorá je vyplnená plochou. Dochádza k spojeniu resp. prechodu medzi krivkami (profilmi) pomocou plochy.

Priamkové (pravítkové, ruled, lofted) plochy.

Dané: • dve priestorové čiary C_1, C_2 toho istého parametra *u*, t.j. $C_1(u), C_2(u)$, definované na tom istom intervale $\langle 0,1\rangle$.

• vyšetrujeme plochu, ktorá má dané krivky C_1, C_2 za protiľahlé okrajové krivky:

$$C_1(u) = \mathbf{r}(u,0), C_2(u) = \mathbf{r}(u,1).$$

Predpokladáme, že poznáme parametrické vyjadrenie daných čiar. Vyšetrovaná plocha má „spojiť“ body daných okrajových kriviek. Tento problém má nekonečne veľa riešení.
Jedno riešenie je:

• spojiť body kriviek $C_1(u), C_2(u)$ pre tú istú hodnotu parametra *u* úsečkou:

$$\mathbf{r}_C(u,v) = \mathbf{r}(u,0) + v(\mathbf{r}(u,1) - \mathbf{r}(u,0)) \quad v \in \langle 0,1\rangle$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{r}_C(u,v) = \begin{bmatrix}\mathbf{r}(u,0) & \mathbf{r}(u,1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1-v \\ v\end{bmatrix}$$

Priamkové plochy pripomínajú lineárnu interpoláciu veď každá izoparametrická *v*-čiara je úsečka. Je potrebné si uvedomiť, že neinterpolujeme body, ale celé krivky. Na krivky $C_1(u) = \mathbf{r}(u,0), C_2(u) = \mathbf{r}(u,1)$ okrem toho, že sú definované na tom istom intervale $\langle 0,1\rangle$ sa nekladú žiadne podmienky.

Ak potrebujeme pracovať s iným intervalom ako $\langle 0,1\rangle$ napr. $\langle a,b\rangle$, vtedy je potrebné použiť lineárnu interpoláciu: $\mathbf{r}(u,v) = \frac{b-v}{b-a}\mathbf{r}(u,a) + \frac{v-a}{b-a}\mathbf{r}(u,b)$.

Dané: • dve priestorové krivky, označme ich D_1, D_2, zvolíme za *v*-čiary :

$$D_1(v) = \mathbf{r}(0,v), D_2(v) = \mathbf{r}(1,v)$$

• spojiť body kriviek $D_1(v), D_2(v)$ pre tú istú hodnotu parametra *v* úsečkou:

$$\mathbf{r}_D(u,v) = \mathbf{r}(0,v) + u(\mathbf{r}(1,v) - \mathbf{r}(0,v)) \quad u \in \langle 0,1\rangle$$

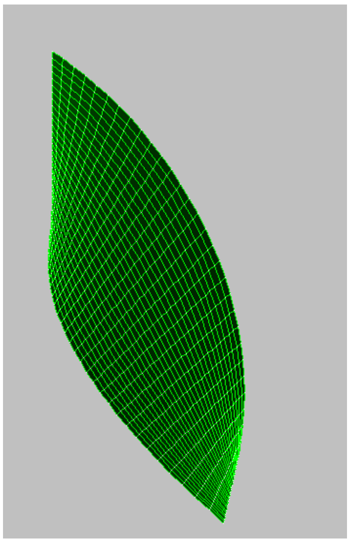
$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{r}_D(u,v) = \begin{bmatrix}1-u & u\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{r}(0,v) \\ \mathbf{r}(1,v)\end{bmatrix}$$

Príklady:

1.Dané sú okrajové u-čiary: $u \in \langle 0,1 \rangle$

$$\mathbf{r}(u,0) = (u, \sin(\frac{\pi}{2}u), \cos(\frac{\pi}{2}u))$$

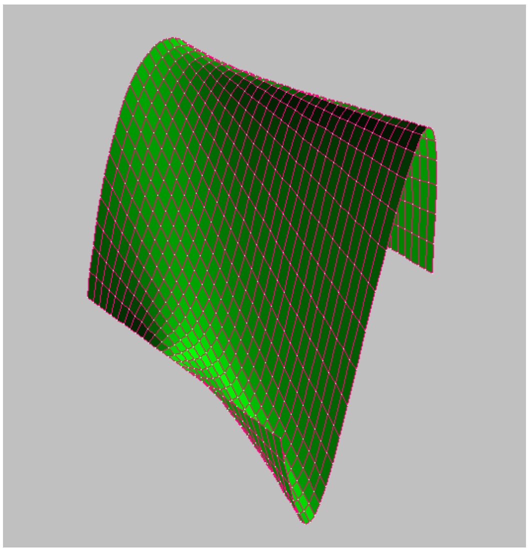
$$\mathbf{r}(u,1) = (u, u^2, -\frac{u}{2})$$



2. Dané sú okrajové u-čiary: $u \in \langle 0,1 \rangle$

$$\mathbf{r}(u,0) = (u, 0, 4u(1-u))$$

$$\mathbf{r}(u,1) = (u, 1, \sin(2\pi u))$$



Bilineárne Coonsove záplaty.
(Bilineárne stmeľované Coonsove záplaty)

Dané: • štyri priestorové čiary $C_1(u), C_2(u), u \in \langle 0,1 \rangle$ a $D_1(v), D_2(v), v \in \langle 0,1 \rangle$ so spoločnými rohovými bodmi (spĺňajú podmienku uzavretého okraja t.j. $C_1(0) = D_1(0), C_1(1) = D_2(0), C_2(0) = D_1(1), C_2(1) = D_2(1)$)

• vyšetrujeme plochu, ktorá má dané krivky C_1, C_2, D_1, D_2 za protiľahlé okrajové krivky:

$$C_1(u) = \mathbf{r}(u,0), C_2(u) = \mathbf{r}(u,1)$$
$$D_1(v) = \mathbf{r}(0,v), D_2(v) = \mathbf{r}(1,v).$$

Vyšetrovaná plocha má „spojiť“ body daných okrajových kriviek. Pri riešení využijeme dve priamkové plochy:

$\mathbf{r}_C(u,v) = \begin{bmatrix} \mathbf{r}(u,0) & \mathbf{r}(u,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix}, \quad u,v \in \langle 0,1 \rangle \times \langle 0,1 \rangle$, ktorá interpoluje C-krivky a plochu

$\mathbf{r}_D(u,v) = \begin{bmatrix} 1-u & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}(0,v) \\ \mathbf{r}(1,v) \end{bmatrix}, \quad u,v \in \langle 0,1 \rangle \times \langle 0,1 \rangle$, ktorá interpoluje D-krivky.

Ani jedna z plôch $\mathbf{r}_C(u,v)$, $\mathbf{r}_D(u,v)$ neinterpoluje všetky štyri dané krivky. Túto vlastnosť nemá ani plocha $\mathbf{r}_C(u,v) + \mathbf{r}_D(u,v)$, ale má ju plocha

$$\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{r}_C(u,v) + \mathbf{r}_D(u,v) - \mathbf{r}_{CD}(u,v), \quad u,v \in \langle 0,1 \rangle \times \langle 0,1 \rangle$$

kde $\mathbf{r}_{CD}(u,v)$ je bilineárny interpolant rohových bodov.
Zapíšeme vyjadrenie plochy:

$$\mathbf{r}(u,v) = \begin{bmatrix} \mathbf{r}(u,0) & \mathbf{r}(u,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1-u & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}(0,v) \\ \mathbf{r}(1,v) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1-u & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}(0,0) & \mathbf{r}(0,1) \\ \mathbf{r}(1,0) & \mathbf{r}(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \begin{bmatrix} 1-u & -1 & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}(0,0) & \mathbf{r}(0,v) & \mathbf{r}(0,1) \\ \mathbf{r}(u,0) & \mathbf{r}(u,v) & \mathbf{r}(u,1) \\ \mathbf{r}(1,0) & \mathbf{r}(1,v) & \mathbf{r}(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ -1 \\ v \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Táto plocha nie je bilineárna (nie je tu súčin lineárnych funkcií), názov súvisí s konštrukciou plochy. Funkcie 1-*u*, *u*, 1-*v*, *v* sú zmiešavacie funkcie.

Príklady:

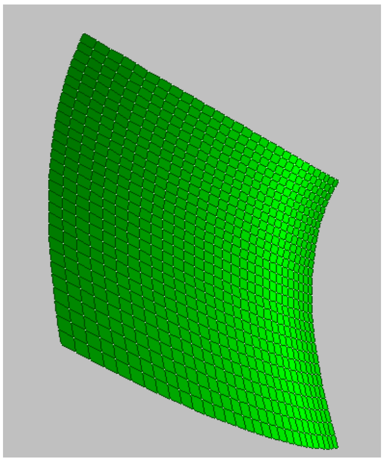
1.Dané sú okrajové *u*-, *v*- čiary: $u, v \in \langle 0,1\rangle \text{ x } \langle 0,1\rangle$

$\mathbf{r}(u,0) = (u, u^2, 1-u)$

$\mathbf{r}(u,1) = (u+1, u^2-1, 2-u)$

$\mathbf{r}(0,v) = (v, -v^2, v+1)$

$\mathbf{r}(1,v) = (1+v, 1-v^2, v)$



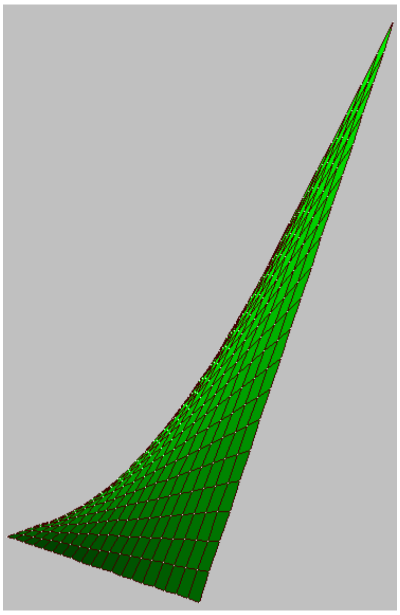
2. Dané sú okrajové *u*-, *v*- čiary: $u, v \in \langle 0,1\rangle \text{ x } \langle 0,1\rangle$

$\mathbf{r}(u,0) = (u, 0, 0)$

$\mathbf{r}(u,1) = (u, 1, 2u)$

$\mathbf{r}(0,v) = (0, v, 0)$

$\mathbf{r}(1,v) = (1, v, 2v)$



Čiastkovo bikubické Coonsove záplaty.
(Čiastkovo bikubicky stmeľované Coonsove záplaty)

Na konštrukciu bilineárnych Coonsovych záplat sme použili funkcie 1-*u*, *u*, 1-*v*, *v*. Derivácie týchto funkcií sú konštanty, čo spôsobuje problémy pri spájaní dvoch Coonsovych záplat pozdĺž hraničných kriviek. Preto na konštrukciu Coonsovych záplat možno použiť aj iné zmiešavacie funkcie $f_1(u),\ f_2(u),\ g_1(v),\ g_2(v)$, ktoré však musia spĺňať podmienky :

$$\begin{aligned} f_1(u)+f_2(u)&=1\\ g_1(v)+g_2(v)&=1\\ f_1(0)=g_1(0)&=1\\ f_1(1)=g_1(1)&=0 \end{aligned} \qquad \text{(I)}$$

Zmiešavacie funkcie $f_1(u),\ f_2(u),\ g_1(v),\ g_2(v)$ majú vplyv na tvar Coonsovej záplaty. Niektoré návrhové systémy umožňujú meniť zmiešavacie funkcie a tak získať širokú triedu Coonsovych záplat.
Požiadavkám (I) vyhovujú dva Hermitove polynómy : $H_{03}(t)=1-3t^2+2t^3, H_{33}(t)=3t^2-2t^3$, ktoré postavíme do úlohy zmiešavacích funkcií $f_1(u),\ f_2(u),\ g_1(v),\ g_2(v)$:

$$\begin{aligned} f_1(u)&=H_{03}(u)=1-3u^2+2u^3\\ f_2(u)&=H_{33}(u)=3u^2-2u^3\\ g_1(v)&=H_{03}(v)=1-3v^2+2v^3\\ g_2(v)&=H_{33}(v)=3v^2-2v^3 \end{aligned}$$

Zápis čiastkovej bikubickej Coonsovej záplaty:

$$\mathbf{r}(u,v)=\begin{bmatrix}\mathbf{r}(u,0) & \mathbf{r}(u,1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}H_{03}(v)\\ H_{33}(v)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}H_{03}(u) & H_{33}(u)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{r}(0,v)\\ \mathbf{r}(1,v)\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}H_{03}(u) & H_{33}(u)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{r}(0,0) & \mathbf{r}(0,1)\\ \mathbf{r}(1,0) & \mathbf{r}(1,1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}H_{03}(v)\\ H_{33}(v)\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{bmatrix}H_{03}(u) & -1 & H_{33}(u)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{r}(0,0) & \mathbf{r}(0,v) & \mathbf{r}(0,1)\\ \mathbf{r}(u,0) & \mathbf{r}(u,v) & \mathbf{r}(u,1)\\ \mathbf{r}(1,0) & \mathbf{r}(1,v) & \mathbf{r}(1,1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}H_{03}(v)\\ -1\\ H_{33}(v)\end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

Príklady:

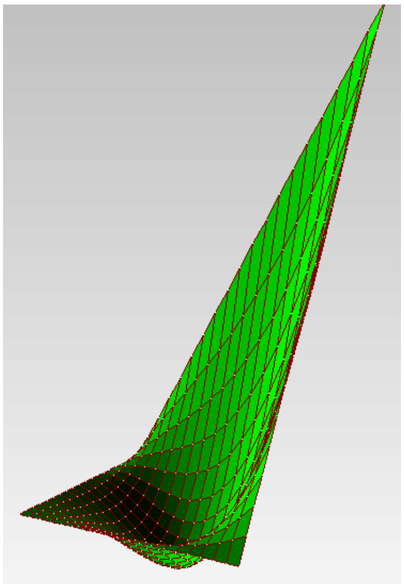
1.Dané sú okrajové *u*-, *v*- čiary: $u, v \in \langle 0,1 \rangle \text{ x } \langle 0,1 \rangle$

$\mathbf{r}(u,0) = (u,0,0)$

$\mathbf{r}(u,1) = (u,1,2u)$

$\mathbf{r}(0,v) = (0,v,0)$

$\mathbf{r}(1,v) = (1,v,2v)$



Bikubické Coonsove záplaty.
(Bikubicky stmeľované Coonsove záplaty)
Bikubická Hermitova interpolačná záplata

Konštrukcia hladkých zložených záplat si vyžaduje, aby záplaty neboli konštruované len z hraničných kriviek, ale aj z vektorových funkcií, ktoré reprezentujú derivácie v smeroch priečnych k týmto hraniciam (podobne ako je to u Hermitovej kubiky, kde sú dané nielen krajné body, ale aj derivácie v nich).

Pri vytváraní záplaty budeme uvažovať, že každá okrajová krivka je Hermitova kubika:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} H_{03}(t) & H_{33}(t) & H_{13}(t) & H_{23}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0 \\ \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{r}'_0 \\ \mathbf{r}'_1 \end{bmatrix} t \in \langle 0,1 \rangle .$$

Bikubickú Coonsovu záplatu definujeme :

$$\mathbf{r}(u,v) = \begin{bmatrix} H_{03}(u) & H_{33}(u) & H_{13}(u) & H_{23}(u) \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{r}(0,0) & \mathbf{r}(0,1) & \mathbf{r}_v(0,0) & \mathbf{r}_v(0,1) \\ \mathbf{r}(1,0) & \mathbf{r}(1,1) & \mathbf{r}_v(1,0) & \mathbf{r}_v(1,1) \\ \mathbf{r}_u(0,0) & \mathbf{r}_u(0,1) & \mathbf{r}_{uv}(0,0) & \mathbf{r}_{uv}(0,1) \\ \mathbf{r}_u(1,0) & \mathbf{r}_u(1,1) & \mathbf{r}_{uv}(1,0) & \mathbf{r}_{uv}(1,1) \end{bmatrix}}_{\mathrm{G}} \begin{bmatrix} H_{03}(v) \\ H_{33}(v) \\ H_{13}(v) \\ H_{23}(v) \end{bmatrix}$$

resp.

$$\mathbf{r}(u,v) = \begin{bmatrix} H_{03}(u) & H_{13}(u) & H_{23}(u) & H_{33}(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}(0,0) & \mathbf{r}_v(0,0) & \mathbf{r}_v(0,1) & \mathbf{r}(0,1) \\ \mathbf{r}_u(0,0) & \mathbf{r}_{uv}(0,0) & \mathbf{r}_{vu}(0,1) & \mathbf{r}_u(0,1) \\ \mathbf{r}_u(1,0) & \mathbf{r}_{uv}(1,0) & \mathbf{r}_{uv}(1,1) & \mathbf{r}_u(1,1) \\ \mathbf{r}(1,0) & \mathbf{r}_v(1,0) & \mathbf{r}_v(1,1) & \mathbf{r}(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{03}(v) \\ H_{13}(v) \\ H_{23}(v) \\ H_{33}(v) \end{bmatrix}$$

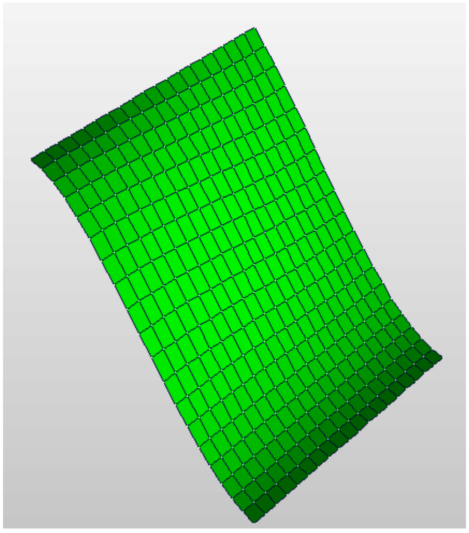
G - matica mapy záplaty má 16 vektorov, možno ju rozdeliť na 4 submatice- sekcie:
- sekcia rohových bodov
- sekcia vektorov dotyčníc v smere *v* v rohových bodoch záplaty
- sekcia vektorov dotyčníc v smere *u* v rohových bodoch záplaty
- sekcia vektorov twistov v rohových bodoch záplaty

V prípade, že sekcia vektorov twistov je nulová, hovoríme o 12-*vektorovej Coonsovej záplate*, resp. *Fergusonovej záplate*. Ak aspoň jeden vektor twistu je nenulový, tak rovnica opisuje 16-*vektorovú Coonsovu záplatu* resp. *bikubickú Coonsovu záplatu* resp. *Hermitovu bikubickú interpolačnú záplatu.* Všimnime si, že vstupnými dátami sú rôzne vektory v rohových bodoch a nie okrajové čiary ako pri predchádzajúcich Coonsovych plochách.

Príklad:

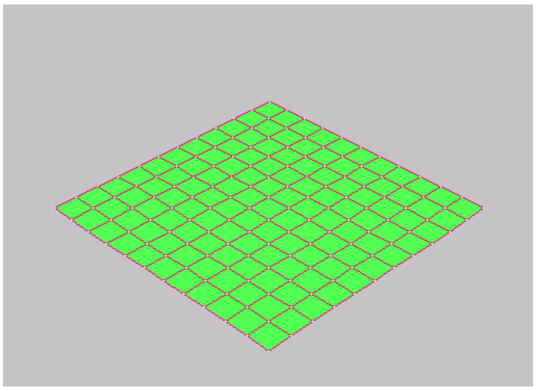
1.Dané sú:

- štyri rohové body: $\mathbf{r}(0,0)=(0,0,1)$, $\mathbf{r}(1,0)=(1,0,1)$, $\mathbf{r}(0,1)=(0,1,0)$, $\mathbf{r}(1,1)=(1,1,0)$
- vektory derivácií v smere *u* v rohových bodoch:
  $\mathbf{r}_u(0,0)=(1,0,0)$, $\mathbf{r}_u(1,0)=(1,0,0)$, $\mathbf{r}_u(0,1)=(1,0,0)$, $\mathbf{r}_u(1,1)=(1,0,0)$
- vektory derivácií v smere *v* v rohových bodoch:
  $\mathbf{r}_v(0,0)=(0,1,-1)$, $\mathbf{r}_v(1,0)=(0,1,0)$, $\mathbf{r}_v(0,1)=(0,1,0)$, $\mathbf{r}_v(1,1)=(0,1,0)$
- vektory twistov v rohových bodoch: Fergusonova záplata.



Geometrický význam vektora twistu $\left.\dfrac{\partial^2 \mathbf{r}(u,v)}{\partial u \partial v}\right|$.

Fergusonova plocha, ktorej okraj tvoria strany jednotkového štvorca v rovine *xy*,
vektory derivácií v smere *u* v rohových bodoch:
$\mathbf{r}_u(0,0)=(1,0,0)$, $\mathbf{r}_u(1,0)=(1,0,0)$, $\mathbf{r}_u(0,1)=(1,0,0)$, $\mathbf{r}_u(1,1)=(1,0,0)$
vektory derivácií v smere *v* v rohových bodoch:
$\mathbf{r}_v(0,0)=(0,1,0)$, $\mathbf{r}_v(1,0)=(0,1,0)$, $\mathbf{r}_v(0,1)=(0,1,0)$, $\mathbf{r}_v(1,1)=(0,1,0)$
má parametrické vyjadrenie: $x(u, v) = u$, $y(u, v) = v$, $z(u, v) = 0$, $u, v \in \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$.



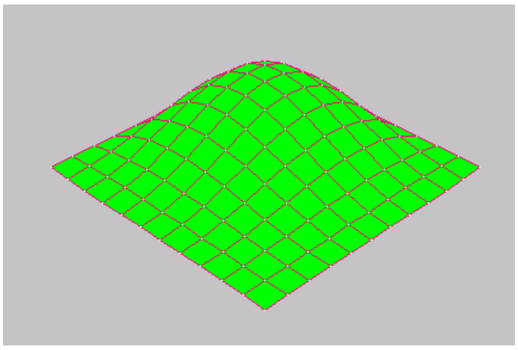
Teda je to štvorec a jeho vnútro, izoparametrické čiary oboch sústav sú úsečky.

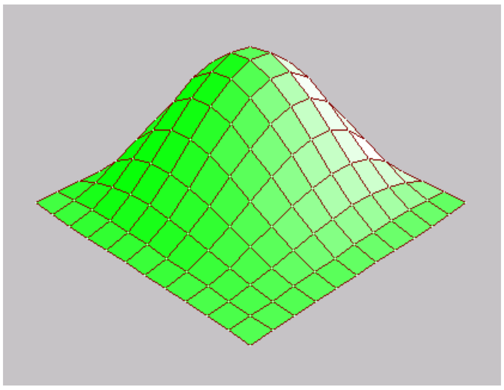
Nech vstupné dáta sú rovnaké (rohové body, 1.derivácie), ale sekcia twistov má vektory $\mathbf{r}_{uv}(0,0)=(0,0,T), T\neq 0, \mathbf{r}_{uv}(1,0)=\mathbf{r}_{uv}(0,1)=\mathbf{r}_{uv}(1,1)=(0,0,0)$. Parametrické vyjadrenie 16-vektorovej Coonsovej záplaty:

$x(u, v) = u$

$y(u, v) = v$

$z(u,v)=T.H_{13}(u).H_{13}(v)=T.(u-2u^2+u^3)(v-2v^2+v^3)$, $u, v \in \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$.





Pre rôzne hodnoty T (obr. T = 10, 20) získame rôzne Coonsove plochy. Nenulový vektor twistu v rohovom bode vyvolá „vyklonenie“ plochy v okolí rohového bodu. Izoparametrické čiary oboch sústav sú kubické krivky. Existujú rôzne metódy, ktorými sa určujú vektory twistov (napr. Bessel, Adini).