3. PLOCHY URČENÉ RIADIACOU SIEŤOU PLOCHY TENZOROVÉHO SÚČINU

Princíp vytvorenia: nech

$$\mathbf{r}(u) = U.M.G = U.M.\begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{bmatrix}, u \in \langle 0,1 \rangle$$

je kubická krivka s riadiacimi prvkami $G_i, i = 0,1,2,3$. Prvky v geometrickej matici *G* vytvoria pre parameter $v \in \langle 0,1 \rangle$ kubickú krivku

$$G_i(v) = V.M.g_i = V.M.\begin{bmatrix} g_{i0} \\ g_{i1} \\ g_{i2} \\ g_{i3} \end{bmatrix}, i = 0,1,2,3.$$

Teda plocha má vektorovú rovnicu:

$$\mathbf{r}(u,v) = U.M.\begin{bmatrix} G_0(v) \\ G_1(v) \\ G_2(v) \\ G_3(v) \end{bmatrix}, u,v \in \langle 0,1 \rangle \times \langle 0,1 \rangle$$

Vieme, že pre súčin matíc platí $(A.B.C)^T = C^T.B^T.A^T$, teda pre súčin $(V.M.g_i)^T = g_i^T.M^T.V^T$ t.j. $G_i(v) = \begin{bmatrix} g_{i0} & g_{i1} & g_{i2} & g_{i3} \end{bmatrix}.M^T.V^T$. Po dosadení do rovnice plochy **r**(*u*, *v*) dostaneme:

$$\mathbf{r}(u,v) = U.M.\begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix}.M^T.V^T, u,v \in \langle 0,1 \rangle \times \langle 0,1 \rangle$$

Po vynásobení matíc *U.M* resp. $(V.M)^T$ dostaneme zmiešavacie funkcie $f_i(u)$, resp. $g_j(v)$ t.j.

$$\mathbf{r}(u,v) = \begin{bmatrix} f_0(u) & f_1(u) & f_2(u) & f_3(u) \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} g_0(v) \\ g_1(v) \\ g_2(v) \\ g_3(v) \end{bmatrix} =$$

$$= f_0(u).g_0(v).g_{00} + \ldots + f_3(u).g_3(v).g_{33} = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} f_i(u).g_j(v).g_{ij}.$$

Súčin funkcií $f_i(u).g_j(v)$ sa nazýva ich *tenzorový súčin*. V prípade, že obe funkcie sú 3. stupňa hovoríme o bikubickom tenzorovom súčine. Prvky $g_{ij}, i = 0,1,2,3, j = 0,1,2,3$ v geometrickej matici určujú *riadiacu sieť plochy*.

Bezierova bikubická plocha

Zmiešavacie funkcie $f_i(u),\ \ g_j(v)$ sú kubické Bernsteinove polynómy. Teda vektorová rovnica:

$$\mathbf{r}(u,v)=\begin{bmatrix} B_{03}(u) & B_{13}(u) & B_{23}(u) & B_{33}(u)\end{bmatrix}.\begin{bmatrix} \mathbf{V}_{00} & \mathbf{V}_{01} & \mathbf{V}_{02} & \mathbf{V}_{03} \\ \mathbf{V}_{10} & \mathbf{V}_{11} & \mathbf{V}_{12} & \mathbf{V}_{13} \\ \mathbf{V}_{20} & \mathbf{V}_{21} & \mathbf{V}_{22} & \mathbf{V}_{23} \\ \mathbf{V}_{30} & \mathbf{V}_{31} & \mathbf{V}_{32} & \mathbf{V}_{33} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} B_{03}(v) \\ B_{13}(v) \\ B_{23}(v) \\ B_{33}(v) \end{bmatrix}$$

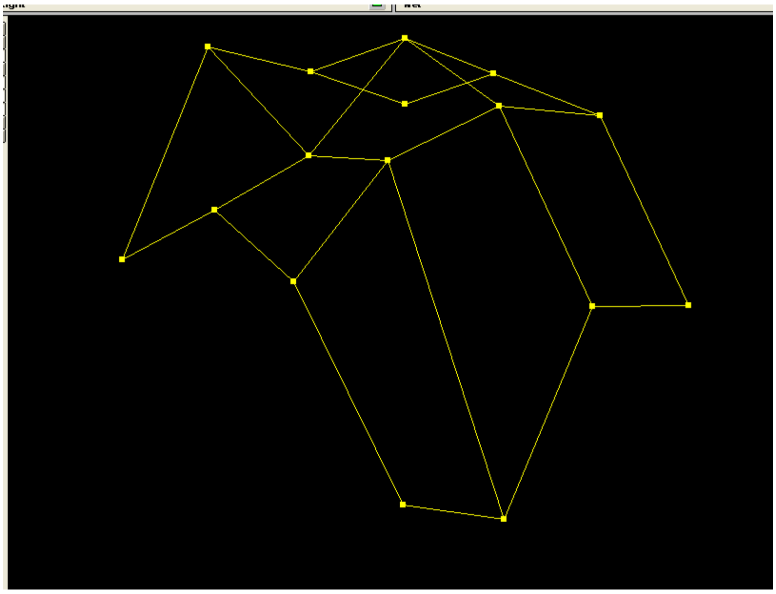
resp.

$$\mathbf{r}(u,v)=\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} B_{i3}(u).B_{j3}(v).\mathbf{V}_{ij}=\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} B_{ij}(u,v)\mathbf{V}_{ij},u,v\in\langle 0,1\rangle\times\langle 0,1\rangle$$

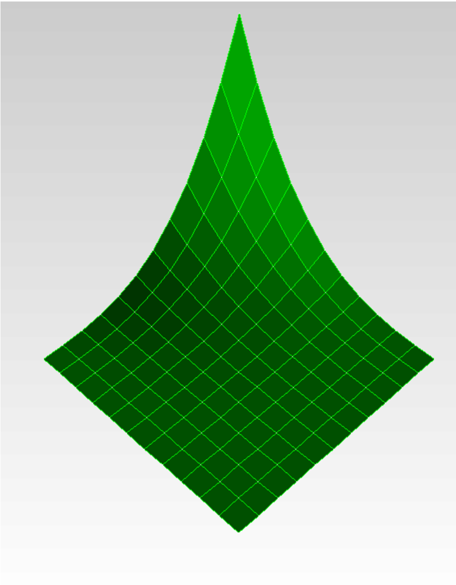
reprezentuje *bikubickú Bezierovu plochu*.

Vlastnosti Bezierovej bikubickej plochy:

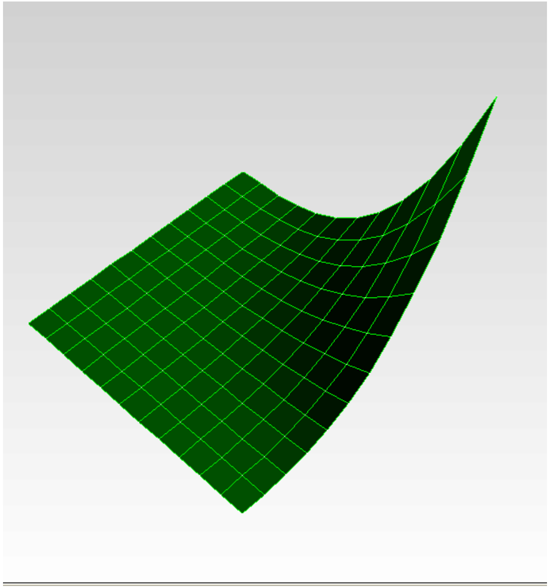
• riadiaca sieť : body $\mathbf{V}_{ij}, i=0,1,2,3,\ j=0,1,2,3$



• <u>konvexný obal</u>: nezápornosť: $B_{i3}(u).B_{j3}(v) \geq 0 \;\; i = 0,1,2,3, \; j = 0,1,2,3$; (obr. a/ $B_{03}(u).B_{03}(v)$
b/ $B_{03}(u).B_{33}(v)$)



a/



b/

rozklad jednotky: $\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} B_{i3}(u).B_{j3}(v) = 1$

Bezierova bikubická plocha leží v konvexnom obale určenom riadiacimi bodmi $\mathbf{V}_{ij}, i = 0,1,2,3, \; j = 0,1,2,3$

• <u>izoparametrické čiary</u> :

<u>*u*- čiara:</u> $v = v_k$

$$\mathbf{r}(u, v_k) = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} B_{i3}(u).B_{j3}(v_k).\mathbf{V}_{ij} = \sum_{i=0}^{3}[\sum_{j=0}^{3} B_{j3}(v_k).\mathbf{V}_{ij}]B_{i3}(u) = \sum_{i=0}^{3} \mathbf{W}_i(v_k)B_{i3}(u)$$

je Bezierova kubika s riadiacimi bodmi $\mathbf{W}_i(v_k) = \sum_{j=0}^{3} \mathbf{V}_{ij}B_{j3}(v_k)$

<u>*v*- čiara</u> : $u = u_k$

$$\mathbf{r}(u_k, v) = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} B_{i3}(u_k).B_{j3}(v).\mathbf{V}_{ij} = \sum_{j=0}^{3}[\sum_{i=0}^{3} B_{i3}(u_k).\mathbf{V}_{ij}]B_{j3}(v) = \sum_{j=0}^{3} \mathbf{Q}_j(u_k)B_{j3}(v)$$

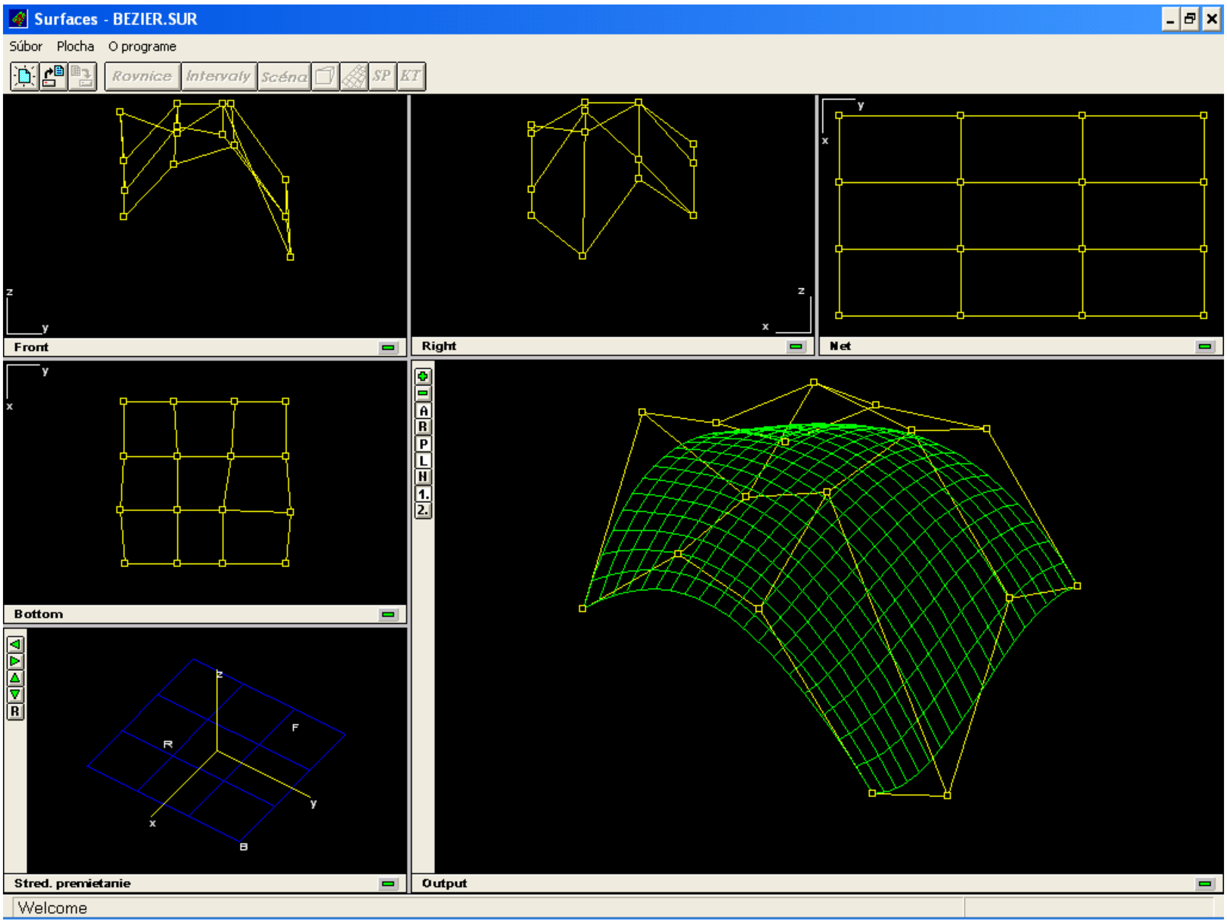
je Bezierova kubika s riadiacimi bodmi $\mathbf{Q}_j(u_k) = \sum_{i=0}^{3} \mathbf{V}_{ij}B_{j3}(u_k)$

• <u>okrajové čiary plochy</u>

<u>*u*- čiary</u> : $\mathbf{r}(u,0) = \sum_{i=0}^{3} B_{i3}(u)\mathbf{V}_{i0}$ $\quad \mathbf{r}(u,1) = \sum_{i=0}^{3} B_{i3}(u)\mathbf{V}_{i3}$

<u>*v*- čiary</u> : $\mathbf{r}(0,v) = \sum_{j=0}^{3} B_{j3}(v)\mathbf{V}_{0j}$ $\quad \mathbf{r}(1,v) = \sum_{j=0}^{3} B_{j3}(v)\mathbf{V}_{3j}$

• <u>rohové body plochy</u>: $\mathbf{r}(0,0) = \mathbf{V}_{00}, \;\; \mathbf{r}(1,0) = \mathbf{V}_{30}, \;\; \mathbf{r}(0,1) = \mathbf{V}_{03}, \;\; \mathbf{r}(1,1) = \mathbf{V}_{33}$ sú body riadiacej siete, ktoré ležia na Bezierovej ploche t.j. plocha ich interpoluje. Ostatné body riadiacej siete plocha aproximuje.



• <u>derivácie Bezierovej bikubickej plochy</u>

<u>v smere parametra *u*</u> **:**

$$\frac{\partial \mathbf{r}(u,v)}{\partial u} = \begin{bmatrix} B_{03}'(u) & B_{13}'(u) & B_{23}'(u) & B_{33}'(u) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{00} & \mathbf{V}_{01} & \mathbf{V}_{02} & \mathbf{V}_{03} \\ \mathbf{V}_{10} & \mathbf{V}_{11} & \mathbf{V}_{12} & \mathbf{V}_{13} \\ \mathbf{V}_{20} & \mathbf{V}_{21} & \mathbf{V}_{22} & \mathbf{V}_{23} \\ \mathbf{V}_{30} & \mathbf{V}_{31} & \mathbf{V}_{32} & \mathbf{V}_{33} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} B_{03}(v) \\ B_{13}(v) \\ B_{23}(v) \\ B_{33}(v) \end{bmatrix} =$$

$$= 3\begin{bmatrix} B_{02}(u) & B_{12}(u) & B_{22}(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \triangle^{1,0}\mathbf{V}_{00} & \triangle^{1,0}\mathbf{V}_{01} & \triangle^{1,0}\mathbf{V}_{02} & \triangle^{1,0}\mathbf{V}_{03} \\ \triangle^{1,0}\mathbf{V}_{10} & \triangle^{1,0}\mathbf{V}_{11} & \triangle^{1,0}\mathbf{V}_{12} & \triangle^{1,0}\mathbf{V}_{13} \\ \triangle^{1,0}\mathbf{V}_{20} & \triangle^{1,0}\mathbf{V}_{21} & \triangle^{1,0}\mathbf{V}_{22} & \triangle^{1,0}\mathbf{V}_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{03}(v) \\ B_{13}(v) \\ B_{23}(v) \\ B_{33}(v) \end{bmatrix}$$

kde $\triangle^{1,0}\mathbf{V}_{ij} = \mathbf{V}_{i+1,j} - \mathbf{V}_{i,j}$. Pretože $\triangle^{1,0}\mathbf{V}_{ij}$ sú vektory, sú uvedené parciálne derivácie Bezierovou plochou 2 x 3 na vektorovej zložke (nie na bodovej).

v smere parametra *v* **:**

$$\frac{\partial \mathbf{r}(u,v)}{\partial v} = \left[B_{03}(u) \quad B_{13}(u) \quad B_{23}(u) \quad B_{33}(u)\right].\begin{bmatrix} \mathbf{V}_{00} & \mathbf{V}_{01} & \mathbf{V}_{02} & \mathbf{V}_{03} \\ \mathbf{V}_{10} & \mathbf{V}_{11} & \mathbf{V}_{12} & \mathbf{V}_{13} \\ \mathbf{V}_{20} & \mathbf{V}_{21} & \mathbf{V}_{22} & \mathbf{V}_{23} \\ \mathbf{V}_{30} & \mathbf{V}_{31} & \mathbf{V}_{32} & \mathbf{V}_{33} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} B_{03}'(v) \\ B_{13}'(v) \\ B_{23}'(v) \\ B_{33}'(v) \end{bmatrix}$$

$$= 3\left[B_{03}(u) \quad B_{13}(u) \quad B_{23}(u) \quad B_{33}(u)\right]\begin{bmatrix} \vartriangle^{0,1}\mathbf{V}_{00} & \vartriangle^{0,1}\mathbf{V}_{01} & \vartriangle^{0,1}\mathbf{V}_{02} \\ \vartriangle^{0,1}\mathbf{V}_{10} & \vartriangle^{0,1}\mathbf{V}_{11} & \vartriangle^{0,1}\mathbf{V}_{12} \\ \vartriangle^{0,1}\mathbf{V}_{20} & \vartriangle^{0,1}\mathbf{V}_{21} & \vartriangle^{0,1}\mathbf{V}_{22} \\ \vartriangle^{0,1}\mathbf{V}_{30} & \vartriangle^{0,1}\mathbf{V}_{31} & \vartriangle^{0,1}\mathbf{V}_{32} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{02}(v) \\ B_{12}(v) \\ B_{22}(v) \end{bmatrix}$$

kde $\vartriangle^{0,1}\mathbf{V}_{ij} = \mathbf{V}_{i,j+1} - \mathbf{V}_{i,j}$ a opäť $\vartriangle^{0,1}\mathbf{V}_{ij}$ sú vektory, teda uvedené parciálne derivácie sú Bezierovou plochou 3 x 2 na vektorovej zložke.

Vyčíslime derivácie v rohových bodoch:
v smere parametra *u* **:**

$$\mathbf{r}_u(0,0) = 3(\mathbf{V}_{10} - \mathbf{V}_{00}), \quad \mathbf{r}_u(1,0) = 3(\mathbf{V}_{30} - \mathbf{V}_{20}), \quad \mathbf{r}_u(0,1) = 3(\mathbf{V}_{13} - \mathbf{V}_{03}), \quad \mathbf{r}_u(1,1) = 3(\mathbf{V}_{33} - \mathbf{V}_{23})$$

v smere parametra *v* **:**

$$\mathbf{r}_v(0,0) = 3(\mathbf{V}_{01} - \mathbf{V}_{00}), \quad \mathbf{r}_v(1,0) = 3(\mathbf{V}_{31} - \mathbf{V}_{30}), \quad \mathbf{r}_u(0,1) = 3(\mathbf{V}_{03} - \mathbf{V}_{02}), \quad \mathbf{r}_u(1,1) = 3(\mathbf{V}_{33} - \mathbf{V}_{32})$$

- zmiešané derivácie Bezierovej bikubickej plochy , vektory twistov

$$\frac{\partial \mathbf{r}^2(u,v)}{\partial u \partial v} = \left[B_{03}'(u) \quad B_{13}'(u) \quad B_{23}'(u) \quad B_{33}'(u)\right].\begin{bmatrix} \mathbf{V}_{00} & \mathbf{V}_{01} & \mathbf{V}_{02} & \mathbf{V}_{03} \\ \mathbf{V}_{10} & \mathbf{V}_{11} & \mathbf{V}_{12} & \mathbf{V}_{13} \\ \mathbf{V}_{20} & \mathbf{V}_{21} & \mathbf{V}_{22} & \mathbf{V}_{23} \\ \mathbf{V}_{30} & \mathbf{V}_{31} & \mathbf{V}_{32} & \mathbf{V}_{33} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} B_{03}'(v) \\ B_{13}'(v) \\ B_{23}'(v) \\ B_{33}'(v) \end{bmatrix}$$

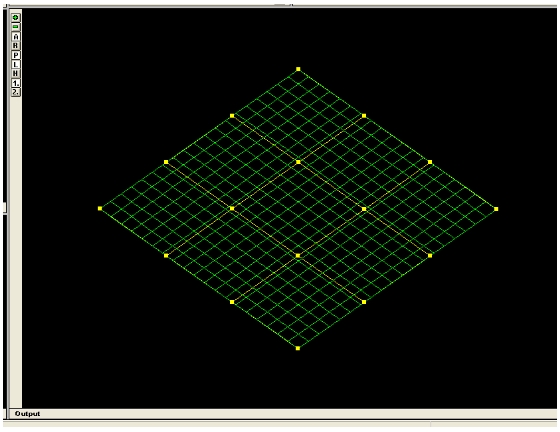
$$= 3.3\left[B_{02}(u) \quad B_{12}(u) \quad B_{22}(u)\right]\begin{bmatrix} \vartriangle^{1,1}\mathbf{V}_{00} & \vartriangle^{1,1}\mathbf{V}_{01} & \vartriangle^{1,1}\mathbf{V}_{02} \\ \vartriangle^{1,1}\mathbf{V}_{10} & \vartriangle^{1,1}\mathbf{V}_{11} & \vartriangle^{1,1}\mathbf{V}_{12} \\ \vartriangle^{1,1}\mathbf{V}_{20} & \vartriangle^{1,1}\mathbf{V}_{21} & \vartriangle^{1,1}\mathbf{V}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{02}(v) \\ B_{12}(v) \\ B_{22}(v) \end{bmatrix}$$

kde $\vartriangle^{1,1}\mathbf{V}_{ij} = \mathbf{V}_{i+1,j+1} - \mathbf{V}_{i+1,j} - \mathbf{V}_{i,j+1} + \mathbf{V}_{i,j}$ a opäť $\vartriangle^{1,1}\mathbf{V}_{ij}$ sú vektory, teda uvedené zmiešané parciálne derivácie sú Bezierovou plochou 2 x 2 na vektorovej zložke.

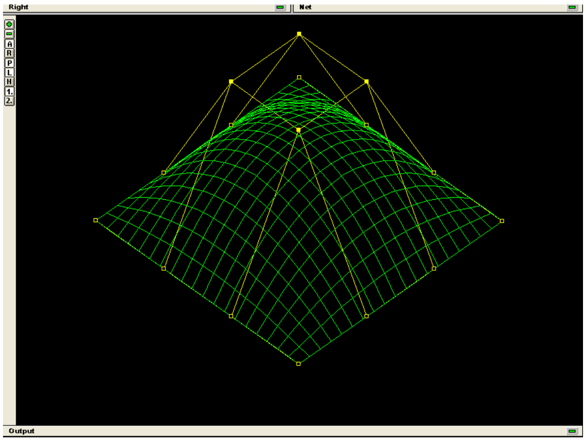
Vektory twistov v rohových bodoch Bezierovej bikubickej plochy:

$$\mathbf{r}_{uv}(0,0) = 9\vartriangle^{1,1}\mathbf{V}_{00}, \quad \mathbf{r}_{uv}(1,0) = 9\vartriangle^{1,1}\mathbf{V}_{20}, \quad \mathbf{r}_{uv}(0,1) = 9\vartriangle^{1,1}\mathbf{V}_{02}, \quad \mathbf{r}_{uv}(1,1) = 9\vartriangle^{1,1}\mathbf{V}_{22}$$

Na obr. A je Bezierova bikubická záplata s nulovými twistami (všetkými) a na obr. B s nenulovými vektormi twistov, ostatné riadiace body siete sú zhodné



Obr.A



Obr.B

Vyčísľovacie algoritmy

<u>Casteljau algoritmus</u> – aplikovaný na izoparametrické čiary plochy

<u>Casteljau algoritmus</u> – bilineárny

Doteraz vyšetrované plochy sú špeciálny prípad bi-*n*-stupňových Bezierovych plôch :

$$\mathbf{b}_{n,n}(u,v)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\mathbf{V}_{ij}B_{i,n}(u)B_{j,n}(v),\quad n\in N;\quad u,v\in\langle 0,1\rangle$$

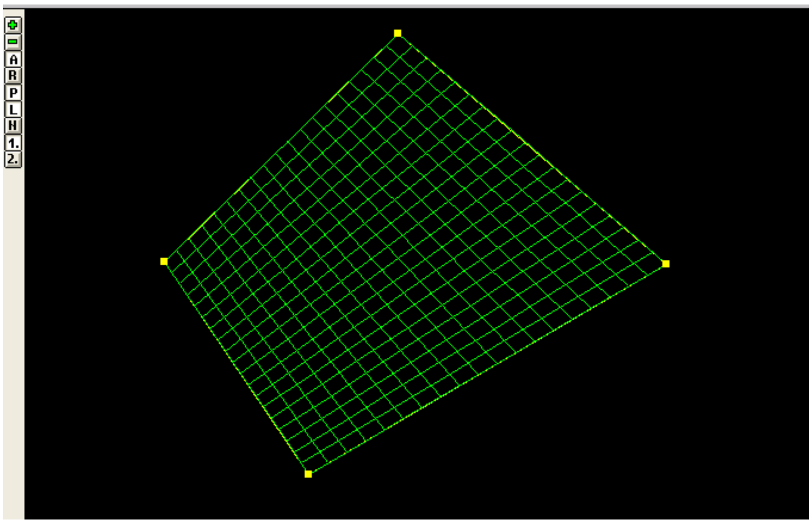
pre n = 1 hovoríme o plochách bilineárnych, pre n = 2 bikvadratických a pre n = 3 o bikubických.

<u>Bilineárna Bezierova záplata</u>

Je plocha určená bilineárnou interpoláciou riadiacich bodov $\mathbf{V}_{ij}, i=0,1,\ j=0,1$:

$$\mathbf{b}_{1,1}(u,v)=\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1}\mathbf{V}_{ij}B_{i,1}(u)B_{j,1}(v)=(1-u)(1-v)\mathbf{V}_{00}+(1-u)v\mathbf{V}_{01}+u(1-v)\mathbf{V}_{10}+uv\mathbf{V}_{11}=$$

$$=\begin{bmatrix}1-u & u\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{V}_{00} & \mathbf{V}_{01}\\ \mathbf{V}_{10} & \mathbf{V}_{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1-v\\ v\end{bmatrix}.$$

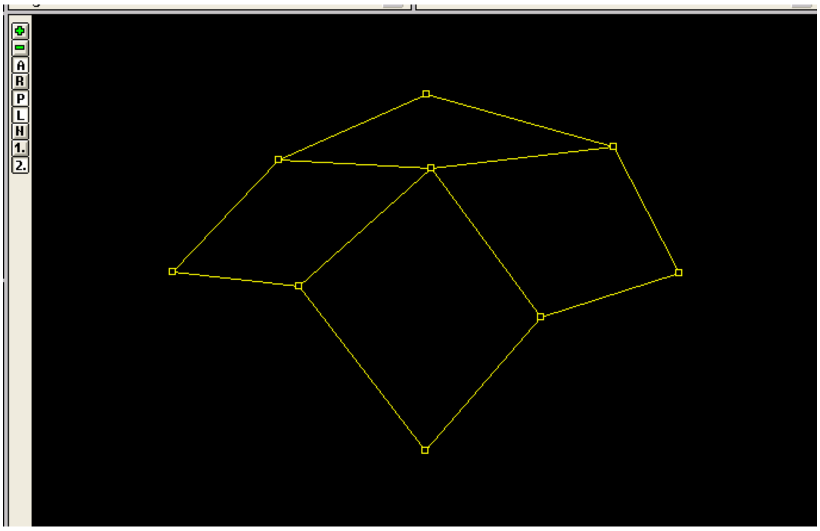


Táto plocha sa považuje za najjednoduchšiu plochu „spájajúcu“ štyri dané body v priestore. Je to priamková plocha, jej okrajové čiary sú úsečky, ale aj jednotlivé izoparametrické čiary. Toto základné vyjadrenie bilineárnej interpolácie použijeme ako *n*-tý krok CA reprezentujúci bod záplaty prislúchajúci parametru $u, v \in \langle 0,1 \rangle \times \langle 0,1 \rangle$.

<u>Bikvadratická Bezierova záplata</u>

Parametrické vyjadrenie pre riadiace body: $\mathbf{V}_{ij}, i = 0,1,2,\ j = 0,1,2$:

$\mathbf{b}_{2,2}(u,v) = \sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{2} \mathbf{V}_{ij} B_{i,2}(u) B_{j,2}(v)$



Riadiaca sieť tejto záplaty má deväť bodov $\mathbf{V}_{ij}, i = 0,1,2,\ j = 0,1,2$, medzi ktorými je osem okrajových a jeden $\mathbf{V}_{11}$ vnútorný. Tieto riadiace body vytvárajú štyri priestorové štvoruholníky: $\mathbf{V}_{00}\mathbf{V}_{10}\mathbf{V}_{01}\mathbf{V}_{11}$, $\mathbf{V}_{10}\mathbf{V}_{20}\mathbf{V}_{11}\mathbf{V}_{21}$, $\mathbf{V}_{01}\mathbf{V}_{11}\mathbf{V}_{02}\mathbf{V}_{12}$, $\mathbf{V}_{11}\mathbf{V}_{21}\mathbf{V}_{12}\mathbf{V}_{22}$.

Ak chceme určiť bod záplaty prislúchajúci bodu $u, v \in \langle 0,1 \rangle \times \langle 0,1 \rangle$, tak aplikujeme na každý 4-uholník bilineárnu (nie lineárnu) interpoláciu.

Získame tak body:

$$\mathbf{V}_{00}^{11}(u,v) = [1-u \quad u]\begin{bmatrix} \mathbf{V}_{00} & \mathbf{V}_{01} \\ \mathbf{V}_{10} & \mathbf{V}_{11} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix} \qquad \mathbf{V}_{01}^{11}(u,v) = [1-u \quad u]\begin{bmatrix} \mathbf{V}_{01} & \mathbf{V}_{02} \\ \mathbf{V}_{11} & \mathbf{V}_{12} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V}_{10}^{11}(u,v) = [1-u \quad u]\begin{bmatrix} \mathbf{V}_{10} & \mathbf{V}_{11} \\ \mathbf{V}_{20} & \mathbf{V}_{21} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix} \qquad \mathbf{V}_{11}^{11}(u,v) = [1-u \quad u]\begin{bmatrix} \mathbf{V}_{11} & \mathbf{V}_{12} \\ \mathbf{V}_{21} & \mathbf{V}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix}$$

Ak na tieto štyri interpolanty opäť aplikujeme bilineárnu interpoláciu, tak dostaneme bod záplaty:

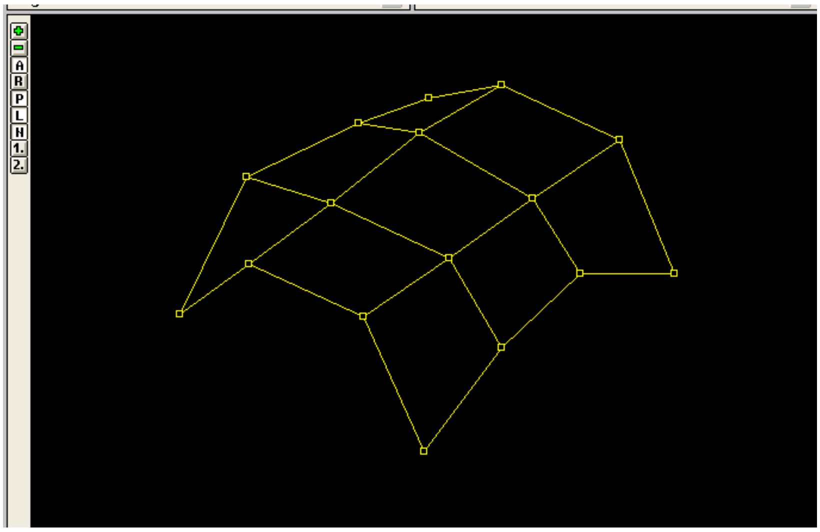
$$\mathbf{V}_{00}^{22}(u,v) = [1-u \quad u]\begin{bmatrix} \mathbf{V}_{00}^{11}(u,v) & \mathbf{V}_{01}^{11}(u,v) \\ \mathbf{V}_{10}^{11}(u,v) & \mathbf{V}_{11}^{11}(u,v) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix}$$

odpovedajúci parametru $u, v \in \langle 0,1 \rangle \times \langle 0,1 \rangle$.

Bikubická Bezierova záplata

Riadiaca sieť má body $\mathbf{V}_{ij}, i = 0,1,2,3,\ j = 0,1,2,3$ a parametrické vyjadrenie:

$$\mathbf{b}_{3,3}(u,v) = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} B_{i3}(u).B_{j3}(v).\mathbf{V}_{ij}$$



Táto záplata je určená 16-timi riadiacimi bodmi, ktoré určia:

- deväť priestorových štvoruholníkov:

$$\mathbf{V}_{00}\mathbf{V}_{10}\mathbf{V}_{01}\mathbf{V}_{11}; \mathbf{V}_{10}\mathbf{V}_{20}\mathbf{V}_{11}\mathbf{V}_{21}; \mathbf{V}_{20}\mathbf{V}_{30}\mathbf{V}_{21}\mathbf{V}_{31};$$
$$\mathbf{V}_{01}\mathbf{V}_{11}\mathbf{V}_{02}\mathbf{V}_{12}; \mathbf{V}_{11}\mathbf{V}_{21}\mathbf{V}_{12}\mathbf{V}_{22}; \mathbf{V}_{21}\mathbf{V}_{31}\mathbf{V}_{22}\mathbf{V}_{32};$$
$$\mathbf{V}_{02}\mathbf{V}_{12}\mathbf{V}_{03}\mathbf{V}_{13}; \mathbf{V}_{12}\mathbf{V}_{22}\mathbf{V}_{13}\mathbf{V}_{23}; \mathbf{V}_{22}\mathbf{V}_{32}\mathbf{V}_{23}\mathbf{V}_{33}$$

ktoré bilineárnou interpoláciou pre $\langle u, v \rangle$ určia

- deväť interpolantov:

$$\mathbf{V}_{00}^{11}; \mathbf{V}_{10}^{11}; \mathbf{V}_{20}^{11};$$
$$\mathbf{V}_{01}^{11}; \mathbf{V}_{11}^{11}; \mathbf{V}_{21}^{11};$$
$$\mathbf{V}_{02}^{11}; \mathbf{V}_{12}^{11}; \mathbf{V}_{22}^{11};$$

ktoré opäť určia štyri priestorové štvoruholníky, ktorých bilineárnymi interpolantami sú

- štyri body:

$$\mathbf{V}_{00}^{22}\mathbf{V}_{10}^{22}\mathbf{V}_{01}^{22}\mathbf{V}_{11}^{22},$$

ktoré pomocou bilineárnej interpolácie určia

- bod: $\mathbf{V}_{00}^{33}$, ktorý je bodom plochy a patrí parametru $u, v \in \langle 0,1 \rangle \times \langle 0,1 \rangle$ t.j. platí

$$\mathbf{b}_{3,3}(u,v) = \mathbf{V}_{00}^{33}(u,v).$$

CA algoritmus má tvar:

<u>Vstup:</u> riadiace body $\mathbf{V}_{ij}, i = 0,1,2,3, \ j = 0,1,2,3$, parameter $u, v \in \langle 0,1 \rangle \times \langle 0,1 \rangle$.

0° : $\mathbf{V}_{ij}^{00}(u,v) = \mathbf{V}_{ij}; i = 0,1,2,3; \ j = 0,1,2,3$

1° : $\mathbf{V}_{ij}^{11}(u,v) = \begin{bmatrix} 1-u & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{ij}^{00}(u,v) & \mathbf{V}_{i,j+1}^{00}(u,v) \\ \mathbf{V}_{i+1,j}^{00}(u,v) & \mathbf{V}_{i+1,j+1}^{00}(u,v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix}; i = 0,1,2, \ j = 0,1,2$

2° : $\mathbf{V}_{ij}^{22}(u,v) = \begin{bmatrix} 1-u & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{ij}^{11}(u,v) & \mathbf{V}_{i,j+1}^{11}(u,v) \\ \mathbf{V}_{i+1,j}^{11}(u,v) & \mathbf{V}_{i+1,j+1}^{11}(u,v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix}; i = 0,1, \ j = 0,1,$

3° : $\mathbf{V}_{00}^{33}(u,v) = \begin{bmatrix} 1-u & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{ij}^{22}(u,v) & \mathbf{V}_{i,j+1}^{22}(u,v) \\ \mathbf{V}_{i+1,j}^{22}(u,v) & \mathbf{V}_{i+1,j+1}^{22}(u,v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix}; i = 0, \ j = 0$

<u>Výstup:</u> $\mathbf{b}_{3,3}(u,v) = \mathbf{V}_{00}^{33}(u,v)$

B-splajnová bikubická záplata

Zmiešavacie funkcie $f_i(u),\ \ g_j(v)$ sú B-splajnové kubické funkcie . Teda vektorová rovnica:

$$\mathbf{s}(u,v)=\begin{bmatrix} N_{03}(u) & N_{13}(u) & N_{23}(u) & N_{33}(u)\end{bmatrix}.\begin{bmatrix} \mathbf{V}_{00} & \mathbf{V}_{01} & \mathbf{V}_{02} & \mathbf{V}_{03} \\ \mathbf{V}_{10} & \mathbf{V}_{11} & \mathbf{V}_{12} & \mathbf{V}_{13} \\ \mathbf{V}_{20} & \mathbf{V}_{21} & \mathbf{V}_{22} & \mathbf{V}_{23} \\ \mathbf{V}_{30} & \mathbf{V}_{31} & \mathbf{V}_{32} & \mathbf{V}_{33}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix} N_{03}(v) \\ N_{13}(v) \\ N_{23}(v) \\ N_{33}(v)\end{bmatrix}$$

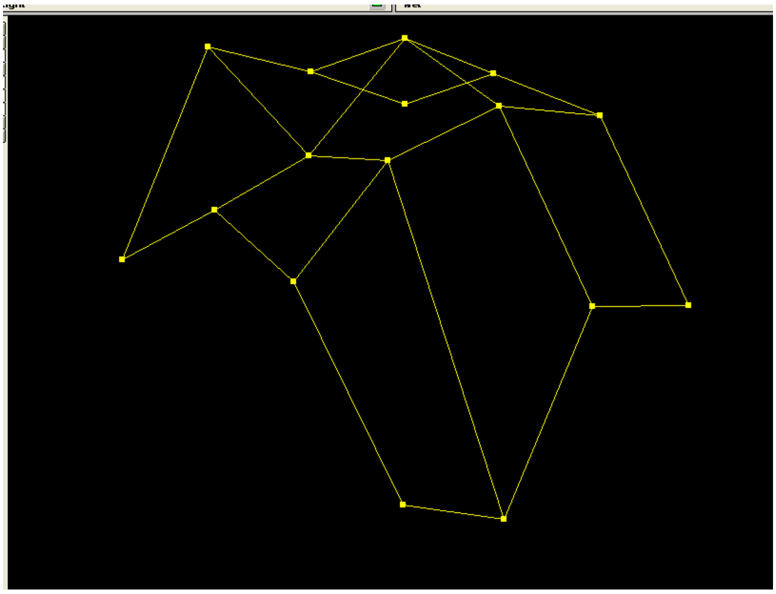
resp.

$$\mathbf{s}(u,v)=\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} N_{i3}(u).N_{j3}(v).\mathbf{V}_{ij}=\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} N_{ij}(u,v)\mathbf{V}_{ij},u,v\in\langle 0,1\rangle\times\langle 0,1\rangle$$

reprezentuje *bikubickú B-splajnovú záplatu*.

Vlastnosti B-splajnovej bikubickej záplaty:

- <u>riadiaca sieť</u> : body $\mathbf{V}_{ij}, i=0,1,2,3,\ j=0,1,2,3$



- <u>konvexný obal</u>: nezápornosť: $N_{i3}(u).N_{j3}(v)\ge 0\ \ i=0,1,2,3,\ j=0,1,2,3$;

  rozklad jednotky: $\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} N_{i3}(u).N_{j3}(v)=1$

  B-splajnová bikubická záplata leží v konvexnom obale určenom riadiacimi bodmi $\mathbf{V}_{ij}, i=0,1,2,3,\ j=0,1,2,3$ riadiacej siete.

- <u>izoparametrické čiary</u> :

  <u>*u*- čiara</u>: $v = v_k$

  $$\mathbf{s}(u,v_k)=\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} N_{i3}(u).N_{j3}(v_k).\mathbf{V}_{ij}=\sum_{i=0}^{3}[\sum_{j=0}^{3} N_{j3}(v_k).\mathbf{V}_{ij}]N_{i3}(u)=\sum_{i=0}^{3}\mathbf{W}_i(v_k)N_{i3}(u)$$

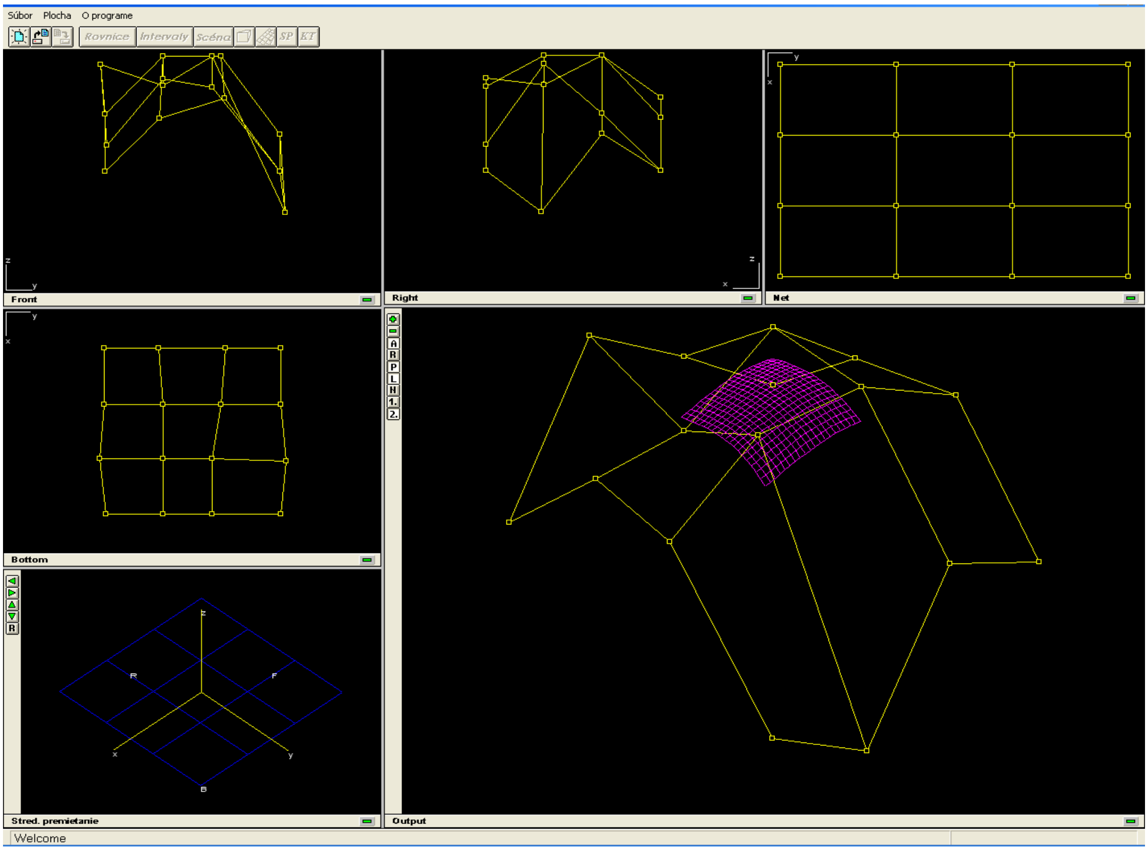
je B-splajnová kubika s riadiacimi bodmi $\mathbf{W}_i(v_k)=\sum_{j=0}^{3}\mathbf{V}_{ij}N_{j3}(v_k)$

<u>*v*- čiara :</u> $u = u_k$

$$\mathbf{s}(u_k,v)=\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}N_{i3}(u_k).N_{j3}(v).\mathbf{V}_{ij}=\sum_{j=0}^{3}[\sum_{i=0}^{3}N_{i3}(u_k).\mathbf{V}_{ij}].N_{j3}(v)=\sum_{j=0}^{3}\mathbf{Q}_j(u_k)N_{j3}(v)$$

je B-splajnová kubika s riadiacimi bodmi $\mathbf{Q}_j(u_k)=\sum_{i=0}^{3}\mathbf{V}_{ij}N_{j3}(u_k)$

- <u>okrajové čiary záplaty</u>
  - <u>*u*- čiary</u> : $\mathbf{s}(u,0)$ $\mathbf{s}(u,1)$
  - <u>*v*- čiary</u> : $\mathbf{s}(0,v)$ $\mathbf{s}(1,v)$
- <u>rohové body záplaty</u>: $\mathbf{s}(0,0)$, $\mathbf{s}(1,0)$, $\mathbf{s}(0,1)$, $\mathbf{s}(1,1)$.



B-splajnová plocha *m* x *n*

B-splajnová bikubická záplata môže byť jedným segmentom B-splajnovej plochy s riadiacou sieťou bodov $\mathbf{V}_{ij}, i=0,\dots,m,\ j=0,\dots,n$, ktorá je definovaná:

$$\mathbf{s}(u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}N_{ip}(u).N_{jq}(v).\mathbf{V}_{ij}$$

s uzlovými vektormi: $U=\{u_0,\dots,u_r\}, r=m+p+1, \quad V=\{v_0,\dots,v_s\}, s=n+q+1$.

V našom prípade $p = q = 3$. Konštrukcia a vlastnosti B-splajnových plôch i vyčísľovanie bodov plochy pomocou de Boorovho algoritmu, ktorý sme si uviedli pri B-splajnových krivkách je v prácach: Piegl: The NURBS-book; Hoschek, Lasser: Fundamentals of CAGD a iných.

Racionálna bikubická Bezierova a B-splajnová záplata

V súlade s konštrukciou racionálnych Bezierovych a B-splajnových kriviek, teraz riadiace body siete $\mathbf{V}_{ij}, i = 0,1,2,3, j = 0,1,2,3$ doplníme váhami w_{ij}, $w_{ij} > 0$, a získame rozšírené afinné súradnice riadiacich bodov siete: $\mathbf{V}_{ij}^{w} = (w_{ij}x_{ij}, w_{ij}y_{ij}, w_{ij}z_{ij}, w_{ij}) = (w_{ij}\mathbf{V}_{ij}, w_{ij})$.

Racionálna bikubická Bezierova plocha je stredový priemet Bezierovej plochy tenzorového súčinu:

$$\mathbf{r}^{w}(u,v) = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} B_{i3}(u).B_{j3}(v).\mathbf{V}_{ij}^{\,w} \quad u,v \in \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$$

do nadroviny s rovnicou $w = 1$:

$$\mathbf{r}(u,v) = \frac{\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} B_{i3}(u).B_{j3}(v).w_{ij}\mathbf{V}_{ij}}{\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} B_{i3}(u).B_{j3}(v).w_{ij}} =$$

$$= \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} R_{ij}(u,v).\mathbf{V}_{ij} \quad u,v \in \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle \text{ kde } R_{ij}(u,v) = \frac{B_{i3}(u).B_{j3}(v).w_{ij}}{\sum_{r=0}^{3}\sum_{s=0}^{3} B_{r3}(u).B_{s3}(v).w_{rs}}$$

sú racionálne funkcie, ale nie sú súčinom zmiešavacích funkcií. Teda plocha $\mathbf{r}(u, v)$ nie je plochou tenzorového súčinu ale plocha $\mathbf{r}^{w}(u, v)$ je plochou tenzorového súčinu.

Predpokladajme, že váhy $w_{ij} > 0$ pre každé i, j, potom vlastnosti uvedené pri neracionálnych Bezierovych plochách môžeme uviesť aj pri racionálnej Bezierovej ploche:

- riadiaca sieť
- konvexný obal
- izoparametrické čiary
- okrajové čiary plochy
- rohové body plochy

Vyčísľovanie bodov

– racionálny Casteljau algotitmus je aplikovaný na izoparametrické čiary plochy.

NURBS- bikubická záplata sa získa ako stredový priemet segmentu B-splajnovej plochy:

$$\mathbf{s}^{w}(u,v) = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} N_{i3}(u).N_{j3}(v).\mathbf{V}_{ij}^{\,w} \quad u,v \in \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$$

do nadroviny s rovnicou $w = 1$:

$$\mathbf{s}(u,v) = \frac{\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} N_{i3}(u).N_{j3}(v).w_{ij}\mathbf{V}_{ij}}{\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} N_{i3}(u).N_{j3}(v).w_{ij}} =$$

$$= \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} R_{ij}(u,v).\mathbf{V}_{ij} \quad u,v \in \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle \text{ kde } R_{ij}(u,v) = \frac{N_{i3}(u).N_{j3}(v).w_{ij}}{\sum_{r=0}^{3}\sum_{s=0}^{3} N_{r3}(u).N_{s3}(v).w_{rs}}.$$

Vlastnosti tejto záplaty ako segmentu NURBS-plochy sú podrobne uvedené v práci Piegl: The NURBS-book.