

POHLKEHO VETA A JEJ VÝZNAM V DIDAKTIKE MATEMATIKY ⁽¹⁾

Zita Sklenáriková, SR – Marta Pémová, SR

Abstrakt

Predložený článok okrem historických poznámok k dôkazu Pohlkeho základnej vety šikmej axonometrie chce poukázať na tesný súvis tejto zobrazovacej metódy s metódou voľného rovnobežného premietania používaného v školskej praxi vo výučbe stereometrie a na problém úplnosti obrazu geometrického útvaru vzhľadom na riešenie polohových, či metrických úloh.

Kľúčové slová: veta Pohlkeho-Schwarzova, historické poznámky, voľné rovnobežné premietanie, úplnosť obrazu útvaru vzhľadom na riešenie polohových a metrických úloh, význam v didaktike matematiky.

1 Z histórie dôkazu Pohlkeho vety

Karl Pohlke (28. 1. 1810 Berlín – 27. 11. 1876 Berlín), profesor deskriptívnej geometrie na technickej vysokej škole v Berlíne-Charlottenburgu, vyslovil už ako učiteľ tamojšej stavebnej akadémie r. 1853 tvrdenie, podľa ktorého možno „ľubovoľný rovinný štvoruholník $O'X'Y'Z'$ považovať za rovnobežný priemet troch navzájom kolmých zhodných úsečiek OX , OY , OZ “ ⁽²⁾. V originálnom znení vety sa nehovorilo o štvoruholníku a mnohí mlčky predpokladali, že ide o pravouhlé premietanie, čo vyvolalo pochybnosti o jej pravdivosti. Možno ich vystopovať v liste, ktorý Pohlkemu napísal Steiner, jeho blízky priateľ ⁽³⁾. To Pohlkeho primälo k podrobnejšiemu skúmaniu podmienok, ktoré musí spĺňať štvorica komplanárnych bodov, aby ju bolo možné považovať za rovnobežný priemet vrcholov štvorstena požadovaných vlastností. Svoje bádania uverejnil r. 1858 v spise „*Zmiešané vety a úlohy*“ ⁽⁴⁾.

Vyučovanie deskriptívnej geometrie na nemeckých stredných školách, akadémiách a vysokých technických školách si vyžadovalo napísanie učebníc pre tento predmet. Na jednej z prvých učebníc pracoval Pohlke od začiatku svojho pôsobenia na akadémii v Charlottenburgu. Jeho dvojdielna učebnica *Deskriptívna geometria* (Darstellende Geometrie) získala vďaka obsahu ⁽⁵⁾, ako aj dôslednému aplikovaniu vedeckých postupov ustanovených v Steinerovom diele „Systematické rozvíjanie“ (Systematische Entwicklung) punc modernosti, ktorý jej zabezpečil dlhotrvajúci úspech. Do prvého dielu, ktorý vyšiel r. 1860 v Berlíne, uviedol Pohlke znenie *základnej vety šikmej axonometrie* (par.113) s upozornením, že elementárny dôkaz vety pravdepodobne neexistuje a preto sa odkladá do druhého zväzku. Prvý diel vyšiel ešte dvakrát (1866, 1872), druhý diel len raz, v roku autorovej smrti. Ešte pred druhým vydaním prvého zväzku učebnice sa objavili aspoň tri elementárne dôkazy „*Pohlkeho vety*“ (takto ju nazvali matematici a deskriptívni geometri, ktorí sa touto tematikou zaoberali). Boli to – v chronologickom poradí – dôkazy J. W. Deschwandena (neúplný dôkaz),

⁽¹⁾ Práca vznikla za podpory grantu č. 1/0262/03.

⁽²⁾ Znenie vety je nepresné, prevzaté z [5]

⁽³⁾ Jacob Steiner (1796 - 1863) – profesor geometrie na berlínskej univerzite, jeden z najvýznamnejších nemeckých geometrov 19. storočia

⁽⁴⁾ Vermischte Sätze und Aufgaben (J. r. ang. Math., LV, 1858, 377)

⁽⁵⁾ V obsahu nechýba uvedenie princípov žiadnej z lineárnych zobrazovacích metód vrátane reliéfnej perspektívy, aplikácií na základné plochy a telesá, rovinné rezy a vzájomné prieniky telies, krivky rovinné i priestorové, plochy rotačné, priamkové, skrutkové atď.

H. Kinkelina⁽⁶⁾ a mladého H. Schwarza, Pohlkeho žiaka, vtedy ešte bez doktorátu. Schwarz bol s Pohlkeho dôkazom oboznámený, nebol ho však schopný reprodukovať. Jeho vlastný dôkaz bol tak geniálne jednoduchý, že ho Pohlke – po vzájomnej dohode – uverejnil v druhom vydaní prvého zväzku *Deskriptívnej geometrie*. Pohlkeho dôkaz uverejnený nebol a zostal ešte viac než desaťročie neznámym.

H. Schwarz⁽⁷⁾ a T. Reye⁽⁸⁾ dokázali zovšeobecnené tvrdenie Pohlkeho vety v nasledujúcom tvare: „*Lubovoľné tri komplanárne úsečky $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ s vlastnosťou, že najviac tri z bodov O' , X' , Y' , Z' sú kolineárne, možno považovať za rovnobežný priemet troch úsečiek OX , OY , OZ (neležiacich v jednej rovine), pre ktoré sú známe pomery ich dĺžok a vzájomné uhly*“. V priebehu ďalšieho polstoročia vyšli mnohé ďalšie dôkazy Pohlkeho-Schwarzovej vety, syntetické i analytické. Pripomeňme si aspoň niektoré z nich.

Jedným z prvých bol dôkaz Karla Pelza⁽⁹⁾, vynikajúceho českého geometra svetového mena, v spise *O novom dôkaze Pohlkeho základnej vety*. Po objavení sa spisu v ňom Schwarz rozpoznal dôkaz totožný s originálnym Pohlkeho dôkazom.⁽¹⁰⁾ Medzery v Deschwandenovom dôkaze sa podarilo odstrániť G. V. Peschkovi⁽¹¹⁾, ktorého dôkaz sa považuje za prvý elementárny dôkaz Pohlkeho vety v Rakúsko-Uhorsku.

Elegantný analytický dôkaz Pohlkeho vety uviedol anglický algebrík a geometer Arthur Cayley⁽¹²⁾. Tiež vrcholný český matematik svojej doby Jan Sobotka⁽¹³⁾ riešil analyticky problém základnej vety axonometrie (pravouhlej i šikmej). Felix Klein, nemecký matematik z prelomu 19. a 20. storočia dokázal, že „*ľubovoľné tri komplanárne vektory, ktoré nie sú všetky kolineárne, možno považovať za obrazy troch jednotkových navzájom kolmých*

⁽⁶⁾ J. W. Deschwenden, profesor deskriptívnej geometrie a riaditeľ polytechniky v Zürichu: *Uplatnenie šikmého rovnobežného premietania v axonometrickom zobrazení* (Anwendung schiefer parallellprojectionen zu axonometrischen Zeichnungen, Natur. Ges. Zürich, VI, 1861, 254 – 284, VII)

H. Kinkelín, profesor priemyslovky v Bazileji: *Šikmé axonometrické premietanie* (Die schiefe axonometrische Projection, Natur. Ges. Zürich, VI, 1861, 358 – 367) – analytické riešenie

⁽⁷⁾ *Elementárny dôkaz Pohlkeho základnej vety axonometrie* (Elementarer Beweis des Pohlke'schen Fundamentalsatzes der Axonometrie, J. r. ang. Math., LXIII, 1863, 309 – 314); Hermann Schwarz (1843 – 1921), žiak Pohlkeho a Weierstrassa. Doktorát získal v Berlíne pod Weierstrassovým vedením. Po krátkom pôsobení v Halle sa stal profesorom matematiky na vysokej škole technickej v Zürichu, v r. 1875 – 1892 pôsobil ako profesor matematiky na univerzite v Göttingene, odkiaľ odišiel na univerzitu do Berlína, kde pôsobil až do smrti. Jeho záujem o geometriu a nezvyčajná schopnosť pretransformovania geometrických úvah do jazyka analýzy ho priviedli k významným výsledkom (napr. Cauchy-Schwarzova nerovnosť, Schwarzova funkcia, atď.).

⁽⁸⁾ T. Reye (1838 – 1919), *Dôkaz Pohlkeho základnej vety axonometrie* (Beweis von Pohlke's Fundamentalsatz der Axonometrie, Vrtlj. Natur. Ges. Zürich, XI, 1866, 350 – 58)

⁽⁹⁾ Karel Pelz (1845 Běleč u Křivokláta – 1903 Praha), Über einen neuen Beweis des Fundamentalsatzes von Pohlke ([6]). Karel Pelz bol absolventom pražskej polytechniky, žiakom W. Fiedlera a K. Küppera. Päť rokov pôsobil ako asistent profesora Küppera v Prahe, neskôr bol profesorom reálky v Těšíne, odkiaľ dostal pozvanie na krajiniskú reálku do Grazu (Štajerský Hradec). V Grazi pôsobil (od r. 1878) na polytechnike ako mimoriadny, a od roku 1881 ako riadny profesor deskriptívnej geometrie. Roky prežité v Grazi boli najplodnejšími a najšťastnejšími rokmi života Karla Pelza, no až r. 1896 sa mu splnil celoživotný sen, keď bol po konkurznom riadení vymenovaný za profesora deskriptívnej geometrie na českej technike v Prahe, kde pôsobil až do smrti.

⁽¹⁰⁾ Zmienil sa o tom v Ges. Mathem. Abhandlungen II, Berlín 1890, 350

⁽¹¹⁾ Gustav Viktor Peschka (1830 – 1903), v tom čase profesor deskriptívnej geometrie na nemeckej technike v Brne a v rokoch 1891 – 1901 profesor a prednosta katedry deskriptívnej geometrie na polytechnike vo Viedni; „*Elementárny dôkaz Pohlkeho základnej vety axonometrie*“ (Elementarer Beweis des Pohlke'schen Fundamentalsatzes der Axonometrie, Stzgsb. Math. Nat., Ak. Wien LXXVIII, 1878, II Abth., 1043 – 54)

⁽¹²⁾ Arthur Cayley (1821 – 1895), *O probléme premietania* (On a problem of projection, The Quart. J. p. appl. Math., XIII, 1875, 19 – 29)

⁽¹³⁾ Jan Sobotka (1862 – 1931), profesor deskriptívnej geometrie na viedenskej polytechnike (1897 – 99), prvý profesor deskriptívnej geometrie na českej technike v Brne a od r. 1904 profesor matematiky na českej univerzite v Prahe; *K matematickému štúdiu axonometrie* (Zur rechnerischen Behandlungen der Axonometrie, Stzgsb. böhm. Ges. Prag, 1900)

vektorov v afinnom zobrazení $f(x, y) = (A_1x + B_1y + C_1z, A_2x + B_2y + C_2z, 0)$, pričom zobrazenie f je kompozíciou istého rovnobežného premietania (do roviny) a dilatácie. ⁽¹⁴⁾

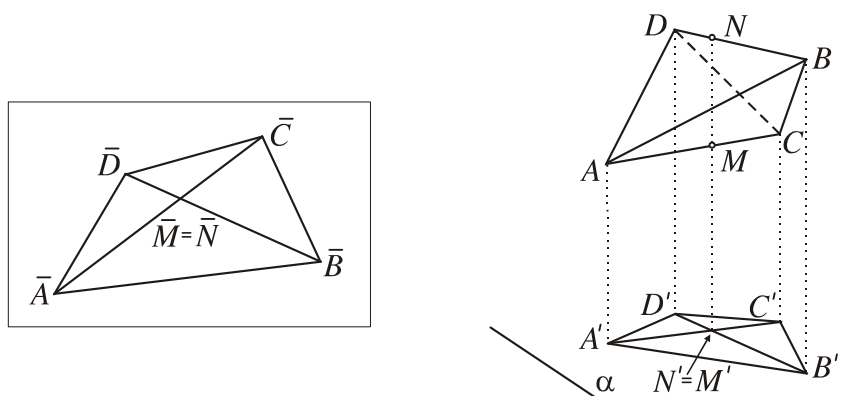
2 Náčrt Schwarzovho dôkazu zovšeobecnenej Pohlkeho vety

Veta 1 (Základná veta šikmej axonometrie): *Vrcholy každého rovinného štvoruholníka možno považovať za rovnobežný priemet vrcholov štvorstena vopred zvoleného tvaru (t. j. podobného ľubovoľnému zvolenému štvorstenu).*

Základom dôkazu vety je fakt, že na každej trojbokej hranolovej ploche 3H existujú všetky druhy trojuholníkov. Vyjadrené exaktne: Ku každej ploche 3H existuje rovina, ktorej prienik s plochou je trojuholník podobný ľubovoľnému trojuholníku. Jednoduchým dôsledkom je nasledujúce tvrdenie.

Veta 2 Nech nH je n -boká hranolová plocha a P_n ľubovoľný rovinný n -uholník, ktorý je afinný ⁽¹⁵⁾ s určujúcim n -uholníkom plochy nH . Potom existuje rovina, ktorej prienik s danou plochou je n -uholník podobný n -uholníku P_n .

Je zrejmé, že stačí dokázať modifikované tvrdenie vety 1, a to, že existuje rovnobežné premietanie, v ktorom priemete (do roviny) vrcholov ľubovoľne zvoleného štvorstena $ABCD$ sú vrcholy štvoruholníka $A_1B_1C_1D_1$ podobného ľubovoľnému danému štvoruholníku $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$. Ak existuje rovnobežné premietanie požadovaných vlastností, tak do priesečníka uhlopriečok predpokladaného štvoruholníka $A_1B_1C_1D_1$ priemetne (dolný index „1“ označuje priemet rovnomeného bodu) sa premietnu dva body: bod M hrany AC a bod N hrany BD (s ňou mimobežnej). Pritom platí: $(A_1C_1M_1) = (\bar{A}\bar{C}\bar{M})$ a $(B_1D_1N_1) = (\bar{B}\bar{D}\bar{N})$ (podobné štvoruholníky) a $(A_1C_1M_1) = (ACM)$ a $(B_1D_1N_1) = (BDN)$ (invariantnosť deliaceho pomeru v rovnobežnom premietaní). Ak teda zostrojíme body M, N tak, aby $(ACM) = (\bar{A}\bar{C}\bar{M})$ a $(BDN) = (\bar{B}\bar{D}\bar{N})$, osnova rovnobežného premietania požadovaných vlastností je určená priamkou MN (obr. 1). Premietacie priamky vrcholov štvorstena $ABCD$ sú hranami štvorbokej hranolovej plochy 4H , ktorá je hranicou premietacieho útvaru daného štvorstena. Ľubovoľný rovinný rez plochy rovinou α rovnobežnou s priamkou MN je štvoruholník $A'B'C'D'$ afinný s daným štvoruholníkom $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$. Platí totiž: $(ACM) = (A'C'M')$ a $(BDN) = (B'D'N')$ ($\bar{A}\bar{C}\bar{M}$) a $(\bar{B}\bar{D}\bar{N})$; posledné rovnosti vo výrazoch vyjadrujú nutnú i dostačujúcu podmienku pre to, aby štvoruholníky $A'B'C'D'$ a $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ boli afinnými. Záver je dôsledkom vety 2.



Obr. 1

⁽¹⁴⁾ *Elementárna matematika z vyššieho hľadiska* [4]; Felix Klein (1849 – 1925), profesor univerzity v Erlangene a Göttingene; všeobecne známy sa stal jeho tzv. „Erlangenský program“ (inauguračná prednáška: *Porovnávacie úvahy o novších geometrických bádaniach* (Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, 1842), v ktorom načrtol program prestavby geometrie podľa charakteristických grúp transformácií.)

⁽¹⁵⁾ Dva n -uholníky nazývame afinnými, ak existuje afinita (bijektívne afinné zobrazenie) zobrazujúca jeden z nich do zvyšného.

3 Význam Pohlkeho-Schwarzovej vety v didaktike matematiky

Pohlkeho-Schwarzova veta je fundamentálnou vetou zobrazovacej metódy *šikmej axonometrie*. S princípom metódy sa možno oboznámiť napr. v [2], [7], [10].⁽¹⁶⁾ Ide o bijektívne bodové zobrazenie útvarov trojrozmerného rozšíreného euklidovského priestoru $\bar{E}_3$ na určité útvary v nákrese, pričom zobrazovaný útvar je pevne zviazaný s daným ortonormálnym súradnicovým štvorstenom $OE^x E^y E^z$.⁽¹⁷⁾ Obrazom vlastného bodu priestoru je usporiadaná dvojica bodov pozostávajúca a) z *axonometrického* (rovnobežného) *priemetu bodu* do axonometrickej [= hlavnej] priemetne a b) z *axonometrického pôdorysu bodu*, ktorý je axonometrickým priemetom kolmého priemetu daného bodu do pomocnej priemetne $\pi = \overrightarrow{OE^x E^y}$;⁽¹⁸⁾ táto dvojica bodov alebo leží na priamke pevnej osnove (prvá ordinála bodu) alebo sú oba body totožné.

Aký je súvis zobrazovacej metódy šikmej axonometrie a tzv. *voľného rovnobežného premietania* používaného v školskej praxi na ilustráciu riešenia úloh *stereometrie* (elementárnej geometrie trojrozmerného euklidovského priestoru E_3)? Súvislosť je veľmi tesná. Algoritmy riešenia úloh a metódy sú temer totožné (formálna odlišnosť je v názvoch objektov), dokonca v riešení jednotlivých úloh polohy sa v nákrese použije tá istá konfigurácia priamok. Možno povedať, že metóda axonometrie je teoretickým zázemím pre zobrazovanie priestorových geometrických útvarov vo voľnom rovnobežnom premietaní. Oboznámenie sa vyučujúceho s jej základmi umožňuje zefektívnenie práce v procese *vyučovania-osvojovania* poznatkov hlavne z oblasti stereometrie⁽¹⁹⁾. Záverečné poznámky (1 – 3) sú pokusom o *definovanie niektorých problémov* súvisiacich s konštrukciou obrazov geometrických útvarov vo voľnom rovnobežnom premietaní v riešení stereometrickej úlohy a načrtnutie možných východísk pre ich riešenie.

1. Mimoriadne dôležitým problémom je *správne zadanie úlohy* (z hľadiska základnej klasifikácie stereometrických úloh na úlohy zaoberajúce sa vzájomnou polohou geometrických útvarov – *polohové úlohy a metrické úlohy*⁽²⁰⁾). Na to je potrebné, aby bol vyučujúci oboznámený s pojmom *úplnosti obrazu* daného *geometrického útvaru* vzhľadom na riešenie polohových, či metrických úloh ([2], [9]). Napríklad obraz hranola H (${}^1A^2A \dots {}^nA, {}^1\bar{A}$) (kde ${}^1A^2A \dots {}^nA$ je podstavový n -uholník a ${}^1A^1\bar{A}$ je bočnou hranou telesa) je *vzhľadom na riešenie polohových úloh úplný*, ak sú dané: rovnobežné priemety troch vrcholov podstavy, priemet jedného z vrcholov druhej podstavy (ležiaceho s jedným z troch vybraných bodov na tej istej hrane telesa) a „tvar“ n -uholníka ${}^1A^2A \dots {}^nA$ v prípade $n > 3$ ⁽²¹⁾. Analogicky je obraz ihlana I (${}^1A^2A \dots {}^nA, V$) (kde ${}^1A^2A \dots {}^nA$ je podstavový

⁽¹⁶⁾ Metóda axonometrie si nevyžaduje poznanie žiadnej zo zobrazovacích metód deskriptívnej geometrie; vyžaduje ovládanie stereometrie (vrátane pojmu rovnobežného premietania, jeho invariantných vlastností a základných pojmov súvisiacich so zobrazením jednoduchých geometrických útvarov a z nich odvodených telies v rovnobežnom premietaní).

⁽¹⁷⁾ Ide o štvorsten, v ktorom sú všetky hrany incidentné so spoločným bodom O navzájom kolmé a zhodné.

⁽¹⁸⁾ Bijektívnosť priradenia je zabezpečená aj v prípade voľby ľubovoľného afinného súradnicového štvorstena; kolmé premietanie do pomocnej priemetne π zastupuje rovnobežné premietanie do tejto roviny s osnou premietania danou súradnicovou osou OE^z . Tiež pomocné premietanie do roviny π by mohlo byť stredovým premietaním. V oboch prípadoch ide o tzv. *vnútorné premietanie*, ktoré súvisí so zobrazením hranolov a ihlanov.

⁽¹⁹⁾ Samozrejým predpokladom je, že učiteľ pozná *systém* elementárnej geometrie euklidovskej roviny E_2 a trojrozmerného euklidovského priestoru E_3 (*stereometrie*) na zodpovedajúcej úrovni (napr. [11], [8], [3]).

⁽²⁰⁾ Metrickou úlohou v stereometrii nie je výpočtová úloha, ktorej riešenie spočíva v jednoduchom dosadení do vzorcov (napr. určenie objemu kvádra s danými dĺžkami hrán a pod.), t. j. úloha, na riešenie ktorej nie je potrebná žiadna *stereometrická konštrukcia*.

⁽²¹⁾ To znamená, že daný ľubovoľný n -uholník je podobný n -uholníku ${}^1A^2A \dots {}^nA$ ($n > 3$). Stačilo by poznať n -uholník afinný s podstavovým n -uholníkom (o čom ale nemá zmysel uvažovať v školskej praxi). Užitočným je však nácvik doplnenia zvolenej trojice priemetov vrcholov podstavy tak, aby útvar po doplnení mohol byť považovaný za rovnobežný priemet pravidelného päť- či šesťuholníka alebo lichobežníka daného tvaru.

n -uholník a bod V hlavný vrchol) úplný vzhľadom na riešenie polohových úloh, ak sú dané: priemety troch vrcholov podstavy, priemet hlavného vrcholu telesa a tvar podstavového n -uholníka. Rovnobežné priemety spomenutých štyroch bodov si možno (v oboch prípadoch) zvoliť ľubovoľne *vhodne* (veta *Pohlkeho-Schwarzova*). Každý ďalší geometrický útvar (priamka, rovina, atď.), vystupujúci v zadaní úlohy musí však byť určený bodmi pevne spojenými s telesom (t. j. môžu to byť body ležiace na priamkach incidentných s hranami alebo v rovinách incidentných so stenami, prípadne s ľubovoľnými dvoma bočnými hranami telesa, atď.). Podstatné je, že každý bod M budeme môcť dourčiť usporiadanou dvojicou bodov, a to jeho rovnobežným priemetom M' a rovnobežným priemetom M'_1 pomocného priemetu M_1 bodu M do roviny podstavy telesa. Toto pomocné (vnútorné) premietanie je v prípade hranolov určené osnovou *bočných hrán* a v prípade ihlanov ide o stredové premietanie so stredom v *hlavnom vrchole* telesa.

Aj odpoveď na otázku *úplnosti obrazu útvaru U vzhľadom na riešenie metrických úloh* (vrátane úloh súvisiacich s kolmosťou základných geometrických útvarov) dáva zobrazovacia metóda šikmej axonometrie: *treba poznať* rovnobežný priemet takzvaného *ortonormálneho štvorstena* (t. j. štvorstena, v ktorom sú všetky hrany incidentné s tým istým vrcholom navzájom kolmé a zhodné), ktorý je pevne spojený s útvarom U ⁽²²⁾. Tento poznatok vyjasňuje, prečo sú *kocka*, *kváder* daných rozmerov alebo *pravidelný ihlan* s danou hranou a výškou (teda implicitne tiež *kocka*), tak obľúbenými telesami pri ilustrácii riešenia metrických (žiaľ, i polohových!) stereometrických úloh. Vyhnúť sa neželanému stereotypu by umožnilo a) v riešení polohových úloh viac pracovať s rovnobežnostami, šikmými hranolmi, ľubovoľnými ihlanmi (s predpísanou pravidelnou podstavou alebo podstavou daného tvaru) vrátane štvorstenov ⁽²³⁾; b) v riešení metrických úloh by nacvičovanie algoritmov riešenia úloh o základných geometrických útvaroch mohlo štartovať z daného rovnobežného priemetu súradnicového štvorstena.

2. Po oboznámení sa s Pohlkeho vetou si iste každý čitateľ uvedomuje nenáležitosť požiadaviek, či príkazov na narysovanie „*správneho*“ rovnobežného priemetu kocky (dodržiavaním nezmyselných pravidiel na „skracovanie“ hrán kolmých na priemetňu, používaním uhlomeru na nameranie predpísaného uhla, ap.). Rovnako neprípustným je vyžadovať od žiaka rozpoznanie objektu z jeho – síce úplného obrazu vzhľadom na riešenie polohových, no neúplného vzhľadom na riešenie metrických úloh. Bude veľmi potešujúce, keď sa nájdu učitelia, ktorí po takto zámerne položenej *provokačnej otázke* vyhodnotia ako najlepšie odpovede typu „*nemôžem to vedieť*“, „*mohlo by to byť všeličo*“, Kiež by sa čoraz viac žiakov mohlo tešiť z takých učiteľov a obrátene!
3. Starší žiaci by si mali osvojiť, že vo voľnom rovnobežnom premietaní nejde o premietanie pravouhlé. Konštrukcia kolmého priemetu troch navzájom kolmých zhodných úsečiek so spoločným krajným bodom (vo všeobecnej polohe) nie je totiž celkom elementárna a vyžaduje poznatky presahujúce rámec stredoškolskej geometrie ([1], [2], [9], [10]). ⁽²⁴⁾

⁽²²⁾ Požiadavka úplnosti útvaru U vzhľadom na riešenie polohových úloh je splnená automaticky. Zrejma je výhodnosť voľby jednej steny základného telesa (prípadne viacerých stien) v rovine steny (stien) spomenutého štvorstena.

⁽²³⁾ Štvorsten si zasluhuje pozornosť už tým, že je najjednoduchším základným telesom (analogón trojuholníka v planimetrii). Pozornosť si zasluhujú i pozoruhodné metrické vlastnosti niektorých špeciálnych druhov štvorstenov.

⁽²⁴⁾ Vlastnosť kolmého priemetu troch navzájom kolmých a zhodných úsečiek vyjadruje základná veta kolmej axonometrie (Gaussova), ako aj veta o štvorcach pomerov skrátenia danej axonometrie (Weisbachova) ([1], s. 307 – 310; [2], s. 100, 108; [10], s. 119) alebo veta o pravouhlom priemete kružnice neležiacej v premietacej rovine ani v rovine s priemetňou rovnobežnej ([9], s. 165).

Literatúra

1. Dörrie, H.: *100 Great Problems of Elementary Mathematics*. Dover, New York 1965, ISBN 0-486-61348-8
2. Glazunov, E. A. – Četveruchin, N. F.: *Axonometrija*. Gos. Iz. T.-Teoret. Lit., Moskva 1953
3. Hartshorne, R.: *Geometry: Euclid and beyond*. Springer, Berlin 2000, ISBN 0-387-98650-2
4. Klein, F.: *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte*, *Geometrie II*. Berlin 1925; preklad: Nauka, Moskva 1987
5. Loria, G.: *Storia della Geometria Descrittiva*. Ulrico Hoepli, Milano 1921
6. Pelz, K.: *Über einen neuen Beweis des Fundamentalsatzes von Pohlke*. Stzgsb. Math. Nat., Akad. der W. LXXVI, Wien 1877, 123 - 138
7. Pémová, M.: *Kosouhlá axonometria – Pohlkeho veta*. Dipl. p., FMFI UK, Bratislava 2004
8. Perepjolkin, D., I.: *Kurs elementarnoj geometrii II*. Gos. Iz. Tech. Teor. Lit., Moskva 1949
9. Piják, V. a kol.: *Konštrukčná geometria*. SPN, Bratislava 1985
10. Sklenáriková, Z.: *Zobrazovacie metódy II*. Skriptum, vyd. UK, Bratislava 1980
11. Sklenáriková, Z. – Čižmár, J.: *Elementárna geometria euklidovskej roviny*. Skriptum, vyd. UK, Bratislava 2002, ISBN 80-223-1585-0, II. vyd. 2005, ISBN 80-223-2020-X

The Pohlke-Schwarz Theorem and its Significance in the Didactic of Mathematics

As soon as the first volume of “Descriptive Geometry” by *Karl Pohlke* (1810 – 1876) had appeared (Berlin, 1860), inclusive the fundamental theorem of oblique axonometry with a note that “*the proof of the theorem probably could not be accomplished in an elementary way and that was why it was taken off for the second volume of the book*”, both synthetic and analytic proof has been made by many mathematicians (even these renowned ones) within the time period longer than half a century. The paper presents – besides the history of proofs of the Pohlke’s Theorem – the genial elementary proof of the generalized statement introduced by a young disciple of Pohlke, *H. A. Schwarz* (1843 – 1921) in 1864. The main goal of this paper is to point out the close connection between the method of oblique axonometry and a “free” parallel projection used in school practices within the tuition in stereometry. In conclusion there are notes on the problem of the completeness of the oblique image of a geometrical figure (considering the problems of geometry of position as well as problems involving perpendicularity and metrical problems).

Key words: the Pohlke-Schwarz Theorem, historic notes, “free” parallel projection, on the problem of the completeness of the oblique image of a geometrical figure with respect to problems of geometry of position and metrical problems.
