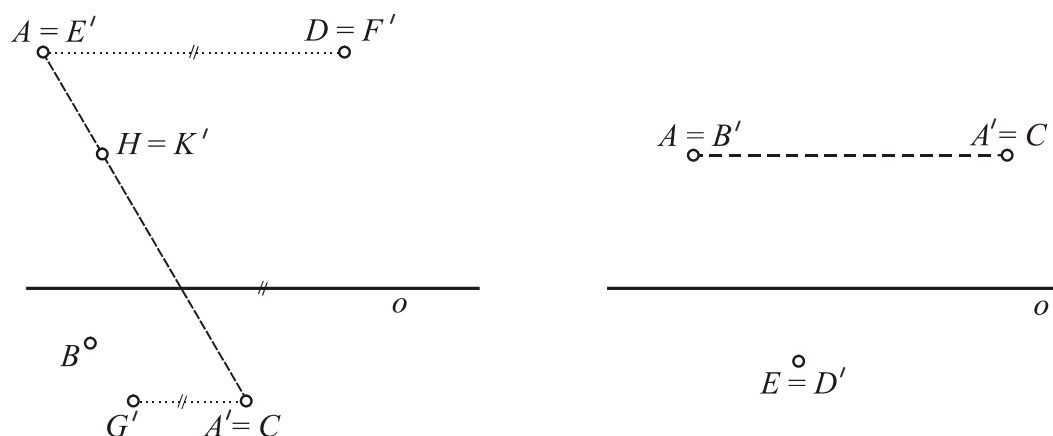


## Perspektívna afinita medzi dvoma rovinami (Cvičenia)

1. a) Vyjadrite nevyhnutnú a dostačujúcu podmienku na to, aby bolo možné utvoriť kompozíciu dvoch afinných zobrazení  $f = {}^2f \circ {}^1f$ , ak  ${}^1f: (\alpha) \rightarrow (\alpha_1)$ ,  ${}^2f: (\beta) \rightarrow (\beta_2)$ .  
b) Nech každé z rovinných polí  $(\alpha_1)$ ,  $(\beta_2)$  z a) obsahuje nekonečne mnoho bodov. Môže byť  ${}^2f \circ {}^1f (\alpha)$  jednobodová množina? (Uveďte príklad.)
2. Nech je  $f$  rovnobežné premietanie v rovine  $\alpha$  na priamku  $p$  tejto roviny dané osnou priamkou  $m$  ( $m \subset \alpha \wedge m \nparallel p$ ) (osnova premietania  $f$ ). Dokážte, že  $f$  je afinné zobrazenie. V ktorom prípade sa trojica kolineárnych bodov zobrazí do toho istého bodu?
3. Dokážte, že všetky neidentické zhodnostné a podobnostné zobrazenia medzi dvoma rovinami (i v tej istej rovine) sú afinitami.
4. Vymenujte známe neidentické zhodnostné zobrazenia roviny na seba a určite samodružné body a priamky nasledujúcich z nich: posunutie, otočenie so stredom  $S$  o uhol  $\alpha$  ( $|\alpha| \neq \pi$ ), stredová súmernosť, osová súmernosť s osou  $o$ , rovnol'ahlosť so stredom v bode  $S$  a charakteristikou  $k$  ( $|k| \neq 1$ ). Ktoré zo samodružných prvkov sú silno samodružné, a ktoré sú slabo samodružnými prvkami zobrazenia? Uveďte príklady rovinných útvarov, ktoré sú samodružnými útvarmi v danom zobrazení.
5. Dané sú body  $A, B \neq A$  a kladné reálne číslo  $\lambda$  ( $\lambda \neq 1$ ). Zostrojte bod  $M$  tak, aby  $(ABM) = \lambda$ . (Zvoľte si najprv  $\lambda = p/q$ , kde  $p, q$  sú celé kladné čísla.)
6. Vykonajte dôkaz bodu 3 z vety 1.1 učebného textu [1].
7. Pomer obsahov rovinných útvarov tej istej roviny  $\alpha$  je invariantom ľubovoľnej afinity  $f: (\alpha) \rightarrow (\alpha_1)$ .
8. Daný je rovnobežník, ktorého dve strany tvoria ľubovoľné združené polpriemery danej elipsy. Určite jeho obsah, ak  $2a, 2b$  sú dĺžky osí elipsy.
9. „Medzi rovnobežnými priemetmi útvarov roviny  $\alpha$ , ktorá nie je premietacia ani rovnobežná s priemetňou, a medzi otočenými polohami týchto bodov v otáčaní roviny  $\alpha$  do priemetne je vzťah perspektívnej afinity, ktorej osou je priesečnica roviny  $\alpha$  s priemetňou“. Dokážte! O akú afinitu ide v prípade kolmého premietania?
10. Nech  $f: (\alpha) \rightarrow (\alpha_1)$  je perspektívna afinita súmiestnych rovinných polí s osou  $o$ , osnou  $\{m\}$  slabo samodružných priamok a charakteristikou  $k$  ( $k \notin \{0, 1\}$ ). Zostrojte obraz, resp. vzor ľubovoľného bodu  $M$ , resp.  $K_1$  neležiacich na osi afinity. Zvoľte si  $k$  ľubovoľné racionálne číslo kladné i záporné.
11. V danej perspektívnej afinite  $f(o; A, A')$  dvoch súmiestnych rovinných polí zostrojte obraz (vzor) ľubovoľného bodu a priamky. V prípade b) ide o eláciu; v prípade a) si zvoľte usporiadanú dvojicu bodov  $A, A'$  tak, aby úsečka  $AA'$  nemala s osou  $o$  žiaden spoločný bod. Priamky si v oboch prípadoch zvoľte ľubovoľne. (Obr. 1a, b)

12. Daná je ľubovoľná nekolineárna trojica bodov  $A, B, C$ , resp.  $A, B, S$ . Doplňte túto trojicu bodov na  $n$ -ticu  $A, B, C, D, E, F, \dots$  tak, aby útvar  $ABCDEF\dots$  bol rovnobežným priemetom pravidelného  $n$ -uholníka (bod  $S$  je priemetom jeho stredu). Úlohu vyriešte pre euklidovsky zostrojiteľné  $n$ -uholníky v intervale  $3 < n < 10$ .

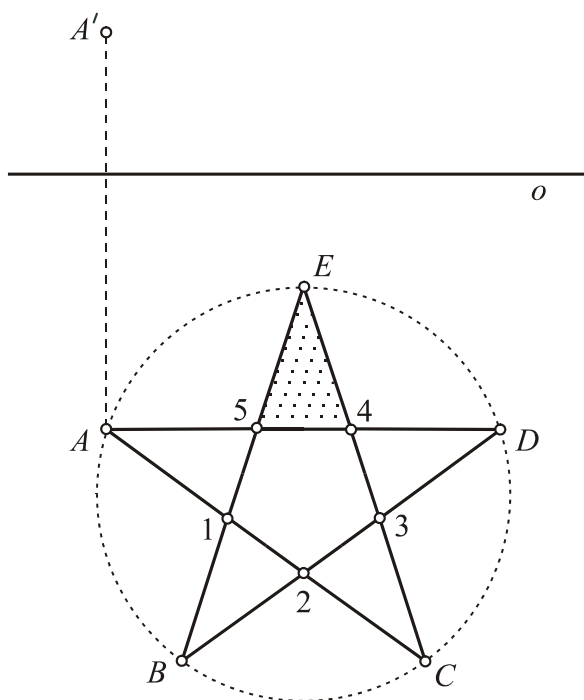


Obr. 1a, b

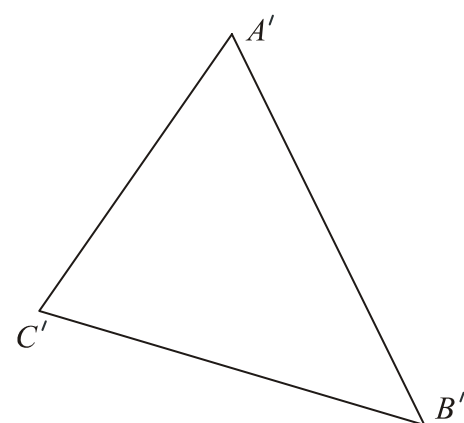
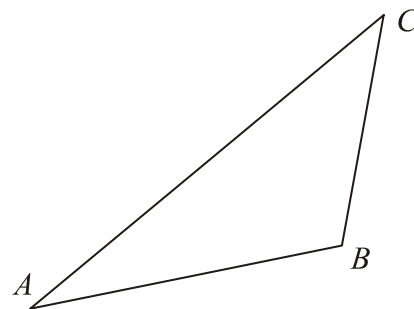
13. V ľubovoľnej perspektívnej afinite dvoch súmestných rovinných polí zobrazte ľubovoľný pravidelný  $n$ -uholník ( $n = 4, 5, 6$ ) a kružnicu doň vpísanú. (Pravouhlú afinitu si zvolte najviac v jednom prípade.)
14. V pravouhlej perspektívnej afinite  $f(o; A, A')$  dvoch súmestných rovinných polí zobrazte pravidelný hviezdicový nejednoduchý päťuholník  $ACEBD$  a kružnicu jemu opísanú. Vyšrafujte trojuholníky, ktoré zostanú z pravidelného jednoduchého hviezdicového desaťuholníka  $A_1B_2C_3D_4E_5$  po vybratí päťuholníka  $12345$  (Obr. 2).
15. Daná je afinita  $f: (\alpha) \rightarrow (\alpha')$  dvoch súmestných rovinných polí trojuholníkom  $ABC$  a jeho obrazom  $A'B'C'$ . Zobrazte v danej afinite kružnicu  $k$  opísanú (vpísanú) trojuholníku  $ABC$ . Zostrojte hlavné smery afinity  $f$ . (Obr. 3)
16. Daný je rovnobežník  $ABCD$  a priamka  $o$  roviny  $\alpha = \overline{ABC}$ . Dourčite perspektívnu afinitu  $f(o; A, ?)$  v rovine  $\alpha$  tak, aby zobrazila daný rovnobežník do štvorca. Koľko má úloha riešení? (Obr. 4)<sup>1</sup>
17. Dané sú kolineárne body 1, 2, 3, 4 v danom poradí. Zostrojte štvorec  $ABCD$  tak, aby priamky incidentné s dvojicami rovnobežných strán štvorca prechádzali dvojicami bodov 1, 2; 3, 4. (Obr. 5)<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Návod: Stačí zostrojiť ramená dvoch uhlov so spoločným vrcholom v jednom z vrcholov daného rovnobežníka, ktoré sa majú zobrazit' do pravých uhlov.

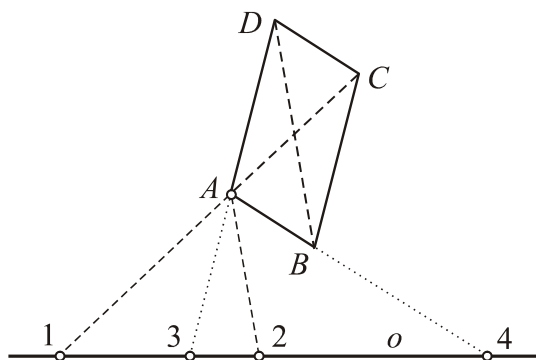
<sup>2</sup> Návod: Stačí zostrojiť ľubovoľný rovnobežník, ktorého dvojice rovnobežných strán majú požadovanú vlastnosť a ďalej pokračovať podľa predchádzajúceho cvičenia.



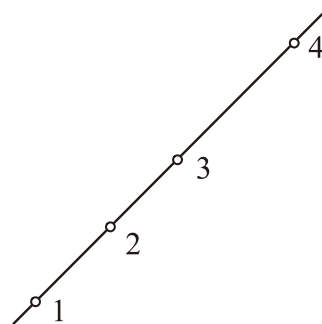
Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4

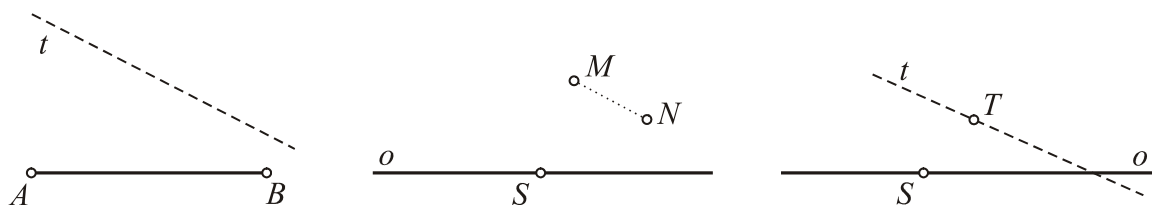


Obr. 5

18. Daná je elipsa  $k$  osami  $AB$ ,  $CD$  ( $AB > CD$ ) a jej sečnica  $m$  ( $l$ ) rovnobežná s hlavnou (vedľajšou) osou elipsy. Zostrojte priesečníky:  $m \cap k$ ,  $l \cap k$  a dotýčnice elipsy v týchto bodoch bez rysovania elipsy.<sup>3</sup>
19. Pre elipsu z cvičenia 18 zostrojte dotýčnice prechádzajúce ľubovoľným bodom  $P$  ( $Q$ ), pre ktorý platí:  $(ABP) = k > 0$  ( $(CDQ) = l > 0$ ).

<sup>3</sup> Použite trojuholníkovú konštrukciu elipsy (par. 2.1 učebného textu [1])

20. Zostrojte dotyčnice elipsy  $k$  určenej osami  $AB$ ,  $CD$  ( $AB > CD$ ), ktoré: a) sú rovnobežné s ľubovoľnou danou priamkou  $m$ , ktorá je rôznobežná s osami elipsy; b) prechádzajú ľubovoľným bodom  $M$  neležiacim na priamkach incidentných s osami elipsy  $k$ .<sup>4</sup>
21. Analogické úlohy ako v cvičeniach 18, 19 riešte pre elipsu  $k$  určenú dvojicou združených priemerov  $KL$ ,  $MN$  ( $MN \perp KL$ ), pričom platí:  $m \parallel KL$ ,  $l \parallel MN$ ,  $(ABP) > 0$  ( $(CDQ) > 0$ ).
22. Zostrojte dotyčnice elipsy  $k$  určenej združenými priermi  $KL$ ,  $MN$ , ktoré: a) sú rovnobežné s ľubovoľnou danou priamkou  $m$ ; b) prechádzajú ľubovoľným bodom  $P$ . (Priamka  $m$  a bod  $P$  nemajú žiadnu z polôh z cvičenia 21.
23. Elipsa  $k$  je daná osami  $AB$ ,  $CD$ . Zostrojte dvojicu jej zhodných združených priemerov.
24. Daná je elipsa  $k$  združenými priermi  $KL$ ,  $MN$  ( $MN \perp KL$ ). Zostrojte jej dotyčnice kolmé na jeden z priemerov.<sup>5</sup>
25. Na danú rotačnú valcovú plochu s polomerom  $r$  umiestnite elipsu, ktorej hlavná, resp. vedľajšia os majú dĺžky  $2a$ , resp.  $2b$  ( $a > b$ ). Kedy úloha nemá riešenie?<sup>6</sup>
26. Daná je elipsa  $k$  osami  $AB$ ,  $CD$ . Zostrojte rotačnú valcovú plochu  $V$  tak, aby  $V \cap \alpha = \{k\}$ . Zapiš' algoritmus riešenia úlohy.
27. Daná je kružnicová valcová plocha  $V$  ( $k \subset \alpha$  – určujúca kružnica,  $o$  – os plochy ( $o \perp \alpha$ )). Zostrojte druhý systém kružnicových rezov plochy  $V$ .<sup>7</sup> Zapiš' algoritmus riešenia úlohy.
28. Zostrojte elipsu  $k$ , ak sú dané: a) jej hlavná os  $AB$  a dotyčnica  $t$ , ( $t \perp AB$ ,  $t \neq AB$ ); b) jej stred  $S$ , priamka  $o$  incidentná s jej hlavnou osou a body  $M$ ,  $N \neq M$  elipsy; c) jej stred  $S$ , priamka  $o$  incidentná s jej hlavnou osou a dotyčnica  $t$  s dotykovým bodom  $T$  ( $T$  nie je vrcholom). V prípade a) zostrojte i dotykový bod elipsy s danou dotyčnicou.<sup>8</sup> (Obr. 6)



Obr. 6a – c

<sup>4</sup> Úlohu riešte použitím perspektívnej afinity, ktorá danú elipsu  $k$  zobrazí do kružnice. Analogicky pre cvičenia 21, 22.

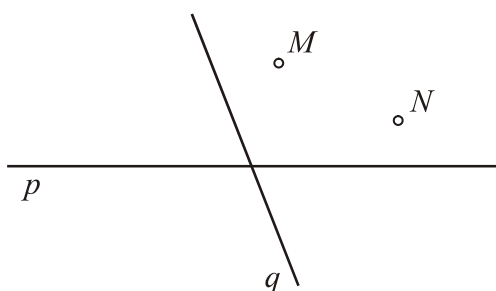
<sup>5</sup> Použite afinnú konštrukciu dotyčníc elipsy uvedenú pred vetou 2.1 (obr. 13b) v [1].

<sup>6</sup> Návod: Ak existuje elipsa požadovaných vlastností a označíme jej rovinu  $\alpha$ , tak pre veľkosť  $\varphi$  jej uhla s osou  $o$  valcovej plochy platí:  $\sin \varphi = r/a$ , kde  $2a$ , resp.  $2r = 2b$  je dĺžka hlavnej, resp. vedľajšej osi danej elipsy. Odtiaľ je zrejma konštrukcia pravouhlého trojuholníka  $S^i F^i S$  ( $i \in \{1, 2\}$ ) v ľubovoľnej rovine  $\pi$  incidentnej s osou  $o$  plochy. Rovina požadovaných vlastností obsahuje priamku  $\leftrightarrow S^i F^i$  a je kolmá na rovinu  $\pi$ . Rozhodnutie o riešiteľnosti a počte riešení sa prenecháva čitateľovi. (Veta Queteletova – Dandelinova, [1])

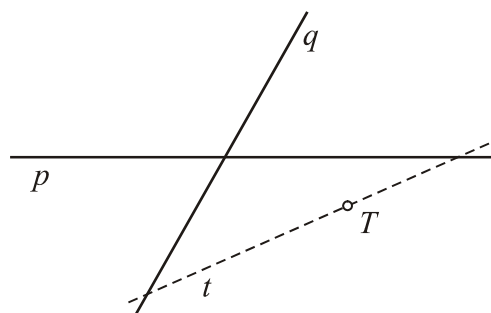
<sup>7</sup> Návod: zostrojte normálovú rovinu danej valcovej plochy  $V$  a využite súmernosť plochy podľa tejto roviny.

<sup>8</sup> Úlohy 28 - 32 riešte pomocou vhodnej perspektívnej afinity zobrazujúcej danú elipsu do kružnice. (Za os afinity si zvolte: cvičenie 30a – priamku  $MN$ ; cvičenie 31 – dotyčnicu  $t$ ; cvičenie 32 – a) priamku  $SM$ ; b) priamku  $ST$ )

29. Daná je elipsa  $k$  priemerom  $KL$ , priamkou  $m$  incidentnou so združeným priemerom ku  $KL$  a bodom  $M$  ( $M \notin \overleftrightarrow{AB}$ ,  $M \notin m$ ). Zostrojte krajné body priemeru elipsy  $k$  na priamke  $m$ .
30. Daná je elipsa priamkami  $p, q$  incidentnými s jej združenými priermi a bodmi  $M, N \neq M$  ( $M \notin p \cup q$ ,  $N \notin p \cup q$ ). Zostrojte krajné body priemerov elipsy na priamkach  $p, q$ . (Obr. 7)

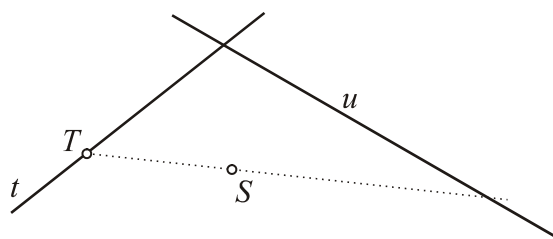
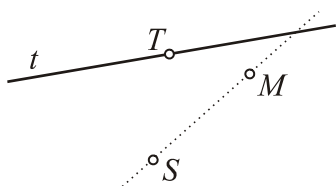


Obr. 7



Obr. 8

31. Daná je elipsa  $k$  priamkami  $p, q$  incidentnými s jej združenými priermi a dotyčnicou  $t$  s dotykovým bodom  $T$ . Zostrojte krajné body priemerov elipsy na priamkach  $p, q$ . (Obr. 8)
32. Daná je elipsa  $k$  stredom  $S$ , dotyčnicou  $t$  s dotykovým bodom  $T$  a: a) ďalším bodom  $M$ ; b) ďalšou dotyčnicou  $u$  ( $u \neq t$ ,  $u \nparallel t$ ). Zostrojte i osi elipsy  $k$ . V oboch prípadoch zostrojte priemer elipsy  $k$  združený s priemerom incidentným s priamkou  $ST$ . (Obr. 9a, b)



Obr. 9a, b

33. Daná je elipsa  $k = (AB, CD)$  (hlavná a vedľajšia os). Zostrojte štvorec opísaný elipse  $k$ .
34. Daná je elipsa  $k = (AB, CD)$  (hlavná a vedľajšia os) v rovine  $\alpha$ . Dokážte, že: a) množina bodov súmerne združených s ohniskom  $^1F$  elipsy  $k$  podľa všetkých jej dotyčníc je kružnica  $^1k$  so stredom v druhom ohnisku  $^2F$  tejto elipsy a polomerom  $2a = |AB|$ ; b)

množina piat kolmíc z ľubovoľného ohniska elipsy  $k$  na všetky jej dotyčnice je kružnica  $k_0$  so stredom v strede  $S$  elipsy a polomerom  $r = a$ .<sup>9</sup>

35. Nech bod  $M$  je ľubovoľným bodom elipsy  $k$  rôznym od jej vrcholov. Potom platí: priamka  $m$ , ktorá je osou vonkajších uhlov sprievodičov  $^1FM$  a  $^2FM$  bodu  $M$  vzhľadom na elipsu  $k$  je dotyčnicou elipsy  $k$  v bode  $M$ .<sup>10</sup> Dokážte.
36. Dokážte, že každá dotyčnica elipsy je osou vonkajších uhlov sprievodičov jej dotykového bodu.<sup>11</sup>
37. Určite množinu stredov všetkých kružníc, ktoré sa dotýkajú danej kružnice  $m = (O; r = d)$  a prechádzajú jej vnútorným bodom  $M$ . (Dôsledok riešenia úloh v cvičení 34; [2])
38. Zostrojte elipsu danú ohniskami  $^1F$ ,  $^2F$  a jedným bodom  $M$  (t. j. zostrojte vrcholy elipsy). V bode  $M$  zostrojte dotyčnicu elipsy.<sup>12</sup>
39. Zostrojte elipsu, ak je dané a)  $a$ ,  $b + e$ , b)  $e$ ,  $a + b$ , c)  $a$ ,  $b - e$  ( $a$ , resp.  $b$ , resp.  $e$  je dĺžka hlavnej, resp. vedľajšej polosi elipsy, resp. jej lineárna excentricita).
40. Zostrojte elipsu, ak je daný vrchol  $A$  hlavnej osi, vrchol  $C$  vedľajšej osi a dĺžka  $a$ , resp.  $b$  hlavnej, resp. vedľajšej polosi. Za akých podmienok je úloha riešiteľná a koľko má riešení?
41. Zostrojte elipsu, ak je dané jej ohnisko, vrchol vedľajšej osi a a) dĺžka  $b$  vedľajšej osi; b) lineárna excentricita. Kedy je úloha riešiteľná a koľko má riešení?
42. Zostrojte elipsu, ak je daná priamka incidentná s jej hlavnou osou, dĺžka hlavnej osi, jedno ohnisko a jeden bod elipsy, ktorý nie je vrcholom.
43. Zostrojte elipsu, ak je dané: a) jej ohnisko  $^1F$ , dotyčnica  $t$  s dotykovým bodom  $T$  a dĺžka  $a$  hlavnej polosi; b) jej ohnisko  $^1F$ , dotyčnica  $t$ , bod  $M$  elipsy a dĺžka  $a$  hlavnej polosi.
44. Zostrojte elipsu, ak je dané jej ohnisko  $^1F$ , dva jej body  $^1M$ ,  $^2M$  a dĺžka  $a$  hlavnej polosi.
45. Zostrojte elipsu, ak sú dané jej ohniská  $^1F$ ,  $^2F$  a jej dotyčnica  $t$ . Zostrojte i dotykový bod.
46. Zostrojte elipsu, ak je dané jej ohnisko  $^1F$ , jej rôznobežné dotyčnice  $^1t$ ,  $^2t$  a a) dĺžka  $a$  hlavnej polosi; b) dotykový bod  $^1T$  ( $^1T \in ^1t$ ).
47. Zostrojte elipsu, ak je dané jedno jej ohnisko a tri navzájom rôznobežné dotyčnice.<sup>13</sup>
48. Zostrojte elipsu, ak je dané jej ohnisko  $^1F$ , bod  $M$  elipsy, dĺžka  $a$  hlavnej poloosi a lineárna excentricita  $e$ .

<sup>9</sup> Kružnica  $^1k$  sa nazýva určujúca (radiaca) kružnica danej elipsy prislúchajúca ohnisku  $^1F$ . Analogicky hovoríme o radiacej kružnici  $^2k = (^1F, 2a)$  prislúchajúcej ohnisku  $^2F$ . Kružnica  $k_0$  sa nazýva vrcholová kružnica elipsy  $k$  (inciduje s hlavnými vrcholmi elipsy).

<sup>10</sup> Vonkajšie uhly sprievodičov bodu  $M$  elipsy sú tie z uhlov priamok  $^1FM$ ,  $^2FM$ , ktorých vnútra pozostávajú len z vonkajších bodov danej elipsy, t.j. z bodov  $X$ , pre ktoré  $^1FX + ^2FX > 2a$ . (Dotyčnica elipsy je definovaná v úvode druhej kapitoly textu [1] – def. 2. 1.)

<sup>11</sup> Ide o dôsledok definície 2. 1 elipsy. Vysvetlite.

<sup>12</sup> V riešení úloh 38 – 53 použite ohniskové vlastnosti elipsy zhrnuté vo výsledkoch cvičení 34 – 37.

<sup>13</sup> Uvažujte i o prípade, keď dve z dotyčníc sú navzájom rovnobežné priamky.

49. Zostrojte elipsu, ak je dané jej ohnisko  $^1F$ , vrchol  $A$  hlavnej osi elipsy a dĺžka  $b$  vedľajšej polosi.
50. Zostrojte elipsu, ak je dané jej ohnisko, jeden vrchol vedľajšej osi a a) dotyčnica  $t$  elipsy; b) bod  $M$  elipsy.
51. Zostrojte elipsu so stredom v danom bode  $S$  a danou dĺžkou  $a$  hlavnej polosi tak, aby sa dotýkala daných rôznobežných priamok  $^1t, ^2t$ , ktoré nie sú navzájom kolmé.
52. Umiestnite elipsu  $k$ , ktorej osi majú dĺžky  $2a, 2b$  ( $a > b$ ) tak, aby mala jedno ohnisko v bode  $^1F$  a dotýkala sa danej priamky  $t$ .
53. Umiestnite elipsu  $k$ , ktorej osi majú dĺžky  $2a, 2b$  ( $a > b$ ) tak, aby mala stred v danom bode  $S$  a dotýkala sa danej priamky  $t$ .
54. Zostrojte elipsu, ak je dané jej ohnisko, jeden bod elipsy a dve navzájom rôznobežné dotyčnice.
55. Zostrojte elipsu, pre ktorú je priamka  $n$  normálou a body  $^1F, ^2F$  jej ohniskami (priamka  $n$  nie je kolmá na priamku incidentnú s hlavnou osou elipsy, ani s ňou rovnobežná).<sup>14</sup>

### Literatúra

- [1] Sklenáriková, Z.: *Perspektívna afinita medzi dvoma rovinami*, učebný text (2005), internetová stránka: [www.fmph.uniba.sk](http://www.fmph.uniba.sk), Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky (oddelenie geometrie); in: *Zobrazovacie metódy 1*, str. 3 – 20.
- [2] Urban, A.: *Deskriptivní geometrie I*, SNTL/ALFA Praha, 1982
- [3] Medek, V. – Sivosová, A.: *Zbierka úloh z deskriptívnej geometrie pre 4. ročník gymnázia*, SPN Bratislava, 1976
- [4] Harant, M. – Lanta, O. – Urban, A.: *Deskriptívna geometria pre 2. a 3. ročník SVŠ*, SPN Bratislava, 1968

---

<sup>14</sup> Normála elipsy je priamka prechádzajúca bodom elipsy kolmá na jej dotyčnicu v tomto bode. Návod: Čo platí pre normálu v bode  $M$  elipsy a sprievodiče bodu  $M$  vzhľadom na danú elipsu t. j. priamky  $^1FM, ^2FM$ ? (Cvičenie 36)