O ZÁKLADNÝCH PROBLÉMOCH CYKLOGRAFICKÉHO ZOBRAZENIA

Zita Sklenáriková – Elena Vinceková

Abstrakt Práca sa zaoberá základnými problémami „cyklografickej“ zobrazovacej metódy – ako bijektívneho zobrazenia množiny všetkých bodov rozšíreného euklidovského priestoru $\overline{E}_3$ na množinu orientovaných kružníc (cyklov) vlastnej roviny π priestoru (vrátane nulových cyklov a orientovaných osnov navzájom rovnobežných priamok priemetne). Okrem historického náčrtu rozvoja metódy sa možno v závere oboznámiť s efektívnou aplikáciou metódy na riešenie planimetrických úloh geometrie orientovaných kružníc.

Kľúčové slová: cyklus, orientovaná priamka; základná kužeľosečka C_π prislúchajúca rovine π, cyklografická kužeľová plocha, izotropické priamky/body priemetne π; Apolloniova úloha v cyklografickej metóde.

Úvod

Pod cyklografickým zobrazením rozumieme zobrazenie množiny všetkých bodov rozšíreného euklidovského priestoru $\overline{E}_3$ na množinu orientovaných kružníc (cyklov) jednej roviny. Začiatky cyklografie možno nájsť v *Cousineryho Géometrie perspéctive ou Principes de projection polaire appliqués à la description des corps* (Paríž, 1828). Z hľadiska cyklografie je významná Cousineryho stereografická interpretácia Gergonnovho riešenia Apolloniovej úlohy; je zrejmou anticipáciou Fiedlerovej Cyklografie.[1] *N. Drückenmüller* uviedol r. 1842 v diele *Die Übertragungsprinzipien der analytischen Geometrie* základy tzv. izotropického premietania v analytickej forme.[2] Prvý, kto systematicky spracoval zobrazenie kružníc v rovine na body priestoru bol W. Fiedler[3] r. 1882 v diele Cyklographie oder Construction der Aufgaben über Kreise und Kugeln … . Neprekonaným dielom o cyklografii ako zobrazovacej metóde je druhý zväzok špeciálnych prednášok *E. Müllera Die Zyklographie* [4] pre kandidátov učiteľstva deskriptívnej geometrie na viedenskej vysokej škole technickej; kniha vyšla v spracovaní J. Kramesa, Müllerovho žiaka, r. 1929. Prínosom v porovnaní s Fiedlerovým dielom je hlavne zavedenie orientovaných prvkov a používanie zväčša ortogonálneho premietania do roviny (namiesto premietania stredového).

Významný český matematik *Jan Sobotka* (1860 – 1930) sa okrajovo dotkol problému cyklografického zobrazenia v monografii *Deskriptivní geometrie promítání peralelního*, ktorá vyšla r. 1906. Jedinou ucelenou publikáciou venovanou cyklografickému zobrazeniu v bývalom Československu bola knižka *Cyklografie L. Seiferta* (r. 1949). [5]

---

[1] *B. E. Cousinery* (1790 – 1851), absolvent parížskej École polytechnique; držiteľ ceny parížskej Akadémie vied (1825) za vyššie uvedený spis *Géometrie perspéctive* … .

[2] *N. Drückenmüller* (1806 – 1883), žiak J. Pl*ückera* (1801 – 1868)

[3] *Wilhelm Fiedler* (1832 – 1912, Zürich), významný nemecký deskriptívny geometer, viac než 40 rokov profesor polytechniky v Zürichu vo 3vajčiarsku. V diele *Cyklographie oder Construktion der Aufgaben über Kreise und Kugeln und elementare Geometrie der Kreis- und Kugelsysteme* (Leipzig 1882) je ním uvedená zobrazovacia metóda vypracovaná do najmenších podrobností a jej použitie obohatené mnohými aplikáciami; r. 1884 berlínska Akadémia priznala dielu Steinerovu prémiu. O významnom Fiedlerovom pôsobení v Prahe a jeho vplyve na rozvoj deskriptívnej geometrie v Rakúsku sa možno dozvedieť v [5].

[4] Životu a dielu Emila Müllera , vrcholného predstaviteľa viedenskej geometrickej školy, je venovaný článok [6].

[5] *Ladislav Seifert* (1843 – 1956); dielo *Cyklografie* kopíruje prvé tri kapitoly a stručne načrtáva témy niektorých ďalších kapitol Müllerovho zväzku.

Základné pojmy geometrie orientovaných priamok a kružníc

Poznámka. Predpokladá sa znalosť základných pojmov elementárnej geometrie euklidovskej roviny. Ďalej sa predpokladá, že sú známe pojmy: súhlasne/nesúhlasne orientované polpriamky tej istej osnovy, orientácia priamky, orientovaná priamka; orientovaný uhol, orientácia roviny a orientovaná rovina; orientácia kružnice, kladne/záporne orientovaná kružnica orientovanej roviny. Ďalšie pojmy sa zo zrejmých dôvodov budú definovať len heslovito.

Definícia 1. *Cyklus* [*lúč*]: orientovaná kružnica [priamka]; *nositeľka cyklu*/*lúča*: pôvodná kružnica/priamka; *polomer kladného*/*záporného cyklu*: reálne číslo r/$-r$, kde r je polomer nositeľky cyklu; *kladná polrovina* orientovanej roviny *vzhľadom na daný lúč* (určený polpriamkou KL): polrovina s hranicou $\overleftrightarrow{KL}$ incidentná s bodom X, pre ktorý orientovaný uhol LKX patrí do zvolenej orientácie roviny (opačná polrovina k nej sa nazýva *zápornou polrovinou* tej istej orientovanej roviny *vzhľadom na daný lúč*); *kladná oblasť* kladného [záporného] cyklu: vnútro [vonkajšok] nositeľky cyklu (vonkajšok [vnútro] tejto kružnice sa nazýva *zápornou oblasťou cyklu*); hovoríme, že lúč $\vec{t}$ sa dotýka cyklu $\vec{k}$, ak je priamka t dotyčnicou nositeľky cyklu $\vec{k}$ a buď kladná polrovina vzhľadom na daný lúč je časťou kladnej oblasti cyklu alebo je kladná oblasť cyklu podmnožinou tejto polroviny; *dva cykly sa dotýkajú*, ak majú v spoločnom bode spoločný dotykový lúč.

Poznámka. Nedefinujú sa pojmy: *uhol dvoch lúčov*, *vzdialenosť bodu od lúča*, *uhol cyklu s lúčom* a pod. Zrejmá je platnosť nasledujúcich tvrdení:

Veta 1. – Existuje práve jeden lúč súhlasne orientovaný s daným lúčom a dotýkajúci sa daného cyklu; – ku každým dvom disjunktným cyklom, z nositeliek ktorých neleží žiadna vnútri druhej existujú práve dva dotykové lúče; – existuje najviac jeden cyklus dotýkajúci sa daných troch lúčov.

Princíp cyklografického zobrazenia. Obraz bodu

Základným priestorom je rozšírený euklidovský priestor $\overline{E}_3$ nad poľom reálnych čísel. Základom cyklografickej zobrazovacej metódy je kolmé premietanie do vlastnej roviny. Nech $\pi \subset \overline{E}_3$ je ľubovoľná vlastná rovina (priemetňa). Orientujme oba polpriestory priestoru $\overline{E}_3$ s hranicou π (t. j. ľubovoľný z nich označme za kladný). (Orientovaná vzdialenosť vlastného bodu P od priemetne sa bude označovať z^P.) [6] Okrem toho orientujme aj rovinu π napr. orientovaným uhlom $\angle \overset{\mapsto}{u} \overset{\mapsto}{v}$.

Nech $P \in \overline{E}_3$ je ľubovoľný vlastný bod a P_1 jeho kolmý priemet do roviny π. Obrazom bodu P nazveme cyklus priemetne s polomerom z^P a stredom P_1 (označenie: P^c). Cyklus P^c je teda kladný/záporný práve vtedy, keď je orientovaná vzdialenosť bodu P od priemetne kladná/ záporná. Pre bod Q priemetne π je $Q_1 = Q$ a $z^Q = 0$. Aby nebolo treba robiť výnimky, nazveme takýto bod „nulovým cyklom“ (s polomerom nula).

Veta 2. Zobrazenie φ množiny všetkých vlastných bodov priestoru $\overline{E}_3$ na množinu všetkých cyklov roviny π, ktoré bodu P priradí cyklus P^c vyššie uvedeným spôsobom, je *bijekcia*.

Definícia 2. Zobrazenie φ z predchádzajúcej vety je zobrazovacia metóda, ktorú budeme nazývať *cyklografickým zobrazením* alebo *cyklografiou*. Množina C_π všetkých cyklov roviny π sa nazýva *priestor cyklov*; rotačnú kužeľovú plochu, ktorej tvoriace priamky majú s priemetňou π uhol $R/2$, budeme nazývať *C-kužeľová plocha* (analogicky priamky/roviny,

[6] Označenie z^P sa zaužívalo preto, že pri voľbe ortonormálnej súradnicovej sústavy sa súradnicová báza $\langle O; x, y, z\rangle$ obvykle volí tak, aby $x \cup y \in \pi$ a aby kladná polpriamka osi z incidovala s príslušným kladným polpriestorom s hranicou π. Táto voľba sa ukáže účelná pri analytickom vyjadrení a odvodzovaní niektorých vlastností cyklografického zobrazenia.

ktoré majú s priemetňou uhol zhodný s uhlom $R/2$ sa budú nazývať *C-priamky*/*C-roviny*)[7]; hovoríme, že *lúču* $\vec{a}$ *prislúcha C-rovina* α práve vtedy, keď ortogonálny priemet kladnej polroviny roviny α (z kladného polpriestoru s hranicou π) inciduje s kladnou polrovinou priemetne vzhľadom na lúč $\vec{a}$.

Dôsledok. a) Dva cykly sú obrazmi bodov tej istej *C-priamky* práve vtedy, keď sa dotýkajú; b) obrazmi bodov *C-roviny* sú všetky cykly dotýkajúce sa lúča, ktorému daná *C-rovina* prislúcha; c) obrazmi bodov *C-kužeľovej plochy* sú všetky cykly dotýkajúce sa jedného pevného cyklu, ktorý je obrazom vrcholu plochy. [8]

Analytické vyjadrenie základných útvarov. Iný pohľad na cyklografické „premietanie“

Nech $\langle O; E^x, E^y, E^z\rangle$ je ortonormálna báza euklidovského priestoru E^3 nad poľom reálnych čísel zvolená tak, aby súradnicové osi x, y ležali v priemetni π a kladná polpriamka súradnicovej osi z ležala v kladnom polpriestore s hranicou π. Nech $V(u, v, w)$ je ľubovoľný bod priestoru E^3. C-kužeľová plocha K^V s vrcholom V má vo zvolenej súradnicovej sústave vyjadrenie: $(x - u)^2 + (y - v)^2 - (z - w)^2 = 0$ (1). Prienikom tejto plochy s priemetňou je v prípade $w \neq 0$ kružnica (nositeľka cyklu V^c) so stredom $V_1(u, v, 0)$ a polomerom $|w|$:
$K^V \cap \pi$: $[(x - u)^2 + (y - v)^2 - w^2 = 0, z = 0]$ (2).

V záujme jednotných úvah sa bude ďalej pracovať v komplexifikácii priestoru E^3, prípadne priestoru $\overline{E}_3$ (pri vyjadrovaní nevlastných prvkov priestoru v homogénnych súradniciach), t. j. budú sa brať do úvahy i komplexné korene rovníc s reálnymi koeficientmi. Dosiahne sa tak možnosť vyjadrenia nulového cyklu (obraz bodu $V(u, v, 0)$) ako prieniku C-kužeľovej plochy K^V s priemetňou – $K^V \cap \pi$: $[((x - u) + i(y - v))\ ((x - u) - i(y - v)) = 0,\ z = 0]$ (3). Je zrejmé, že priamky $(x - u) + i(y - v) = 0$, $z = 0$ a $(x - u) - i(y - v) = 0$, $z = 0$ sú (nereálnymi) *izotropickými priamkami* [9] priemetne π s priesečníkom v reálnom bode V.

Vyjadrime si teraz C-kužeľovú plochu K^V ($V(u, v, w)$) v homogénnych súradniciach (x_0, x_1, x_2, x_3) (v priestore $\overline{E}_3$) a skúmajme jej prienik s nevlastnou rovinou ω: $x_0 = 0$. Po prepísaní (1) do homogénneho tvaru sa dostane: $(x_1/x_0 - v_1/v_0)^2 + (x_2/x_0 - v_2/v_0)^2 - (x_3/x_0 - v_3/v_0)^2 = 0$, $v_0 \neq 0$ a po úprave: K^V: $(x_1v_0 - x_0v_1)^2 + (x_2v_0 - x_0v_2)^2 - (x_3v_0 - x_0v_3)^2 = 0$, $v_0 \neq 0$. Prienik $K^V \cap \pi$ má vyjadrenie: $v_0^2\,(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2) = 0$, $x_0 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$, $x_0 = 0$ (4), čo je reálna kužeľosečka v nevlastnej rovine priestoru $\overline{E}_3$.

Definícia 3. Reálnu kužeľosečku s vyjadrením (4) budeme nazývať *základná kužeľosečka prislúchajúca rovine* π a označovať C_π.

Cyklografické „premietanie“ (jedna zložka zobrazovacej metódy cyklografia) v rozšírenom euklidovskom priestore $\overline{E}_3$ s priemetňou π možno chápať nasledovne. Premietať sa bude pomocou základnej kužeľosečky C_π; premietacím útvarom každého vlastného bodu M priestoru je C-kužeľová plocha s vrcholom M a určujúcou kužeľosečkou C_π. Cyklografickým priemetom bodu M je prienik kužeľovej plochy K^M s priemetňou. Ak je týmto prienikom kružnica k^M, príslušný cyklus M^c (obraz bodu M v cyklografickom zobrazení) je kladný [záporný] práve vtedy, keď $z^M > 0$ [$z^M < 0$]. V prípade $z^M = 0$ je obrazom bodu M dvojica izotropických priamok priemetne s priesečníkom M.

---

[7] V texte je R označenie pravého uhla; *C-kužeľová plocha* je skrátený názov pre cyklografickú kužeľovú plochu; analogicky pre priamku, či rovinu.

[8] Je účelné zaviesť pojem dotyku i pre nulový cyklus nasledovne: *Hovoríme, že nulový cyklus sa dotýka daného cyklu alebo lúča, keď je incidentný s ich nositeľkami*. Špeciálnym prípadom vlastnosti z bodu c) potom je: Všetky cykly prechádzajúce daným pevným bodom sú obrazmi bodov C-kužeľovej plochy s vrcholom v tomto bode.

[9] Izotropické priamky roviny π incidentné s bodom P tejto roviny sú samodružnými priamkami pravouhlej involúcie navzájom kolmých priamok vo zväzku priamok priemetne π so stredom P.

Ďalej sa bude ešte skúmať vzájomná poloha základnej kužeľosečky C_π (prislúchajúcej rovine π) a nevlastnej priamky priemetne π. Zvoľme si ľubovoľnú cyklografickú kužeľovú plochu, napr. s vrcholom $V(v_0, v_1, v_2, 0)$, $v_0 \neq 0$ a vyjadrime prienik $(K^V \cap \omega) \cap \pi = (K^V \cap \pi) \cap \omega$: $[(x_1 + ix_2)(x_1 - ix_2) = 0, x_3 = 0, x_0 = 0]$. Túto sústavu spĺňajú súradnice práve dvoch bodov: ${}^1I_\pi(0, \lambda, \lambda i, 0)$, ${}^2I_\pi(0, \lambda, -\lambda i, 0)$ (5).

Definícia 4. Body s analytickým vyjadrením (5) sa nazývajú *izotropické* alebo *kružnicové* body roviny π.

Poznámka. Je zrejmé, že izotropické body roviny π ležia na každej kružnici tejto roviny.[10, 11]

Cyklografia v riešení Apolloniovej úlohy

Každý cyklus dotýkajúci sa daných troch cyklov A^c, B^c, C^c je obrazom spoločného bodu troch C-kužeľových plôch s vrcholmi A, B, C. Nasledujúce poznámky sa preto najprv zaoberajú skúmaním vlastnej časti prieniku dvoch takýchto plôch a následne sa venujú jej konštrukcii.

Nech K^A, K^B sú ľubovoľné dve C-kužeľové plochy. Ich prienikom je krivka štvrtého stupňa. Keďže jednou časťou prieniku je základná kužeľosečka C_π, je i druhá (vlastná) časť prieniku kužeľosečka; ak si načrtneme kolmý priemet oboch plôch do ich spoločnej roviny súmernosti, tak je zrejmé, že ňou môže byť: a) *elipsa* alebo *hyperbola* (ak sa plochy K^A, K^B nedotýkajú a nemajú spoločnú os); b) *kružnica* (ak majú plochy K^A, K^B spoločnú os); c) *dvojnásobná priamka* (ak sa plochy K^A, K^B navzájom dotýkajú). [12]

Označme k vlastnú kužeľosečku prieniku. Je zrejmé, že jej rovina α je kolmá na rovinu λ súmernosti oboch plôch (obsahujúcu ich osi), t. j. priamka $\alpha \cap \lambda = s$ je osou kužeľosečky k. (Konštrukciu kužeľosečky k možno vykonať jednoducho v Mongeovej metóde s priemetňami π a λ. Grafickú ilustráciu tejto konštrukcie, keď sa jedná o elipsu alebo hyperbolu čitateľ môže nájsť v [3], alebo [4].) V prípade elipsy i hyperboly platí: – priesečnica $p^\alpha = \alpha \cap \pi$ je chordálou nositeliek cyklov A^c, B^c; – priesečnica rovín π a α' ($\alpha' \parallel \alpha$, $A \in \alpha'$, resp. $B \in \alpha'$) je polárou stredu rovnoľahlosti cyklov A^c, B^c vzhľadom na nositeľku cyklu A^c, resp. B^c; – k_1 je kužeľosečka (zhodného typu s kužeľosečkou k) s ohniskami A_1, B_1 (veta Nemčíkova – Catalanova).

Rovina α a chordála nositeliek cyklov A^c, B^c majú pre body A, B ($A(0, 0, a)$, $B(1, 0, b)$) nasledujúce vyjadrenie:

$$\alpha \equiv 2x - 2z(b - a) + b^2 - a^2 - 1 = 0, \quad p^\alpha = \alpha \cap \pi \equiv [x = (a^2 - b^2 + 1)/2, z = 0] \,. \quad (6)$$

Čím je priamka p^α s predchádzajúcim vyjadrením, ak je niektorý z cyklov nulový, prípadne sú nulové oba? V prvom prípade ($a = 0$) má rovnica tvar: $x = (1 - b^2)/2$, $z = 0$; ide o množinu bodov X priemetne, pre ktoré $|XA|^2 = \mu(X\, k^B)$ (výraz na pravej strane rovnosti je mocnosť bodu X vzhľadom na kružnicu k^B). Túto priamku nazveme chordálou bodu A a kružnice k^B (nositeľka cyklu B^c). V druhom prípade ($a = 0$, $b = 0$) sa dostane: $p^\alpha \equiv [x = 1/2, z = 0]$, čo je os úsečky AB v rovine π. Za chordálu dvojice bodov A, B budeme považovať os úsečky AB. To nám umožní jednotné riešenie ďalších aplikačných úloh pre všetky cykly, ktoré sú obrazmi vlastných bodov priestoru. [2], [3]

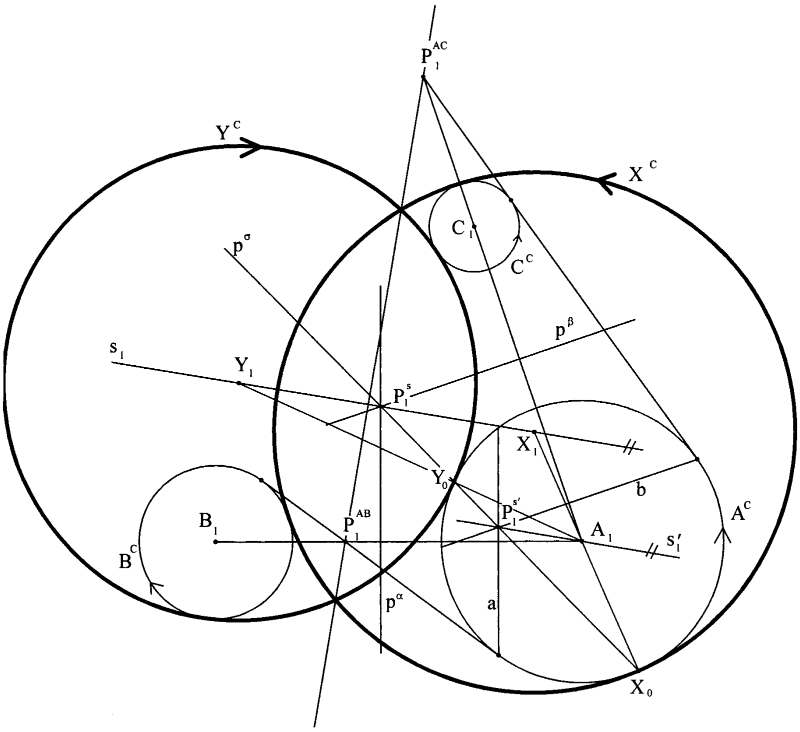
---

[10] Body ${}^1I_\pi$, ${}^2I_\pi$ sú izotropické body všetkých rovín rovnobežných s rovinou π. Množinou izotropických bodov prislúchajúcich všetkým osnovám rovín rozšíreného euklidovského priestoru je kružnica s vyjadrením: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, $x_0 = 0$. Táto kružnica sa nazýva *absolútna kružnica* alebo *absolút* priestoru $\overline{E}_3$.

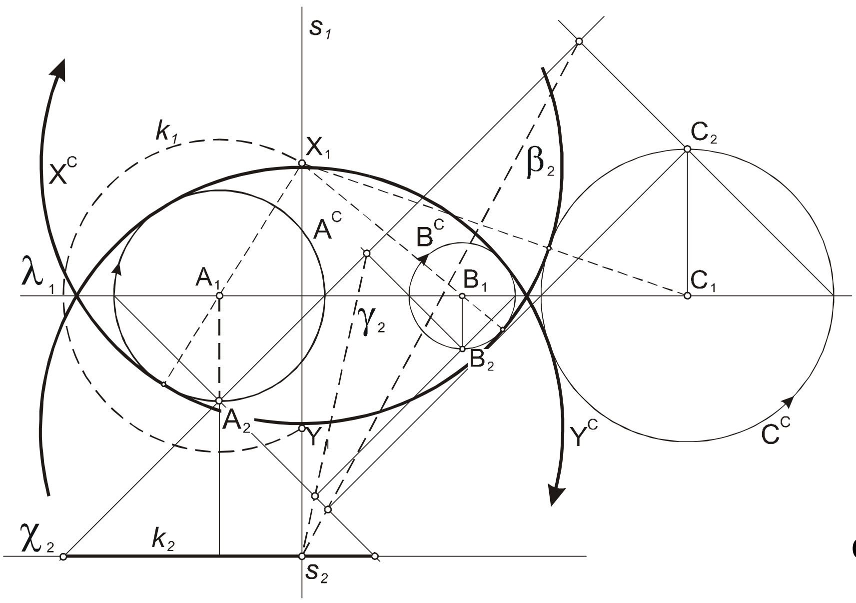
[11] Analogickým spôsobom, ako bolo rozšírenie cyklografického zobrazenia na body priemetne (pomocou základnej kužeľosečky C_π), E. Müller vyriešil zobrazenie nevlastných bodov, a to tak, že vyjadril C-kužeľovú plochu K^M prislúchajúcu bodu M ako obálku dotykových rovín. S hlavnou myšlienkou sa možno oboznámiť v [3].

[12] Prípady b), c) sa pre jednoduchosť konštrukcií v aplikačných úlohách vylúčia z úvah.

Úloha: Zostrojte kružnicu, ktorá sa dotýka daných troch kružníc k^A, k^B, k^C. Úlohu vyriešime pre kružnice navzájom nezhodné, nesústredné a nedotýkajúce sa (v zmysle poznámky uvedenej vyššie pre cykly). Zvoľme si ľubovoľnú trojicu cyklov A^c, B^c, C^c s nositeľkami k^A, k^B, k^C v danom poradí. Nech α, resp. β je rovina kužeľosečky vlastného prieniku C-kužeľových plôch K^A, K^C, resp. K^B, K^C a priamka s priesečnicou rovín α, β. Ak existuje cyklus X^c požadovaných vlastností, tak bod X patrí do prieniku priamky s s niektorou z plôch K^A, K^B, K^C; na obrázku 1 sú zostrojené priesečníky $s \cap K^A$. Podľa vlastností uvedených vyššie je známy stopník priamky s ($P^s = p^\alpha \cap p^\beta$); priamka s sa dourčí rovnobežnosťou s priamkou $s' = \alpha' \cap \beta'$ (α', β' sú vrcholové roviny C-kužeľových plôch K^A, K^B, rovnobežných – v danom poradí – s rovinami α, β. Priesečníky $s \cap K^A$ sú zostrojené pomocou vrcholovej roviny $\sigma = \overleftrightarrow{s\,s'}$ kužeľovej plochy K^A: $s \cap K^A = s \cap (\sigma \cap K^A) = s \cap \{\overleftrightarrow{AX_0}, \overleftrightarrow{AY_0}\} = \{X, Y\}$. (Obr. 1)



Obr. 1



Obr. 2

Cykly X^c, Y^c, sú riešením modifikovanej úlohy pre cykly A^c, B^c, C^c. Rozhodnutie o úplnom riešení pôvodnej úlohy sa ponecháva čitateľovi. (Z grafického riešenia úlohy je zrejmé, že je stereometrickou interpretáciou Gergonnovho riešenia Apolloniovho problému.) [3], [7].

Na obrázku 2 je úloha vyriešená pre cykly s kolineárnymi stredmi. V tomto prípade je na konštrukciu priesečníkov priamky $s = \beta \cap \gamma$ (β, γ sú roviny vlastných častí prienikov $K^A \cap K^C$ a $K^A \cap K^B$) s kužeľovou plochou K^A vhodné použiť Mongeovu metódu s priemetňami π a λ (λ je spoločná rovina súmernosti kužeľových plôch K^A, K^B, K^C).

Literatúra

1. Čižmár, J.: *Grupy geometrických transformácií*. Bratislava: Alfa VTEL, 1984
2. Holubář, J.: *O rovinných konstrukcích odvozených z prostorových útvarů*. Praha: JČMF, svazek 47, 1947
3. Müller, E. – Krames, J.: *Die Zyklographie*. Leipzig und Wien: F. Deuticke, 1929
4. Seifert, L.: *Cyklografie*. Praha: JČMF, 1949
5. Sklenáriková, Z.: *Z dejín deskriptívnej geometrie v Rakúsko-Uhorsku*. In: Matematika v proměnách věků II, Praha: Prometheus, 2001, s. 14-45. ISBN 80-7196-218-X
6. Sklenáriková, Z.: *Emil Müller a modernizačné tendencie vo vyučovaní deskriptívnej* … . In: Nové trendy vo výučbe matematiky, SPU Nitra, 2001, s. 59-64. ISBN 80-7137-953-0
7. Sklenáriková, Z.: *O Gergonnovom riešení Apolloniovej úlohy*. In: Matematika vo výučbe, výskume a praxi 2002, SPU Nitra, 2002, s. 88-93 . ISBN 80-8069-040-5

ON BASIC PROBLEMS OF "CYKLOGRAPHIC" MAPPING

Abstract In the paper the basic problems of the "*cyklographie*" or one-to-one mapping of all points of the three-space $\overline{E}_3$ into the set of the oriented circles of the projection plane (including zero circles represented by couples of isotrophic lines with the real intersection points) are introduced. The fundamental concept of the mapping is the projection by means of the basic ideal C_π-conic associated with the projection plane π; C_π: $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$, $x_0 = 0$. The projection surface of an ordinary point P is then the circular conical surface with the vertex P and the diretrix C_π; the projection "surface" of an ideal point consists of two sets/one set of the parallel planes. In addition some impressive applications of the method on the problems-solving of the geometry of oriented circles and directed lines as well as a brief outline of the development of the method are presented.

Key Words: oriented circle; basic C_π-conic associated with the projection plane π, C-conical surface, isotrophic lines and points; the problem of Apollonios in „cyklography“ mapping