

Zo života a diela Karla Pelza

Zita Sklenáriková

1 Životopis a profesionálna kariéra

Karel Pelz bol jedným z najvýraznejších predstaviteľov českej geometrickej školy popri bratoch Weyrovcoch, Janovi Sobotkovi, Vincencovi Jarolímkovi a ďalších. Podľa Gina Loria¹ „Karel Pelz zaujal čestné miesto medzi vedcami, ktorí zasvätili všetko vlastné úsilie deskriptívnej geometrii. Vedel v jej prospech zúžitkovať najrozhodujúcejšie pokroky dovŕšené v priebehu 19. storočia v polohovej geometrii², obzvlášť v teórii kužeľosečiek. Podarilo sa mu pridať k tejto disciplíne niekoľko dôležitých strán položiť tak príklad, ktorý v záujme poznania, keď by bol mnohými nasledovaný.“

Karel Pelz sa narodil 2. októbra 1845 v Bělči u Křivoklátku. Vyrastal v lone křivoklátskych lesov, kde bol jeho otec kniežacím hájnikom. Otec však padol za obeť pytlíakom a tak Pelz už v detstve osirel. Po absolvovaní reálky v Rakovníku študoval na českom polytechnickom ústave v Prahe (1864 – 1869). V tomto rozhodujúcom období formovania deskriptívnej geometrie ako vedeckej disciplíny v sústave matematických vied bol priaznivý vplyv tamojšej katedry deskriptívnej geometrie na študentov a mladých vedeckých pracovníkov umocnený príchodom dvoch významných osobností: Františka Tilšera, druhého profesora katedry deskriptívnej geometrie pre prednášky české (po nečakanej smrti Rudolfa Skuherského)³ a hlavne Wilhelma Fiedlera, prvého profesora katedry deskriptívnej geometrie pre prednášky nemecké (Fiedlerove prednášky z *novšej geometrie* boli v tom čase prvými prednáškami z tohoto predmetu v Rakúsku).

V prvom roku pražského pobytu študoval Pelz deskriptívnu geometriu u Tilšera. V druhom roku navštevoval tie isté prednášky u Fiedlera, u ktorého absolvoval aj práce konštrukčné cvičenia k prednáške s výsledkom tak vynikajúcim, že si tieto Fiedler vyžiadal na pamiatku. Pelz okrem toho absolvoval s aktívnym zaujatím aj Fiedlerove nepovinné prednášky z *novšej geometrie*. Vzťah učiteľa a žiaka prerástol do vzájomnej sympatie; zo strany Fiedlera to bola pomoc (i materiálna) a prajnosť, z Pelcovej strany úcta a obdiv k svojmu učiteľovi a k jeho zaujatosti a prínosu pre projektívnu a deskriptívnu geometriu. Svedčí o tom ich vzájomná celoživotná korešpondencia.⁴ Príznačnou vlastnosťou oboch mužov bola takpovediac vrozená dôkladnosť a svedomitosť vo všetkom konaní. [15]

Počas štúdia sa zoznámil Pelz s oboma bratmi Emilom i Eduardom Weyrovcami; vzťah k Emilovi sa vyvinul do trvalého celoživotného priateľstva, i keď im osud nedoprial žiť blízko seba. Obaja vrúcne milovali Prahu; túžba žiť v tomto meste sa naplnila len Pelzovi na sklonku

¹ Gino Loria (19. 5. 1862 – 30. 1. 1954), významný taliansky matematik a historik v oblasti histórie matematiky

² *polohová geometria, novšia/nová geometria* = projektívna geometria

³ Zásľuhou Skuherského sa deskriptívna geometria na pražskej polytechnike vymanila z roly pomocnej disciplíny a stala sa samostatným odborom s dvojnásobnou hodinovou dotáciou v porovnaní s predchádzajúcim obdobím. Viac podrobností o systemizácii katedier deskriptívnej geometrie v Rakúsko-Uhorsku sa možno dozvedieť v [12].

⁴ Fiedler odišiel r. 1867 na technickú vysokú školu do Zürichu, kde zaujal post profesora pre deskriptívnu geometriu. Udržiaval s Pelzom kontakt temer do posledných Pelzových dní; učiteľ prežil svojho žiaka o viac než štyri roky.

života. Karel Pelz sa podieľal na vydaní prvej vedeckej práce Emila Weyra, a to vyhotovením piatich tabuliek obrázkov, ktoré boli podstatnou súčasťou spisu.⁵

Po absolvovaní techniky r. 1869 nastúpil Pelz na asistentské miesto kresliča pri c. k. ústrednom ústave pre meteorológiu a zemský magnetizmus vo Viedni. Už po roku sa vrátil do Prahy na miesto asistenta deskriptívnej geometrie u profesora Karla Küppera, ktorý prevzal katedru deskriptívnej geometrie po Fiedlerovom odchode z Prahy. Na tomto mieste Pelz pracoval až do roku 1875, keď sa stal profesorom štátnej reálky v Těšíne. V tomto období mal už uverejnených viacero vedeckých prác, čo mu vyslúžilo pozvanie na miesto profesora na vyššiu priemyslovku do Kamenice v Sasku. Než prišlo k dojednaniu podmienok profesúry, bol vymenovaný r. 1876 za profesora krajinskej reálky v sídelnom meste vysokých škôl Grazi (Štajerský Hradec) a ponuku do Kamenice neprijal.

V Grazi, už ako uznaný vedecký pracovník, nastúpil súčasne aj svoju akademickú dráhu, najprv ako súkromný docent pri tamojšej vysokej škole technickej. Jeho prednášky však vzbudili takú pozornosť, že ho zbor školy už po dvoch rokoch prijal na miesto mimoriadneho profesora pre deskriptívnu geometriu. Bol to pre Pelza predovšetkým prejav uznania, a ocenenie jeho vedeckej a učiteľskej práce, no pre najbližšiu budúcnosť to znamenalo značný nárast povinností, keď k učiteľskému úväzku na reálke pristúpila záväzne jeho akademická činnosť na technike. V tomto postavení však nezotrval dlho. Po neočakávanej smrti Emila Koutného [12] sa r. 1881 stal Karel Pelz riadnym profesorom pre deskriptívnu geometriu na technickej vysokej škole v Grazi a zotrval na tomto poste pätnásť najkrajších a najplodnejších rokov svojho života.

V roku 1891 dostal Pelz ponuku profesorského miesta pre deskriptívnu geometriu na technickú vysokú školu vo Viedni. Vinou postupu vyjednávania z viedenskej strany ponúknuté miesto neprijal. R. 1896 opakovane ponuku do Viedne zamietol, aby už v tom istom roku, na základe verejného konkurzu, prijal profesorský post na pražskej českej vysokej škole technickej po odchode F. Tilšera do dôchodku. Blahodarné pôsobenie Karla Pelza na pražskej technike bolo však už poznačené chorobou; v Prahe napísal len jednu vedeckú prácu, r. 1898. Z jeho korešpondencie a spomienok priateľov je však zrejmé, že sa stále zaoberal hlavne konštrukčnými problémami, ktoré mu nebolo dopriate dopracovať na úroveň publikovania. V písomnom kontakte zostával hlavne s priateľmi – bývalými kolegami z Grazu. Úprimne bol oddaný Fr. Mertensovi, ktorý tam tiež pôsobil (neskôr Mertens získal profesorské miesto na viedenskej univerzite). Pelz nerád z Prahy odchádzal, chcel si jej užiť čo najviac. Mal viacero záľub. Jeho zbierka fotografií významných matematikov⁶, o vedeckých zásluhách a životných osudoch ktorých vedel zaujímavo a fundovane rozprávať, sa rozrástla na stovky kusov. Bol milovníkom vynikajúcich memoárov vôbec, rád rozprával hlavne o Prahe. Jan Sobotka napísal: „*Je čo ľutovať, že Pelz nenapísal memoáry – predovšetkým o vedeckom dianí a pražských kultúrnych i spoločenských zaujímavostiach. Iste by bol dokázal písať ako znalec a zasvätenec povolaný nad iných*“. [15] R. 1904 bol Pelzovi udelený titul a hodnosť c. k. dvorského radcu; zasluženého odchodu do dôchodku sa však nedožil.

Karel Pelz zomrel 16. júna 1908 v Prahe. Pochovaný je na Vyšehrade.

⁵ Autor spisu sa o nich s vďakou zmieňuje v predhovore; sám nebol totiž dobrým kresličom a Pelz bol temer jediný, od koho sa v tom čase dalo očakávať korektné a rýchle vyhotovenie tejto časti práce. (Ide o spis „*Theorie der mehr-deutigen geometrischen Elementargebilde und der algebraischen Kurven und Flächen als deren Erzeugnisse*“, 1869)

⁶ Zbierka je majetkom Českej akadémie vied. [15]

2 Vedecké dielo

Meno Karla Pelza je úzko späté s vrcholným rozvojom deskriptívnej geometrie, ktorý bol zavŕšený *Emilom Müllerom*⁷ a jeho žiakmi v prvej tretine 20. storočia. Jeho vedecké práce boli citované, ocenené a uplatnené temer vo všetkých spisoch venovaných tejto matematickej disciplíne. Praha sa nemalou mierou zaslúžila o rozvoj nových geometrických metód na prelome 19. a 20. storočia a od druhej polovice šesťdesiatych rokov devätnásteho storočia prežila celú epochu úspešného rozmachu v geometrii – začínajúc príchodom *W. Fiedlera* na vtedajší krajinský polytechnický ústav, cez rýchlo rastúci ohlas bratov *Weyrovcov*, príchod *Jana Sobotku* na pražskú univerzitu a mnohých ďalších, medzi ktorými zaujal Pelz rázovité a význačné miesto. Vedecké dielo K. Pelza (celkom 34 prác) sa dotýka dvoch hlavných oblastí – syntetickej teórie kužeľosečiek, kriviek a plôch a vedeckej výstavby zobrazovacích metód. (Zoznam prác je v chronologickom poradí uvedený v závere tohto príspevku.)

2.1 Syntetická teória kužeľosečiek, kriviek a plôch

Jedným z prvých problémov, ktorými sa Pelz zaoberal, bolo určenie tzv. *lesklých bodov* kružnice a elipsy (za predpokladu, že svetelný zdroj a oko pozorovateľa ležia v rovine danej krivky). V prvom prípade previedol úlohu na konštrukciu spoločných dotyčníc kružnice a pomocnej paraboly, v druhom na určenie spoločných bodov danej elipsy a pomocnej cirkulárnej kubiky. Elegancia postupov a dosiahnutých výsledkov inšpirovali holandského geometra *P. H. Schoutena* (1846 – 1913), ktorý napríklad dokázal, že algebrická rovinná krivka stupňa m má $m \cdot (2m - 1)$ lesklých bodov ležiacich na krivke stupňa $2m$ prechádzajúcej nevlastnými bodmi danej krivky.

Značná časť prác K. Pelza je venovaná *kvadratickým plochám* (kvadrikám), ich vlastnostiam a zobrazeniu (obrysy kvadrík, obrysy ich priemetov, konštrukcie osí, osí a ohnísk obrysov priemetov, problémy súvisiace s osvetlením, t. j. konštrukcie hraníc vlastných a hodených tieňov v rovnobežnom i stredovom osvetlení, atď.). Riešenie problémov vedie napospol k úlohám o kužeľosečkách. V mnohých z nich sa môžeme stretnúť s veľmi dômyselným použitím a zovšeobecnením nasledujúcej Steinerovej⁸ vety: „*Dotyčnica a normála v bode stredovej kužeľosečky sú spolu s osami kužeľosečky dotyčnicami jednej paraboly, ktorej dotykový bod s normálou je stredom krivosti danej kužeľosečky vo zvolenom bode.*“ Pelz nazval túto parabolu *Steinerovou parabolou* a dokázal nasledujúcu vetu:

Veta 1. Nech k je ľubovoľná stredová kužeľosečka, P ľubovoľný bod s ňou neincidentný a p jeho polára vzhľadom na kužeľosečku k . Ak označíme Q ľubovoľný bod priamky p a q jeho poláru vzhľadom na kužeľosečku k , tak platí: pre všetky body Q priamky p je množina združených polár q' k poláre q (vzhľadom na kužeľosečku k) kolmých na priamku q obálkou jednej paraboly.⁹

Poznámka 1. Dotyčnicami paraboly z vety 1 sú aj osi $^i o$ ($i = 1, 2$) kužeľosečky k , jej normály $^i n$ v bodoch $^i T \in p \cap k$ ($i = 1, 2$), priamka p a osi $^i r$ uhlov dotyčníc $^i t = \leftrightarrow ^i TP$ ($i = 1, 2$). Určujúcou priamkou paraboly je priemerová priamka PS danej kužeľosečky k (obr. 1).

⁷ O živote a diele Emila Müllera, vrcholného predstaviteľa viedenskej geometrickej školy, sa možno dozvedieť v [13].

⁸ Jacob Steiner (1796 – 1863), profesor geometrie na berlínskej univerzite, jeden z najvýznamnejších nemeckých geometrov 19. storočia

⁹ Túto parabolu nazývame *Steinerova-Pelzova parabola* prislúchajúca bodu P a danej kužeľosečke k .

Jedným z najzávažnejších problémov, ktoré ponúka teória kvadrík, je určenie osí danej kvadratickej plochy. Pelz riešil tento problém v práci (5), a to špeciálne pre kvadratickú kužeľovú plochu (na tento prípad možno previesť konštrukciu osí ľubovoľnej kvadriky). Dve konštrukčné riešenia problému uviedol bez dôkazu M. Chasles v *Aperçu historique*¹⁰. V úvode práce Pelz dokázal správnosť oboch Chaslesových konštrukcií spôsobom jemu vlastným, jednoducho a úsporne a následne odvodil celkom originálne nové, elegantné a hlavne jednoduchšie riešenie. Uvedieme aspoň náčrt hlavnej myšlienky Pelzovho riešenia.

Nech K je daná kužeľová plocha určená kužeľosečkou k v rovine α a vrcholom V . Takmer celé riešenie úlohy sa bude robiť v rovine α , preto vrchol V určíme jeho kolmým priemetom V' do tejto roviny a vzdialenosťou $d = |V, \alpha| = |VV'|$. Pod osami x, y, z plochy K rozumieme tri navzájom kolmé priamky, pre ktoré platí, že každá z nich je polárne združená s rovinou určenou zvyšnými dvoma vzhľadom na plochu K .¹¹ Ak existuje trojica priamok x, y, z požadovanej vlastnosti, tak trojhran nimi určený je autokonjugovaný vzhľadom na plochu K , odkiaľ vyplýva, že trojuholník XYZ ($X = x \cap \alpha$, $Y = y \cap \alpha$, $Z = z \cap \alpha$) je autokonjugovaným (polárnym) trojuholníkom vzhľadom na kužeľosečku $k = K \cap \alpha$ a navyše bod V' je jeho ortocentrum¹² (obr. 2). Pelz hľadá nevyhnutné a dostačujúce podmienky existencie takého trojuholníka. Jednoduchým spôsobom dokazuje, že všetky jeho strany sa dotýkajú paraboly p , ktorej dotyčnicami sú osi $^i o$ ($i = 1, 2$) kužeľosečky k , polára bodu V' a symetrály $^i h$ uhlov sprievodičov bodu V' vzhľadom na kužeľosečku k (jej ohniská sú $^i F$ ($i = 1, 2$)). Ohnisko P paraboly p je diagonálnym bodom štvorstranu určeného dvojicami dotyčníc $^i o, ^i h$ ($i = 1, 2$). Priamka $V'X$, resp. $V'Y$, resp. $V'Z$ je združenou polárou priamky YZ , resp. XZ , resp. XY kolmou na túto priamku. Pretože obálkou paraboly p je množina združených polár ku priamkam zväzku priamok so stredom V' , ktoré sú kolmé na odpovedajúce priamky zväzku, musia vrcholy polárneho trojuholníka ležať na polárnom útvaru k tejto obálke. Touto bodovou množinou je rovnoosová hyperbola k_1 , ktorej asymptoty sú rovnobežné s osami kužeľosečky k , prechádza jej stredom S , ako aj bodom V' (dotyčnica t hyperboly v bode V' je združenou polárou k poláre bodu V' , k nej kolmou) (obr. 3). Hyperbola k_1 je určená; označme jej stred S_1 a druhý krajný bod priemeru hyperboly prechádzajúceho bodom V' nech je Q (navyše body S, P, Q sú kolineárne).

Dalej Pelz dokazuje, že kružnica l opísaná trojuholníku XYZ prechádza pevnými bodmi P a Q . Každá kružnica zväzku kružníc incidentných s bodmi P, Q má vo všeobecnom prípade okrem bodu Q spoločné s hyperbolou k_1 ďalšie tri body, ktoré sú vrcholmi polárneho trojuholníka (vzhľadom na danú kužeľosečku k) s ortocentrom V' . Na záver treba vybrať tú z kružníc zväzku, pre ktorú sú priamky spájajúce vrchol V kužeľovej plochy K s vrcholmi polárneho trojuholníka na tejto kružnici navzájom kolmé. Táto podmienka je splnená práve vtedy, keď kružnica l prechádza antipólom O priemerovej priamky hyperboly k_1 kolmej na priamku $V'S_1$ vzhľadom na dištančnú kružnicu k^d vrcholu V kužeľovej plochy.¹³ Potom $l \cap k_1 = \{Q, X, Y, Z\}$ a priamky VX, VY, VZ sú riešením úlohy. (Obr. 4)

Ďalším originálnym prínosom Karla Pelza pre riešenie úloh súvisiacich s konštrukciou obrysov priemetov kvadrík a analogického problému dotýkajúceho sa konštrukcie hranice

¹⁰ Michele Chasles (1793 – 1880), jeden z najväčších francúzskych matematikov 19. storočia (*Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, II. ed., Paris, 1875)

¹¹ Takýchto trojíc priamok môže byť nekonečne mnoho, napríklad v prípade rotačnej kužeľovej plochy.

¹² Poznámka. Ak sa ďalej bude hovoriť o polarite, či polárnej združenosti (bez doplňujúcich údajov), budeme mať vždy na mysli polaritu / polárnu združenosť vzhľadom na určujúcu kužeľosečku k v rovine α .

¹³ Kružnica k^d so stredom V' a polomerom d je kružnicou roviny α . Kružnica l je rovnolahlá s kružnicou deviatich bodov prislúchajúcou trojuholníku XYZ ; stred rovnolahlosti je bod V' a koeficient sa rovná $-d^2$. (Platí: $|V'O| \cdot |V'S_1| = d^2$)

hodeného tieňa kvadriky tak v rovnobežnom, ako aj v stredovom osvetlení je zovšeobecnenie už vtedy významnej vety *Queteletovej-Dandelinovej* (Q-D veta). V ňom stanovil nutné a dostačujúce podmienky riešenia stanovenej úlohy pre všetky regulárne kvadriky s výnimkou jednodielneho rotačného hyperboloidu a hyperbolického paraboloidu, pre ktoré treba na riešenie použiť iný postup. Pelzovo zovšeobecnenie znie:

Veta 2. Obrysom priemetu kvadratickej plochy v rovnobežnom i stredovom premietaní do roviny patriacej do osnovy kružnicových rezov plochy je kužeľosečka, ktorej ohniská sú priemety krajných bodov priemeru plochy združeného s osnovou rovín rovnobežných s priemetňou (vzhľadom na danú plochu).¹⁴

Pelz sa vrátil k tejto vete vo svojej poslednej práci venovanej stereografickému premietaniu. Práca demonštruje, ako z Q-D vety celkom spontánne vychádzajú všetky vlastnosti tohto zobrazenia. Pelz poznamenal: „*Len málo viet priestorovej geometrie zohráva vo vyučovaní deskriptívnej geometrie tak závažnú rolu ako táto veta – pre jej početné a mnohostranné použitie v tejto disciplíne*“.

S ohľadom na rozsah a zameranie príspevku nie je možné analyzovať ďalšie práce K. Pelza z tejto oblasti. Pripomenieme si už len dve vety, ktoré sa označujú za Pelzove vety [2], [15] a pomocou ktorých možno dokázať Chaslesovu vetu uvedenú bez dôkazu v poznámke XXVI v *Aperçu historique*.

Veta 3. Ohniská priemetov rovnobežných rovinných rezov danej kvadriky rovinami, ktoré sú rovnobežné s priemetňou, ležia na dvoch kužeľosečkách. Tieto kužeľosečky sú konfokálne s obrysom priemetu plochy.¹⁵

Veta 4. Ohniská dvojdielneho rotačného hyperboloidu, predĺženého rotačného elipsoidu a rotačného paraboloidu sa v pravouhlom premietaní premietajú do ohnisk obrysov priemetov týchto plôch. Obrysy pravouhlých priemetov jednodielneho rotačného hyperboloidu a splošteného rotačného elipsoidu sú konfokálne s priemetom kružnice, ktorá vznikne rotáciou ohniska meridiánu plochy.¹⁶

Z hľadiska dôležitosti tematiky, originality a jednoduchosti postupov si pozornosť zasluhujú i práce (14), (22) a (32).

2. 2 Vedecká výstavba zobrazovacích metód

Hlavnou zásluhou Karla Pelza je sprecizovanie základov pravouhlej axonometrie ako autonómnej zobrazovacej metódy. Pelz sa problémom začal zaoberať s ušľachtilým cieľom „opraviť niektoré chybné úsudky v spisoch venovaných tejto metóde“ [5]. Ako prvý obrátil pozornosť na axonometrický trojuholník a dokázal, že týmto trojuholníkom a s ním spojeným ortogonálnym súradnicovým trojhranom (ktorý je axonometrickým trojuholníkom zadaný¹⁷) je pravouhlá axonometria určená. Vyriešil s úplnosťou všetky základné metrické úlohy

¹⁴ Veta o obryse priemetu rotačnej kvadriky (s výnimkou jednodielneho rotačného hyperboloidu) je jednoduchým dôsledkom tejto vety. Ohniská v tomto prípade sú priemety vrcholov plochy.

¹⁵ Možno dokázať, že v prípade rovnobežného premietania veta platí pre ľubovoľnú osnovu rovín neobsahujúcu priemetňu.

¹⁶ Analogické vety, ktoré sa dotýkajú osvetlenia plôch a sú dôsledkami viet 2–4 možno nájsť v prácach (12), (14), (15) K. Pelza alebo v [2].

¹⁷ Poznatok, že axonometrický priemet súradnicového začiatku je ortocentrom axonometrického trojuholníka, dokázal nemecký matematik O. Schlömilch (1823 – 1901) r. 1856. [5]

o základných geometrických útvaroch (priamky a roviny navzájom kolmé, obraz kružnice, dĺžka úsečky, vzdialenosť súradnicového začiatku od ľubovoľnej roviny určenej stopami, otáčanie roviny). V tejto metóde sa Pelz zaoberal i stredovým a rovnobežným osvetlením guľovej plochy, konštrukciou izofót na guľovej, rotačnej valcovej i kužeľovej ploche a rovnobežným osvetlením dutej polgule. Ako prvý využil na konštrukciu osí axonometrického priemetu hodeného tieňa guľovej plochy do pomocnej priemetne (v rovnobežnom osvetlení) guľovú plochu súmerne združenú s danou podľa tej istej priemetne a kosoštvorec, ktorého strany sú incidentné s obrysmi priemetov dvoch valcových plôch¹⁸; hľadané osi ležia na uhlopriečkach tohto kosoštvorca.¹⁹

Karel Pelz sa prirodzene zaoberal aj základnou vetou šikmej axonometrie. Je ňou *Pohlkeho veta*, ktorú takto nazvali matematici po jej uverejnení v prvom dieli Pohlkeho učebnice deskriptívnej geometrie²⁰ r. 1860, kde Pohlke poznamenal, že elementárny dôkaz vety pravdepodobne neexistuje, a preto sa prekladá do druhého dielu učebnice. Prvým elementárnym, geniálne jednoduchým úplným dôkazom Pohlkeho vety bol dôkaz mladého H. Schwarza, Pohlkeho žiaka. Schwarz dokázal vetu v zovšeobecnenom tvare: „*Vrcholy každého rovinného štvoruholníka možno považovať za rovnobežný priemet vrcholov štvorstenu vopred zvoleného tvaru (t. j. podobného ľubovoľnému danému štvorstenu)*“ r. 1863 a jeho dôkaz uverejnil Pohlke, po vzájomnej dohode, v druhom vydaní prvého dielu svojej učebnice r. 1866.²¹ Originálny Pohlkeho dôkaz nikdy uverejnený nebol. V priebehu ďalšieho polstoročia vyšli mnohé nové dôkazy tejto vety, syntetické i analytické. Jedným z prvých bol dôkaz Karla Pelza r. 1877 [9]. Pelzov dôkaz je významný z historického hľadiska; Schwarz v ňom rozpoznal Pohlkeho dôkaz, s ktorým bol oboznámený, no nedokázal ho reprodukovať (v čase uverejnenia Pelzovho dôkazu Karl Pohlke už nežil).

Na záver možno povedať, že Karel Pelz vedel majstrovským spôsobom používať syntetické metódy projektívnej a deskriptívnej geometrie na odvodenie a doplnenie známych a na vyhľadávanie nových konštrukcií i metód. O každom probléme uvažoval z hľadiska úspornosti (v počte základných operácií) a presnosti. Najväčšiu váhu kládol na priehľadnú jasnosť a jednoduchosť. To sa odrazilo aj v jeho vlastných vzorných prednáškach, ktoré sa tešili veľkej obľube. Naozaj možno ľutovať, že nezanechal po sebe sústavný spis z deskriptívnej geometrie. Do knižného spracovania sa dostala aspoň jeho axonometria v diele jeho bývalého asistenta a neskôr nástupcu (v Grazi), *Rudolfa Schüsslera „Orthogonale Axonometrie. Ein Lehrbuch zum Selbststudium“* (Ortogonalna axonometria. Učebnica na samoštúdium, Lipsko a Berlín, 1905). Autor sa chcel odvdáčiť veľkému deskriptívnemu geometrovi za jeho zaujatie v prospech deskriptívnej geometrie a jej vyučovania na vysokých školách technických. V diele sú nielen metodicky vysvetlené Pelzove myšlienky pre tých, ktorí sú už oboznámení so základmi tejto disciplíny, ale sú tiež aplikované na širokú škálu zaujímavých problémov teoretických i praktických.

¹⁸ Jedna z plôch je hranicou premietacieho útvaru danej guľovej plochy, druhá je s ňou súmerne združená podľa zvolenej pomocnej priemetne.

¹⁹ Metóde pravouhlej axonometrie sú venované práce (16), (18), (24), (26).

²⁰ Karl Pohlke (1810 – 1876), profesor deskriptívnej geometrie na technickej vysokej škole v Berlíne; *Darstellende Geometrie* (Deskriptívna geometria, Berlín 1860, 1866, 1872 – prvý diel, Berlín 1876 – druhý diel)

²¹ Podrobnejšie sa o histórii dôkazu vety a jej význame v didaktike matematiky možno dozvedieť v [14].

Zoznam prác Karla Pelza

- 1 Stredový a rovnobežný priemet plôch druhého stupňa na rovinu kružnicových rezov. (Die Central- und Parallelprojektion der Flächen zweiten Grades auf eine Kreisschnittebene) In: *Grunert's Archiv für Mathematik und Physik*, III, 1871, s. 313 – 330
- 2 O probléme lesklých bodov. (Über das Problem der Glanzpunkte) In: *Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien*, LXIX, 1871, II Abth., 730 – 740
- 3 O určení osí stredového priemetu kružnice. (Über die Bestimmung der Achsen von Zentralprojektionen des Kreises) In: *Věstník královské české společnosti nauk v Praze*, 1872
- 4 O určení osí stredového priemetu plôch druhého stupňa. (Über die achsenbestimmung von Zentral-Projektionen der Flächen zweiten Grades) In: *Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien*, LXVI, 1872, II Abth., 481 – 490
- 5 Určenie osí kužeľových plôch druhého stupňa. (Die Achsenbestimmung der Kögelflächen zweiten Grades) In: *Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien*, LXIX, 1874, II Abth., 215 – 227
- 6 Príspevok ku konštrukcii kužeľosečiek z bodov a dotýčníc pomocou kolineácie. (Beiträge zur Konstruktion der Kegelschnitte aus Punkten aus Tangentendurch Kollineazion) In: *Věstník královské české společnosti nauk v Praze*, 1875
- 7 O určení osí kužeľosečiek. (Über die Achsenbestimmung der Kegelschnitte) In: *Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien*, LXLXXIII, 1876, II Abth., 379 – 432
- 8 Konštrukcia osí elipsy z dvoch združených priemerov. (Konstruktion der Achsen einer Ellipse aus zwei konjugierten Diametern) In: *Vo výročnej správe c. k. reálky v Těšíně*, 1876
- 9 O všeobecnom spôsobe určenia ohnisk obrysov plôch druhého stupňa. (Über eine allgemeine Bestimmungsart der Brennpunkte von Konturen der Flächen zweiten Grades) In: *Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien*, LXXV, 1877, II Abth. 175 – 217
- 10 O novom dôkaze základnej Pohlkeho vety. (Über einen neuen Beweis des Fundamentalsatzes von Pohlke) In: *Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien*, LXXVI, 1877, 123 – 138
- 11 Doplnok k všeobecnému spôsobu určenia ohnisk obrysov plôch druhého stupňa. (Ergänzungen zur allgemeinen Bestimmungsart der Brennpunkte von Konturen der Flächen zweiten Grades) In: *Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien*, LXXVII, 1878, II Abth., 259 – 288
- 12 Príspevky k určeniu hranice vlastného a hodeného tieňa plôch druhého stupňa v stredovom osvetlení. (Beiträge zur Bestimmung der Selbstschatten- und Schlagschattengrenzen der Flächen zweiten Grades bei Centralbeleuchtung) In: *Výročná správa krajinskej reálky v Grazi*, 1878

- 13 Konštrukcie polomerov krivosti kuželosečiek ako dôsledok jednej Steinerovej vety. (Die Krümmungshalbmesser-Konstruktionen der Kögelschnitte als Korollarien eines Steiner'schen Satzes) In: *Věstník královské české společnosti nauk v Praze*, 1879
- 14 K určení dotyčnic hranic vlastního tieňa rotačných plôch. (Zur Tangentenbestimmung der Selbstschattengrenze von Rotationsflächen) In: *Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien*, LXXIX, II Abth., 447 – 471
- 15 Ku konštrukcii hraníc vlastných a hodených tieňov plôch druhého stupňa za predpokladu stredového osvetlenia. (Zur Konstruktion der Selbst- und Schlagschattengrenzen von Flächen zweiten Grades unter Voraussetzung centraler Beleuchtung) In: *Věstník královské české společnosti nauk v Praze*, 1879/1880
- 16 K vedeckému spracovaniu ortogonálnej axonometrie. Prvá správa. (Zur wissenschaftlichen Behandlung der orthogonalen Achsonometrie. Erste Mitteilung) In: *Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien*, 81, 1880, II Abth., 300 – 330
- 17 O Queteletovej fokálnej krivke. (Über die Fokalkurven des Quetelet) In: *Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien*, LXXXII, 1880, Abth., 1207 – 1219
- 18 K vedeckému spracovaniu ortogonálnej axonometrie. Druhá správa. (Zur wissenschaftlichen Behandlung der orthogonalen Achsonometrie. Zweite Mitteilung) In: *Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien*, 83, 1881, II abth. 375 – 384
- 19 Ku konštrukcii priesečníkov priamok s kuželosečkami. (Zur Konstruktion der Schnittpunkte von Geraden mit Kegelschnitten) In: *Grunert's Archiv für Mathematik und Physik*, 1881
- 20 Poznámky ku konštrukciám polomerov krivosti kuželosečiek ako dôsledok jednej Steinerovej vety. (Bemerkungen zu den Krümmungs-Halbmesser-Konstruktionen der Kegelschnitte als Korollarien eines Steiner'schen Satzes) In: *Věstník královské české společnosti nauk v Praze*, 1882
- 21 K problému normál kuželosečiek. (Zur Normalenproblem der Kegelschnitte) In: *Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien*, 1882
- 22 K určení obrysu zbortených skrutkových plôch. (Zur Konturbestimmung windschiefer Schraubenflächen) In: *Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien*, LXXXVII, 1883, II Abth., 473 – 483
- 23 O „fundamentálnej vete“ pána Streisslera v konštrukčnej teórii tieňov. (Über Herrn Streissler's Fundamentalsatz der konstruktiven Schattentheorie) In: *Grunert's Archiv für Mathematik und Physik*, LXIX, 1883, 437 – 439
- 24 K vedeckému spracovaniu ortogonálnej axonometrie. Tretia správa. (Zur wissenschaftlichen Behandlung der orthogonalen Achsonometrie. Dritte Mitteilung) In: *Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien*, 90, 1884, II Abth., 1060 – 1075

- 25 Poznámky k určení osí kuželových plôch druhého stupňa. (Bemerkungen zur Achsenbestimmung der Kegelflächen zweiten Grades) In: *Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien*, XCII, 1885, II Abth., 410 – 415
- 26 Príspevky k vedeckému spracovaniu ortogónálnej axonometrie. (Beiträge zur wissenschaftlichen Behandlung der orthogonalen Achsonometrie) In: *Věstník královské české společnosti nauk v Praze*, 1885, 648 – 666
- 27 K problému normál elipsy. (Zum Normalenproblem der Ellipse) In: *Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien*, 1887
- 28 K problém normál dokonale narysovanej elipsy. (Zur Normalenproblem einer vollständig gezeichneten Ellipse) In: *Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien*, 1887
- 29 Poznámka k rozprave: O Queteletovej fokálnej krivke. (Note zur Abhandlung: Über die Fokalkurven des Quetelet) In: *Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien*, XCVII, 1888, 1411 – 1415
- 30 Ortogónálny priemet kružnice. (Die orthogonale Projektion des Kreises) In: *Časopis pre reálne školstvo*, roč. XVI, 1891
- 31 O kuželosečkách opísaných a vpísaných do päťuholníka. (Über die Kegelschnitte um und in ein Fünfeck) In: *Schlömilch's Zeitschrift für Mathematik und Physik* (Vybrané z dopisu zaslaného Schlömilchovi), 1894
- 32 Ku klinogónálnemu zobrazeniu rotačných plôch. (Zur klinogonalen Darstellung der Rotationsflächen) In: *Věstník královské české společnosti nauk v Praze*, 1895²²
- 33 K Joachimsthalovmu riešeniu problému normál. (Zur Joachimsthal'schen Lösung des Normalenproblems) In: *Věstník královské české společnosti nauk v Praze*, 1895
- 34 Hlavné vety stereografického premietania ako dôsledky Queteletovej a Dandelinovej vety. (Die Hauptsätze der stereographischen Projektion als Korollarien des Satzes von Quetelet und Dandelin) In: *Věstník královské české společnosti nauk v Praze*, 1898

Literatúra

- [1] Foltá, J. *Česká geometrická škola (Historická analýza)*. Praha: Nakladatelství ČSAV, 1982
- [2] Kadeřávek, F., Klíma, J., Kounovský, J. *Deskriptivní geometrie. Díl druhý*. Praha: Jednota česko-slovenských matematiků a fysiků 1932
- [3] Kadeřávek, F., Klíma, J., Kounovský, J. *Deskriptivní geometrie. Díl I*. Praha: Jednota česko-slovenských matematiků a fysiků 1932
- [4] Klapka, J. *Deskriptivní geometrie*. Praha: Vědecko-technické nakladatelství 1951
- [5] Loria, G. *Storia della geometria descrittiva*. Miláno: Ulrico Hoepli, 1921
- [6] Pelz, K. Über die Bestimmung der Axen von Zentralprokektionen des Kreises. In: *Věstník královské české společnosti nauk v Prahe*, Praha 1872
- [7] Pelz, K. Die Axenbestimmung der Kegelflächen zweiten Grades. In: *Věstník královské české společnosti nauk v Prahe*, Praha 1874
- [8] Pelz, K. Construction der Axen einer Ellipse aus zwei conjugirten Diametern. In: *Výročná správa c. k. reálky v Těšíně*, 1876

²² Podľa Loria r. 1895 (Uvedený zoznam prác uverejnil Jan Sobotka v [14])

- [9] Pelz, K. Über einen neuen Beweis des Fundamentalsatzes von Pohlke. In: *Sitzungsb. der kaiser. Akademie der Wissenschaften in Wien*, Wien 1877
- [10] Pelz, K. Beiträge zur Bestimmung der Selbstschatten- und Schlagschattengrenzen der Flächen zweiten Grades bei Centralbeleuchtung. In: *Sitzungsb. der kaiser. Akademie der Wissen. in Wien*, Wien 1878
- [11] Procházka, B. *Vybrané statě z deskriptivní geometrie*. Praha: Česká matica technická 1912
- [12] Sklenáriková, Z. Z dejín deskriptívnej geometrie v Rakúsko-Uhorsku. In: *Matematika v proměnách věků II*, ed. Dějiny matematiky, zv. 16, Praha, Prometheus 2001, ISBN 80-7196-218-X
- [13] Sklenáriková, Z. Emil Müller – vrcholný predstaviteľ viedenskej geometrickej školy. In: *G – slovenský časopis pre geometriu a grafiku*, roč.1, č.2, STU Bratislava 2004, ISSN 1336-524X
- [14] Sklenáriková, Z., Pémová, M. Pohlkeho veta a jej význam v didaktike matematiky. In: *Zborník prednášok z medzinár. ved. konf. „Matematika vo výučbe, výskume a praxi 2005“*, Nitra Katedra matematiky FEM SPU 2005 (v tlači)
- [15] Sobotka, J. O životě a činnosti Karla Pelze. In: *Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*, vyd. Jednota českých matematiků, s. 433 – 460, Praha 1910