GEOMETRIA 3

Elementárna geometria euklidovskej roviny

(druhý ročník, letný semester; prednáška 2 hod., cvičenie 2 hod. / týž.; 3 kredity, 40/60)

OSNOVA PREDNÁŠKY

1. Geometria axióm incidencie a usporiadania (*usporiadaná rovina*). Úsečka, konvexný útvar, polpriamka, polrovina, trojuholník, lomená čiara, uhol, *n*-uholník. Oblasť, rozdelenie roviny daným konvexným útvarom na dve oblasti.

2. Geometria axióm incidencie, usporiadania a zhodnosti (*metrická rovina*). Zhodnosť trojuholníkov. Vlastnosti útvarov založené na zhodnosti. Porovnávanie úsečiek a uhlov. Vety o zhodnosti trojuholníkov. Stred úsečky a os uhla. Trojuholníkové nerovnosti. Nutné a dostačujúce (?) podmienky existencie trojuholníka, ktorého strany sú reprezentantmi daných voľných úsečiek *a*, *b*, *c*.

3. Kolmosť priamok. Pravý uhol, uhol dvoch priamok. Kolmé priamky. Pravouhlý (ostrouhlý, tupouhlý) trojuholník. Vzdialenosť bodu od priamky. Rovnobežnosť priamok. Euklidovská axióma rovnobežnosti (*Euklidovská rovina*). Nutné a dostačujúce podmienky rovnobežnosti priamok. Súčet vnútorných uhlov v trojuholníku (dôsledok pre vonkajší uhol trojuholníka). Súhlasne (nesúhlasne) orientované polpriamky incidentné s rovnobežnými priamkami. Súhlasne (nesúhlasne) orientované uhly. Pojem orientovanej roviny.

4. Kružnica, základné súvisiace pojmy. „Axiómy“ kružnice. Vzájomná poloha priamky a kružnice, vzájomná poloha dvoch kružníc. Dostačujúce podmienky existencie trojuholníka, ktorého strany sú zhodné s danými tromi úsečkami *a*, *b*, *c*. Kružnica do trojuholníka vpísaná a trojuholníku opísaná. Stredový a obvodový uhol prislúchajúce k danému kružnicovému oblúku. Tetivové a dotyčnicové štvoruholníky a ich vlastnosti.

5. Riešenie konštrukčných planimetrických úloh. Metódy. Základné množiny bodov. Riešenie planimetrických úloh s využitím množiny bodov požadovanej vlastnosti. Význačné body a priamky v trojuholníku a štvoruholníku, vlastnosti (stredná priečka, uhlopriečka, výška, os strany, os uhla). Eulerova priamka, Feuerbachova kružnica.

6. Miera úsečiek a uhlov. Axiómy spojitosti. Súvis s axiómami kružnice z bodu 4.

7. Zhodnostné zobrazenia (izometrie). Súhlasné a nesúhlasné izometrie. Klasifikácia zhodnostných zobrazení. Grupa izometrií rovinného útvaru. Riešenie planimetrických úloh s použitím zhodnostných zobrazení.

8. Úmernosť dvojíc úsečiek. Podobnosť trojuholníkov. Podobnostné zobrazenie (podobnosť). Rovnoľahlosť. Súhlasné a nesúhlasné podobnosti. Riešenie planimetrických úloh s použitím podobnostných zobrazení.

9. Planimetrické útvary zhodne rozložiteľné a zhodne doplniteľné. Využitie v riešení planimetrických úloh. Aplikácia pri určovaní obsahov rovinných útvarov.[1]

10. Geometria kružnice. Mocnosť bodu vzhľadom na kružnicu, zväzok kružníc. Konštrukcia kružnice požadovaných vlastností patriacej do daného zväzku kružníc. Stredy rovnoľahlosti troch kružníc, vlastnosti. Recipročné dvojice bodov dvoch kružníc. Riešenie Apolloniových úloh.

11. Kružnicová inverzia (príklad nelineárneho zobrazenia). Základné pojmy a vlastnosti. Obraz priamky a kružnice, samodružné prvky. Konformnosť zobrazenia. Riešenie planimetrických úloh metódou kružnicovej inverzie.

LITERATÚRA

1. Sklenáriková, Z., Čižmár, J. *Elementárna geometria euklidovskej roviny*, FMFI UK Bratislava 2002, skriptum; ISBN 80-223-1585-0
2. Hartshorne, R. *Geometry: Euclid and beyond*, Springer, 2000; ISBN 0-387-98650-2
3. Piják, V. a kol. *Konštrukčná geometria*, SPN Bratislava 1985
4. Hecht, T. – Sklenáriková, Z. *Metódy riešenia matematických úloh*, SPN, Bratislava 1992 (vysokoškolská učebnica)
5. Sklenáriková, Z. *K metódam riešenia Apolloniovej úlohy*, In *Matematika v proměnách věků III, Edícia Dějiny matematiky, Praha, 2004, s.* 45 – 55; vyd.: Výzkumné centrum pro dějiny vědy, Praha; ISBN 80-7285-040-7

Poznámka. a) Riešenie slávnej Apolloniovej úlohy o dotyku kružníc priťahovalo pozornosť matematikov všetkých čias. Článok 5 zo zoznamu literatúry ponúka stručný prehľad metód jej riešenia (metóda algebrická, metódy elementárnogeometrické a deskriptívnogeometrické) s osobitným zreteľom na prekvapujúco jednoduché riešenie francúzskeho matematika J. D. Gergonna, ako aj elegantné cyklografické riešenie problému v prípade, keď Gergonnovu metódu nie je možné použiť. Pre záujemcov je článok v plnej verzii uvedený na nasledujúcich stranách.

b) Jednou z elementárnogeometrických metód riešenia Apollóniovej úlohy je metóda kružnicovej inverzie. Rozšírením tejto metódy na trojrozmerný priestor je metóda inverzie vzhľadom na guľovú plochu. Použitím metódy možno riešiť nielen problém o dotyku guľových plôch (analogický problém k Apollóniovej úlohe), ale i ďalšie zaujímavé úlohy elementárnej geometrie s ním súvisiace. Pre záujemcov je v ponuke stránky téma „*Inverzia vzhľadom na guľovú plochu v riešení Soddyho problému*“. Jedná sa o tzv. Soddyho reťazec guľových plôch (Soddy’s hexlet), ktorý je analógiou Steinerovho reťazca kružníc. Je to jedna z krásnych geometrických konfigurácií, ktorej prekvapujúce vlastnosti možno odvodiť použitím inverzie vzhľadom na guľovú plochu.

[1] Príklady a cvičenia v kapitole 9 vysokoškolského učebného textu [1].

K METÓDAM RIEŠENIA APOLLONIOVEJ ÚLOHY

ZITA SKLENÁRIKOVÁ

Úvod

Apolloniova úloha „Zostrojte kružnicu dotýkajúcu sa daných troch geometrických útvarov z útvarov bod, priamka, kružnica“ (v tej istej rovine), pričom „dotyk s bodom“ znamená incidenciu, zaujíma významné postavenie v geometrii euklidovskej roviny. Existuje celkove desať možných kombinácií. Najjednoduchšie prípady nastanú, keď sú dané tri body alebo tri priamky; tieto prípady vyriešil *Euklides* vo svojich Základoch. O riešenie ďalších úloh sa zaujímali geometri všetkých čias, čo malo za následok vypracovanie rozmanitých metód riešenia. Apolloniove úlohy patria dodnes k najpríťažlivejším úlohám syntetickej geometrie.

O dotyku kružníc údajne písal už *Archimedes* ([10]). Jeho spis sa však nezachoval. Taktiež sa nezachoval dvojzväzkový pôvodný spis Apollonia z Pergy (262? – 190? pred n. l.) „O dotykoch“. Zmienil sa o ňom *Pappos* okolo roku 320, podľa ktorého Apollonios vyriešil všetky úlohy s výnimkou prípadu troch kružníc.

Úlohu s tromi kružnicami riešil ako prvý *F. Viète* (1540 – 1603) v spise „*Apollonius Gallus*“ (Paríž, r. 1600) ([1], [2], [10]). V riešení použil stredy rovnoľahlosti troch kružníc; jemu sa pripisuje ich objav, i keď sa o týchto bodoch príležitostne zmieňoval už Pappos. Výsledky nazval Viète Apolloniovými kružnicami[2]; vo všeobecnom prípade je osem výsledkov. Ak sa dané tri kružnice navzájom dotýkajú, riešenia sú dve (tzv. Soddyho[3] kružnice).

Najjednoduchšou analytickou metódou riešenia je simultánne riešenie troch kvadratických rovníc

$$(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 - (r \pm r_i)^2 = 0 \qquad (1)$$

pre i = 1, 2, 3, kde (x_i, y_i) je stred a r_i polomer i-tej kružnice, (x, y) sú neznáme súradnice stredu a r neznámy polomer hľadanej kružnice pri všetkých možných kombináciách znamienok v posledných zátvorkách na ľavej strane rovníc. (Ide o kombinácie s opakovaním tretej triedy z dvoch prvkov; ich počet je $2^3 = 8$.) Umocnením výrazov v rovniciach a postupným odčítaním prvej rovnice od druhej a tretej sa dostane výsledok

$$x = \frac{b'd - bd' - b'cr + bc'r}{ab' - a'b}, \quad y = \frac{-a'd + ad' + a'cr - ac'r}{ab' - a'b} \qquad (2)$$

kde $a = 2(x_1 - x_2)$, $b = 2(y_1 - y_2)$, $c = \pm 2(r_1 - r_2)$, $d = (x_1^2 + y_1^2 - r_1^2) - (x_2^2 + y_2^2 - r_2^2)$

a podobne sa dostanú a', b', c', d' zámenou dolného indexu 2 indexom 3. Dosadením (2) do (1) sa získa rovnica pre neznámu r. Riešenie uviedli Courant a Robbins v [2].

Syntetické metódy riešenia Apolloniovej úlohy by sme mohli rozdeliť na *elementárno-geometrické* metódy a metódy *deskriptívnogeometrické*.

---

[2] V dnešnej terminológii pod *Apolloniovou kružnicou* prislúchajúcou usporiadanej dvojici bodov A, B a kladnému reálnemu číslu k ($k \neq 1$) sa rozumie množina všetkých bodov X roviny, pre ktoré $|AX| : |BX| = k$.

[3] *Soddy Frederick*, Oxford. R. 1936 objavil uzavretý reťazec šiestich guľových plôch G_i („Soddys hexlet“), v ktorom plocha G_{i+1} sa dotýka plochy G_i (i = 1, 2, ... 6; $G_7 = G_1$) a všetky plochy v reťazci sa dotýkajú daných troch guľových plôch. [11]

1 Elementárnogeometrické metódy riešenia Apolloniovej úlohy

1.1 Metóda množín bodov

Konštrukcia stredov kružníc, ktoré sa dotýkajú troch navzájom nezhodných a nesústredných kružníc sa zakladá na nasledujúcom poznatku:

Veta 1. Množina stredov všetkých kružníc, ktoré sa dotýkajú dvoch nezhodných, nedotýkajúcich sa a nesústredných kružníc $k_i(S_i, r_i)$ (i = 1, 2), sú dve konfokálne kužeľosečky s ohniskami S_1, S_2 a dĺžkami $|r_1 - r_2|$ a $(r_1 + r_2)$ hlavnej osi (s výnimkou nevlastných bodov kužeľosečiek a prípadných spoločných bodov daných kružníc).

Poznámka. Konštrukcia priesečníkov dvoch nenarysovaných kužeľosečiek, ktoré majú jedno ohnisko spoločné, je *euklidovská*. Možno ju vykonať napríklad:

a) Použitím homológie medzi týmito kužeľosečkami, a to jej vyjadrením ako kompozície homológií každej z kužeľosečiek s tou kružnicou k_i, ktorá má stred v spoločnom ohnisku kužeľosečiek.
b) Použitím vlastností polarity (Podľa jednej zo Steinerových viet je polárne združená krivka s kužeľosečkou, vzhľadom na určujúcu kružnicu so stredom v jednom jej ohnisku, kružnica.). Stred každého riešenia je pólom spoločnej dotyčnice polárne združených kružníc k daným kužeľosečkám vzhľadom na tú z kružníc k_i, ktorej stred je spoločným ohniskom kužeľosečiek. Obe riešenia čitateľ nájde v [5].
c) Metódou deskriptívnej geometrie možno jednoducho zostrojiť rotačnú kužeľovú plochu a na nej dve elipsy, ktoré sa premietajú kolmo do roviny určujúcej kružnice plochy do daných elíps (priemet vrcholu plochy je ich spoločným ohniskom). Hľadané priesečníky sú priemetmi priesečnice rovín zostrojených elíps s kužeľovou plochou. [4]

1.2 Metóda dilatácie

Základom konštrukcie stredu kružnice požadovanej vlastnosti je nasledujúci poznatok:

Veta 2. Stred každej kružnice dotýkajúcej sa daných troch kružníc $k_i(S_i, r_i)$, i = 1, 2, 3, je za predpokladu $r_1 > r_2 > r_3$ i stredom kružnice, ktorá sa dotýka kružníc $k_1(S_1, r_1 \pm r_3)$, $k_2(S_2, r_2 \pm r_3)$ a prechádza bodom S_3 . Znamienko vo výrazoch pre polomery kružníc k_1, k_2 závisí od vzájomnej polohy daných kružníc a typu dotyku s kružnicou, ktorá je riešením úlohy.

Poznámka. Konštrukcia kružnice dotýkajúcej sa daných dvoch kružníc a incidentnej s daným bodom vedie ku konštrukcii kružnice daného eliptického zväzku kružníc, ktorá sa dotýka danej kružnice (2 riešenia) ([12], [13]).

1.3 Metóda recipročných bodov dvojice kružníc

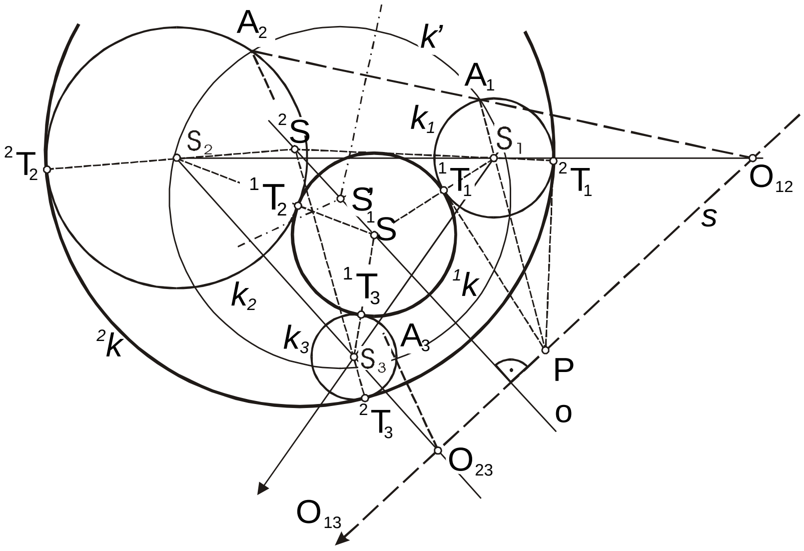
Základom konštrukcie je *Mongeova* veta o stredoch rovnoľahlosti troch kružníc a nasledujúca veta ([12], [13]).

Veta 3. Kružnica k sa dotýka danej dvojice kružníc k_i v bodoch T_i (i = 1, 2) práve vtedy, ak (T_1, T_2) je recipročná dvojica bodov kružníc k_i vzhľadom na zvolený stred rovnoľahlosti týchto kružníc.

Nech A_1, A_2; A_2, A_3 sú ľubovoľné recipročné dvojice bodov dvojíc kružníc (k_1, k_2), (k_2, k_3) vzhľadom na zvolené stredy rovnoľahlosti O_{12} a O_{23} týchto dvojíc kružníc ležiace na osi s podobnosti daných troch kružníc a k' je kružnica incidentná s bodmi A_1, A_2, A_3. Ak existuje kružnica k požadovaných vlastností, tak patrí do zväzku kružníc určeného kružnicou k' a chordálou s. Opäť ju možno zostrojiť ako kružnicu daného zväzku kružníc, ktorá sa dotýka

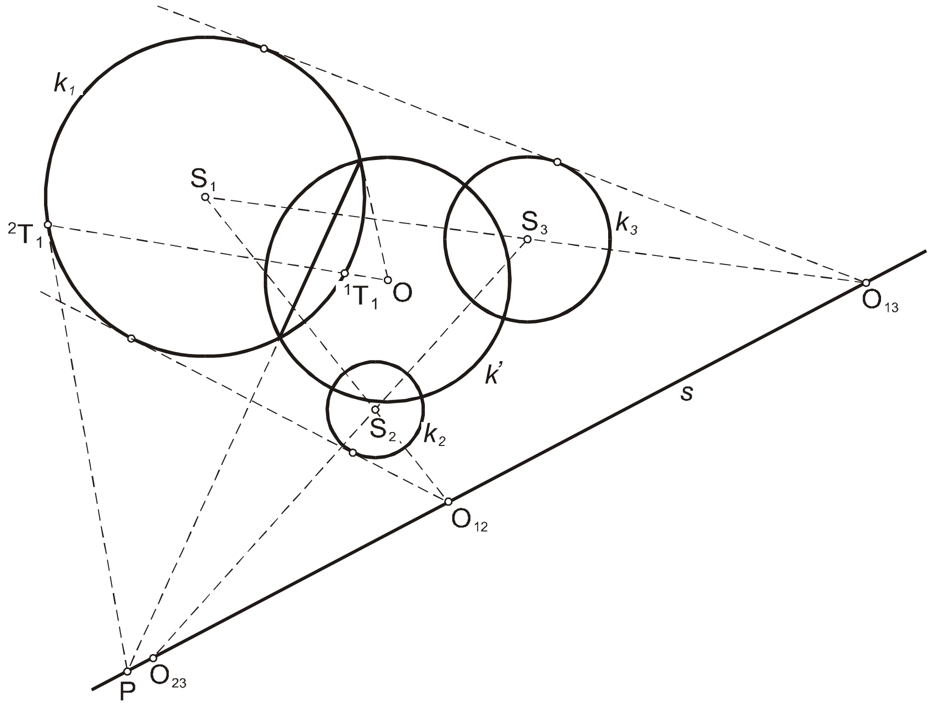
[4] Takto riešil úlohu o prieniku konfokálnych kužeľosečiek *R. Němčík* (1831 – 1877) v roku 1871. [14]

ľubovoľnej jednej z daných kružníc; konštrukcia zaručuje i dotyk so zvyšnými dvoma kružnicami (obr. 1).



Obr. 1.

Touto metódou vyriešil Apolloniovu úlohu francúzsky geometer *Fouché*, ktorý zovšeobecnil riešenie *L. Gaultiera* z roku 1813) ([5]). Gaultier si kružnicu *k'* zvolil tak, aby bola ortogonálna ku všetkým daným kružniciam k_i (i = 1, 2, 3) (obr. 2). Jeho riešenie možno interpretovať i pomocou polarity vzhľadom na niektorú z daných kružníc.



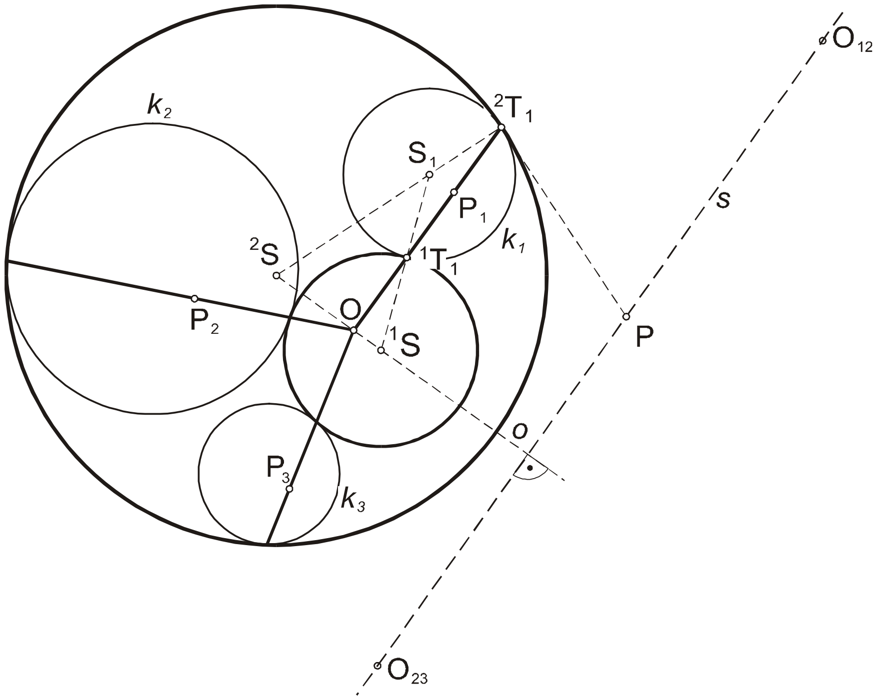
Obr. 2

1.3 Gergonnovo riešenie [5]

Azda najelegantnejšie riešenie Apolloniovej úlohy pochádza od francúzskeho matematika *J. D. Gergonna*; [2], [3], [5]. Možno povedať, že Gergonne aplikoval na Gaultierovo riešenie úlohy poznatky o vlastnostiach polarity v rovine (vzhľadom na niektorú z daných kružníc).

Vezmime si jednu z osí podobnosti týchto kružníc (s) a zostrojme jej pól P_i (i = 1, 2, 3) vzhľadom na každú z kružníc k_i. Dotykové body hľadanej dvojice kružníc s kružnicami k_i ležia potom na spojniciach bodov P_i s chordálovým stredom O kružníc k_i; konštrukcia stredov kružníc je triviálna. Opakovaním postupu pre zvyšné osi podobnosti sa dostanú ďalšie tri dvojice kružníc, ktoré patria do riešenia úlohy.

Z Gaultierovho riešenia totiž vyplýva, že priamka ${}^1T_1{}^2T_1$ (polára bodu $P \in s$ vzhľadom na kružnicu k_1) prechádza bodom O (body P, O sú združené póly vzhľadom na kružnicu k_1); incidencia bodu P_1 s priamkou ${}^1T_1{}^2T_1$ je zrejmá analogicky. Navyše stredy hľadaných kružníc ležia na priamke prechádzajúcej bodom O a kolmej na priamku s, čo umožňuje vykonať konštrukciu pomocou jediného z pólov P_i (i = 1, 2, 3) (obr. 3).



Obr. 3

Spomedzi viacerých interpretácií Gergonnovho riešenia si pripomeňme analytické odvodenie konštrukcie od významného českého geometra *J. Sobotku* a interpretáciu ďalšieho českého geometra *V. Jarolímka*.

J. Sobotka (1862 - 1930) dokázal správnosť Gergonnovho riešenia vychádzajúc z riešenia analogického problému pre guľové plochy. V súbore prác citovaných v [5] uviedol i staršie analytické riešenie anglického geometra Caseyho z r. 1866. Sobotka navyše odvodil ďalšie

[5] *Gergonne, Joseph Diaz* (19. 6. 1771 - 4. 5. 1859), francúzsky matematik a astronóm. Napísal celý rad významných prác z analytickej a projektívnej geometrie, v ktorých sa zaoberal hlavne algebrickými krivkami a plochami 2. stupňa. Súčasne s Ponceletom spoznal a demonštroval význam duality v geometrii, excelentným spôsobom dokázal Pascalove vety. Známe sú pojmy Gergonnov bod, Gergonnov trojuholník; r. 1813 zaviedol Gergonne do matematiky pojem poláry. V r. 1810 – 1831 viedol ako hlavný vydavateľ prvý čisto matematický časopis „Annales de mathematique“ a sám v ňom publikoval okolo 200 vlastných prác z geometrie, ale i z analýzy, statiky, astronómie a optiky.

súvislosti, ktoré umožňujú vykonať Gergonnovo riešenie bez rysovania pólov P_i, použitím pravouhlého trojuholníka a pravítka ([5]).

V. Jarolímek (1846 – 1921) použil na odvodenie konštrukcie homológiu medzi dvoma kružnicami ([7]).

1.4 Metóda kružnicovej inverzie

Kružnicová inverzia je príkladom nelineárneho involutórneho zobrazenia v euklidovskej rovine ([12], [13]). Je veľmi efektívnou metódou riešenia mnohých planimetrických úloh tak konštrukčných, ako aj dôkazových. Má značný počet ďalších aplikácií, ktoré siahajú hlboko do transformačných metód vyššej geometrie. Do geometrie bola zavedená *Stubbsom* (r. 1843, Philosophical Magasin). Názov zobrazenia pochádza od talianskeho geometra *Giusta Bellavitisa* (1809 – 1882) (Annali delle science del regno Lombardo Veneto, zv. VI). *Joseph Liouville*, francúzsky geometer, ju nazval transformáciou s „recipročnými sprievodičmi“ (v Nouvelles Annales de Mathématiques, 1892).

Pre riešenie Apolloniovej úlohy je rozhodujúca konformnosť zobrazenia. V závislosti od vzájomnej polohy daných prvkov sú dve možnosti: buď žiadne dve z daných kružníc nemajú spoločný bod alebo sa niektoré dve z nich pretínajú, či dotýkajú. V prvom prípade možno riešiť úlohu podľa nasledujúcej vety:

Veta 4. Ku každým dvom disjunktným kružniciam k_1, k_2 existuje kružnicová inverzia, ktorá tieto kružnice zobrazí do sústredných kružníc.

Ak existuje kružnica k dotýkajúca sa kružníc k_i (i = 1, 2, 3) a f je kružnicová inverzia zobrazujúca napr. kružnice k_1, k_2 do sústredných kružníc, tak $f(k) = k'$ je kružnica dotýkajúca sa sústredných kružníc $f(k_1)$, $f(k_2)$ a kružnice $f(k_3)$. Riešenie tejto úlohy, ako aj konštrukcia kružnice $k = f^{-1}(k')$ sú triviálne.

Ak majú niektoré dve z daných kružníc spoločný bod, voľbou ľubovoľnej kružnicovej inverzie f so stredom v tomto bode sa v inverzii f zobrazia tieto kružnice do priamok. Hľadaná kružnica k je potom inverzným obrazom kružnice [priamky] dotýkajúcej sa spomenutých priamok [rovnobežnej s týmito priamkami] a kružnice, ktorá je obrazom tretej z daných kružníc vo zvolenej inverzii f.

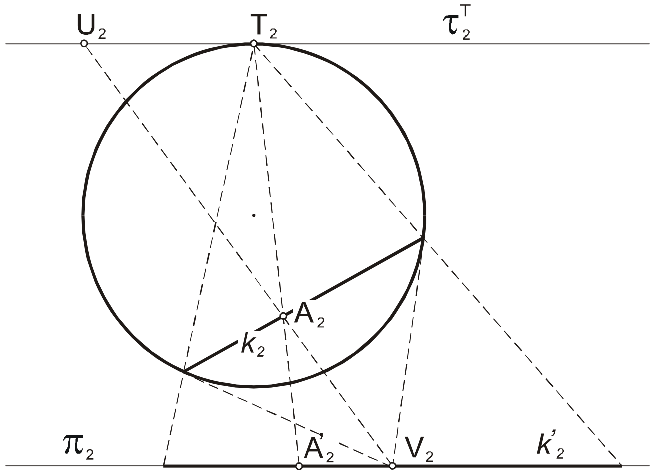
Poznámka. V súvislosti so Gergonnovým riešením Apolloniovej úlohy z obr. 3 je zrejmé, že obe riešenia ${}^1k$, ${}^2k$ sú navzájom inverzné v kružnicovej inverzii s určujúcou kružnicou, ktorá je ortogonálna so všetkými kružnicami k_i **(**i = 1, 2, 3**)**, t. j. má stred v chordálovom strede O daných kružníc.

2 Deskriptívnogeometrické metódy riešenia Apolloniovej úlohy

2.1 Stereografické premietanie

Myšlienka stereografického premietania sa objavila už u gréckeho astronóma *Hipparcha* (v 2. storočí pred n. l.). Vlastnosti tohto premietania použil pri konštrukcii máp zemského povrchu i nebeskej sféry *Klaudios Ptolemaios* v Alexandrii (2. storočie n. l.). Názov zobrazenia pochádza od francúzskych geometrov zo 17. storočia a za vedecké spracovanie vďačíme *M. Chaslesovi* (1793 – 1880). Systematicky sa stereografickému premietaniu venoval *W. Fiedler* (1832 – 1912), profesor deskriptívnej geometrie na polytechnike v Zürichu. Grafickú realizáciu všetkých ôsmich riešení Apolloniovej úlohy metódou stereografického premietania čitateľ môže nájsť napr. v druhom zväzku špeciálnych prednášok *E. Müllera* ([10]).

Princípom stereografického premietania je stredové premietanie bodov danej guľovej plochy G z jedného jej bodu (T) (okrem tohto bodu) do ľubovoľnej roviny rovnobežnej s dotykovou rovinou τ^T plochy G v bode T (obr. 4). Ľahko možno dokázať, že priemetom každej kružnice guľovej plochy G, ktorá neprechádza bodom T, je v tomto premietaní kružnica.



Obr. 4

Pre riešenie Apolloniovej úlohy je znovu rozhodujúca konformnosť zobrazenia[6]; znamená to, že obrazom dvoch dotýkajúcich sa kružníc roviny (vo vhodnom stereografickom premietaní) sú dve „dotýkajúce sa“ kružnice tej istej guľovej plochy G, t. j. kružnice v navzájom rôznych rovinách, ktoré majú práve jeden spoločný bod (priesečnica rovín kružníc je pritom ich spoločnou dotyčnicou). Z hľadiska stereometrie k úplnému riešeniu Apolloniovej úlohy vedie konštrukcia spoločných dotykových rovín dvojíc kužeľových plôch (riešenia sú stereografickým priemetom prienikov týchto rovín s guľovou plochou G).

Poznámka. Vhodnou voľbou guľovej plochy G možno v rovine π dospieť k planimetrickým konštrukciám, ktoré predstavujú riešenia *Gaultiera, Gergonna* i *Fouchého* ([6]).[7]

2.2 Zovšeobecnenie stereografického premietania na plochu rotačného paraboloidu

Pomocou vhodnej perspektívnej kolineácie v priestore možno stereografické premietanie rozšíriť na ľubovoľnú kvadratickú rotačnú plochu (s výnimkou jednodielneho hyperboloidu). Špeciálne pre rotačný paraboloid platí, že každá elipsa alebo kružnica rotačného paraboloidu sa v pravouhlom premietaní do roviny kolmej na os plochy premieta do kružnice. Riešenie úlohy je analogické s riešením pomocou stereografického premietania; grafickú realizáciu riešenia čitateľ nájde napr. v [6].

2.3 Cyklografia

Pod cyklografickým zobrazením rozumieme zobrazenie množiny všetkých bodov rozšíreného euklidovského priestoru na množinu *orientovaných kružníc* (cyklov) nákresne. Začiatky cyklografie možno nájsť v *Cousineryho* [8] *Géométrie perspéctive ou* … (1828).

---

[6] Dôkazy vlastností stereografického premietania od *Karla Pelza* (1845 – 1908) (uverejnených vo Věstníku Královské české společnosti nauk, Praha 1898) možno nájsť v [6].

[7] Dôkaz uviedol i český deskriptívny geometer *F. Machovec*, profesor karlínskej reálky r. 1879 v článku „ O úloze Apollonické v deskriptivní geometrii“ ([9]).

[8] *B. E. Cousinery* (1790 – 1851), absolvent parížskej École polytechnique, hlavný inžinier správy mostov a ciest, držiteľ ceny parížskej Akadémie vied (1825) za spis, ktorý bol uverejnený pod názvom *Géométrie perspéctive ou Principes de projéction polaire appliqués à la description des corps* v Paríži r. 1828. Z hľadiska cyklografie

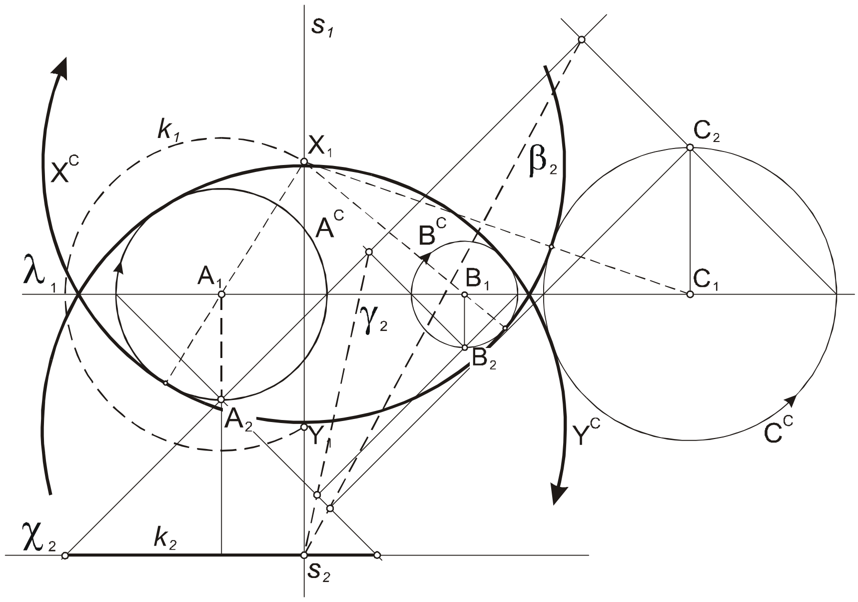
Prvý, kto systematicky spracoval zobrazenie kružníc v rovine na body priestoru bol *W. Fiedler* [9] r. 1882 v [4]. Neprekonaným dielom o cyklografii ako zobrazovacej metóde je druhý zväzok špeciálnych prednášok *Emila Müllera* pre kandidátov učiteľstva deskriptívnej geometrie na viedenskej vysokej škole technickej; kniha vyšla v spracovaní *Josefa Kramesa* r. 1929.[10] Prínosom v porovnaní s dielom Fiedlera je hlavne zavedenie orientovaných prvkov a používanie zväčša ortogonálneho premietania do roviny (namiesto stredového premietania) ([10]).

Riešenie Apolloniovej úlohy sa zakladá na nasledujúcom poznatku:

Veta 8. Cyklus X^c sa dotýka cyklov A^c, B^c, C^c práve vtedy, ak bod X (vzor cyklu X^c v cyklografickom zobrazení) je vlastným bodom prieniku troch C – kužeľových plôch K^A, K^B, K^C (s vrcholmi A, B, C).

Jednoducho možno zostrojiť napr. rovinu γ vlastnej kužeľosečky prieniku $K^A \cap K^B$, rovinu β vlastnej kužeľosečky prieniku $K^A \cap K^C$, ako aj priesečnicu $s = \gamma \cap \beta$. Ak existuje cyklus X^c požadovaných vlastností, tak bod X je jedným z dvoch priesečníkov priamky s s kužeľovou plochou K^A.

Zaujímavé je, že grafická realizácia tohto riešenia predstavuje skvelé planimetrické Gergonnovo riešenie úlohy. Navyše má cyklografická metóda prednosť v tom, že umožňuje vykonať konštrukciu (pozoruhodne jednoduchú) aj v prípade, ak sú stredy daných troch kružníc – nositeliek cyklov – kolineárne body (obr. 5).



Obr. 5

je významná jeho stereometrická interpretácia Gergonnovho riešenia Apolloniovej úlohy; je zrejmou anticipáciou Fiedlerovej Cyklografie ([8]).

[9] *Wilhelm Fiedler* (1832, Saská Kamenica – 1912, Zurich); významný nemecký deskriptívny geometer, viac než štyridsať rokov profesor polytechniky v Zurichu vo Švajčiarsku. V diele o cyklografii [4] je ním uvedená zobrazovacia metóda vypracovaná do najmenších podrobností a jej použitie obohatené mnohými zaujímavými aplikáciami; r. 1884 berlínska Akadémia priznala dielu Steinerovu prémiu. O blahodarnom Fiedlerovom pôsobení v Prahe, kde boli jeho prednášky z *geometrie polohy* prvými prednáškami s touto tematikou v Rakúsku-Uhorsku, a jeho vplyve na rozvoj deskriptívnej geometrie v tejto krajine sa možno dozvedieť aj v [14].

[10] S princípom cyklografie sa možno oboznámiť v útlej knižke *Ladislava Seiferta* (1883 – 1956), *Cyklografie* (1949, Prometheus Praha), jedinej ucelenej publikácii venovanej cyklografickému zobrazeniu v bývalom Československu. Seifertovo dielo kopíruje prvé tri kapitoly a stručne načrtáva témy niektorých ďalších kapitol Müllerovho zväzku. Životu a dielu Emila Müllera, vrcholného predstaviteľa viedenskej geometrickej školy a posledného veľkého deskriptívneho geometra, je venovaná publikácia [15].

Literatúra

[1] Boyer, C. B.: *A History of Mathematics*, New York 1991, s. 159
ISBN 0-471-54397-7
[2] Courant, R. – Robbins, H.: *What is Mathematics?* Oxford Univ. P. 1996, s. 117, 125 - 127
[3] Dörrie, H.: *100 Great Problems of Elementary Mathematics*, Dover, New York 1965,
s. 154 – 160, ISBN 0-486-61348-8
[4] Fiedler, W.: *Cyklographie oder Construktion der Aufgaben über Kreise und Kugeln und elementare Geometrie der Kreis- und Kugelsysteme*, Leipzig 1882
[5] Holubář, J.: *O metodách rovinných konstrukcí*, JČMF Praha, 1960
[6] Holubář, J.: *O rovinných konstrukcích odvozených z prostorových útvarů*, svazek 47
JČMF Praha, 1948
[7] Jarolímek, V.: *Základové geometrie polohy v rovine a v prostoru*, Česká matica technická
Praha 1918
[8] Loria, G.: *Storia della Geometria Descrittiva*, Ulrico Hoepli, Milano 1921
[9] Machovec, F.: *O úloze Apollonické v deskriptivní geometrii*. Pátá výroční zpráva reálky
karlínské, Praha 1879
[10] Müller, E. – Krames J.: *Die Zyklographie*, Leipzig u. Wien, 1929
[11] Ogilvy, C. S.: *Excursions in Geometry*. Dover, New York 1990, s. 48 – 51,
ISBN 0-486-26530-7
[12] Perepjolkin, D. I.: *Kurs elementarnoj geometrii I*, Gos. izd. techn.-teor. lit., Moskva 1948
[13] Sklenáriková, Z. – Čižmár, J.: *Elementárna geometria euklidovskej roviny*, učebný text,
Bratislava 2002, ISBN 80-223-1585-0
[14] Sklenáriková, Z.: *Z dejín deskriptívnej geometrie v Rakúsko-Uhorsku*. In: Matematika
v proměnách věků II, edícia Dějiny matematiky, zv. 16, Prometheus
Praha, 2001, ISBN 80-7196-218-X
[15] Sklenáriková, Z.: *Emil Müller – vrcholný predstaviteľ viedenskej geometrickej školy*.
In: **G –** slovenský časopis pre geometriu a grafiku, ročník 1 (2004),
číslo 2, s. 19 – 34, ISSN 1336-524X;
to isté s talianskou verziou In:
http://math.unipa.it/~grim/quaderno15.htm
„Quaderni di Ricerca in Didattica“, n. 15, 2005, G.R.I.M (Department
of mathematics, University of Palermo), ISSN 1592-4424