UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Bratislava 2006 Petra Klenková

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky

STEREOMETRIA –

ELEMENTÁRNA GEOMETRIA TROJROZMERNÉHO EUKLIDOVSKÉHO PRIESTORU

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný odbor: učiteľstvo všeobecnovzdelávacích predmetov – Matematika – Deskriptívna geometria

Meno diplomanta: Petra Klenková
Meno diplomového vedúceho: RNDr. Zita Sklenáriková, PhD.

Bratislava 2006

Čestne prehlasujem, že som diplomovú prácu vypracovala samostatne s použitím uvedenej literatúry a na základe konzultácií s diplomovou vedúcou.

Chcem sa poďakovať vedúcej diplomovej práce, RNDr. Zite Sklenárikovej, PhD., za pomoc a usmerňovanie pri tvobe tejto diplomovej práce, za precíznosť a nekonečnú trpezlivosť pri opravovaní mojich poznámok a množstvo obetovaného času.

ABSTRAKT

Petra Klenková: Stereometria – elementárna geometria trojrozmerného euklidovského priestoru, Diplomová práca, Univerzita Komenského, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Učiteľstvo všeobecnovzdelávacích predmetov Matematika – Deskriptívna geometria.

Vedúca diplomovej práce: RNDr. Zita Sklenáriková, PhD., Bratislava: Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK, 2006.

Predložená diplomová práca je venovaná vybudovaniu základov *stereometrie – elementárnej geometrie trojrozmerného euklidovského priestoru*. Hlavným cieľom práce – okrem prehĺbenia stredoškolského učiva – bolo usporiadanie stereometrických poznatkov do systému, a to v duchu syntetickej výstavby planimetrie v učebnom texte „Elementárna geometria euklidovskej roviny“ [15]. Základom spracovania je didaktická transpozícia axiomaticko – deduktívnej metódy v geometrii. Vlastnosti stereometrických pojmov a objektov, i metódy riešenia stereometrických úloh objasňuje množstvo príkladov a cvičení v závere tretej a štvrtej kapitoly textu. Pretože riešenie stereometrických úloh predpokladá osvojenie si poznatkov o základných telesách a plochách, vrátane ich zobrazenia vo voľnom rovnobežnom premietaní, zaradili sme tieto poznatky do záveru diplomovej práce.

PREDHOVOR

Stereometria alebo elementárna geometria euklidovského priestoru $\boldsymbol{E_3}$ je neodmysliteľným základom, prvým stavebným kameňom pre štúdium zobrazovacích metód deskriptívnej geometrie. Nesporná je jej dôležitosť v štúdiu technických a prírodovedných disciplín, v maliarskom umení, sochárstve, atď., no mala by sa stať samozrejmou výbavou kultúrneho človeka. Prvým krokom k dosiahnutiu tohoto cieľa je výchova budúcich učiteľov matematiky, najmä stredoškolských (no nielen ich), pretože s výučbou stereometrických pojmov treba začať najneskôr na strednej škole. Mnoho možno dosiahnuť postavením modelov jednoduchých telies už na základnej škole. Cesta od modelov k najjednoduchším náčrtom môže byť propedeutikou vyučovania stereometrie; až v ňom sa však získané poznatky upevňujú logickými súvislosťami, ktoré sú základom osvojenia si zručnosti a schopnosti správneho zobrazovania jednoduchých objektov vo voľnom rovnobežnom premietaní.

Toto všetko bolo pre mňa motiváciou pri výbere témy diplomovej práce. Uvítala som možnosť pokúsiť sa o vypracovanie aspoň základného študijného materiálu zo stereometrie hlavne pre študentov učiteľského štúdia matematiky s deskriptívnou geometriou. Verím, že táto diplomová práca poslúži i ďalším záujemcom z radov študentov.

OBSAH

ÚVOD

Hlavným cieľom mojej diplomovej práce „Stereometria – elementárna geometria trojrozmerného euklidovského priestoru“ bolo prehĺbenie stredoškolského učiva stereometrie, jeho doplnenie o nové poznatky, ale hlavne usporiadanie stereometrických poznatkov do logického systému. Základom spracovania témy bola *didaktická transpozícia* axiomaticko – deduktívnej metódy v geometrii analogicky s učebným textom „Elementárna geometria euklidovskej roviny“ [15] autorov Z. Sklenárikovej a J. Čižmára. Práca je snahou aspoň čiastočne vyplniť existujúci nedostatok dostupnej literatúry s touto témou.

Diplomová práca pozostáva z piatich kapitol. Prvá kapitola „*Didaktický systém axióm stereometrie*“ je venovaná základným pojmom geometrie euklidovského priestoru a ich vzájomným vzťahom, ktoré sú vyjadrené v axiómach. Pretože budovanie stereometrie sa robí na základe planimetrického axiomatického systému, stačí rozšíriť planimetrický axiomatický systém o niektoré axiómy incidencie, definovať rovnobežné priamky v priestore a požadovať, aby planimetrický systém axióm platil v každej rovine priestoru. Už študent, ktorý sa prvý-krát stretáva so steremetriou, by mal byť oboznámený s tým, že základné pojmy: *bod*, *priamka* a *rovina* (základné objekty) a *incidencia*, *zhodnosť* (základné relácie) sa nedefinujú a základné výroky o týchto pojmoch – *axiómy* – sa nedokazujú. Nie preto, že „ide o samozrejmé tvrdenia“, ale preto, že pôjde o „hru“ so základnými objektmi, ktorej „pravidlá “ sú určené axiómami.

Druhá kapitola „*Vety o rovnobežnosti základných geometrických útvarov*“ sa zaoberá navzájom rovnobežnými základnými geometrickými útvarmi a ich vlastnosťami. Všetky najdôležitejšie tvrdenia (existenčné vety, či kritériá rovnobežnosti základných geometrických objektov) sú podrobne dokázané. Záver kapitoly tvorí klasifikácia vzájomnej polohy troch navzájom rôznych rovín.

Tretia kapitola „*Úlohy o vzájomnej polohe základných geometrických útvarov. Polohové úlohy*“ je venovaná metódam riešenia tzv. polohových úloh (t.j. úloh riešiteľných na základe axióm incidencie a usporiadania a relácie rovnobežnosti základných útvarov). Patria sem úlohy o vzájomnej polohe priamky a roviny, rovinné rezy jednoduchých telies, priečky priamky požadovanej vlastnosti, priečky mimobežiek a iné.

Vo štvrtej kapitole práce „*Metrické úlohy*“ sa definuje pojem uhla dvoch mimobežiek, kolmosť priamky a roviny; nasledujú dôkazy kritéria kolmosti priamky a roviny a existenčných viet o priamke kolmej na rovinu a rovine kolmej na priamku; zavádzajú sa pojmy vzdialenosť bodu od roviny, vzdialenosť rovnobežných rovín, uhol priamky s rovinou, uhol dvoch rovín a uvedená je nevyhnutná a dostačujúca podmienka kolmosti dvoch rovín.

Kapitoly 1 - 4 tvoria jadro práce. Metódy riešenia hlavne konštrukčných stereometrických úloh sú ilustrované v kapitolách 3, 4 v spojitosti s nejakým jednoduchým referenčným telesom zobrazeným vo voľnom rovnobežnom premietaní. Tieto dve kapitoly obsahujú celkom 30 vyriešených úloh a 96 cvičení.

V poslednej kapitole diplomovej práce „*Dodatky*“ možno nájsť doplňujúce poznatky potrebné k riešeniu úloh v stereometrii. V prvej časti sú uvedené pojmy polpriestor, klin, trojhran (vrátane dôkazov ich vlastností), definované základné plochy a telesá (ako množín bodov) a urobená klasifikácia vzájomných polôh s rovinou a priamkou, i s metódou riešenia úlohy o vzájomnej polohe. Druhá časť kapitoly je venovaná rovnobežnému a pravouhlému premietaniu (základné vlastnosti), Pohlkeho-Schwarzovej vete, i historickým poznámkam k jej dôkazu a hlavným pojmom zobrazenia základných telies vo voľnom rovnobežnom premietaní (styčné-dotykové premietacie roviny, obrys priemetu útvaru, obrys útvaru v danom premietaní, problém viditeľnosti). Jeden príklad uvedený v závere a niekoľko cvičení sú návrhom témy, o ktorú by bolo možné obohatiť riešenie metrických úloh na priemetoch rovinných útvarov a následne i priestorových.

1 DIDAKTICKÝ SYSTÉM AXIÓM STEREOMETRIE. AXIÓMY INCIDENCIE A ICH DÔSLEDKY

Trojrozmerným euklidovským priestorom $\boldsymbol{E_3}$ nazývame systém troch množín B, P, R základných objektov nazývaných *bodmi*, *priamkami* a *rovinami*, ktoré sú viazané základnými reláciami *incidencie*, *usporiadania*, *zhodnosti* a *rovnobežnosti* a splňujúcich podmienky *spojitosti*.

Poznámka 1.1

1. Pri výstavbe systému *stereometrie* sa budeme opierať o už vybudovaný systém *planimetrie* euklidovskej roviny [15]. Stačí pritom rozšíriť skupinu axióm incidencie na nasledujúcich osem axióm I_1-I_8. *Stereometriou* budeme nazývať geometriu založenú na axiómach incidencie I(1-8) a vybudovanom planimetrickom systéme za požiadavky, že tento platí v každej rovine. Pojem rovnobežnosti priamok sa rozšíri nasledovne: *rovnobežnými priamkami* budeme nazývať dve priamky ležiace v jednej rovine, ktoré nemajú spoločný bod.

2. Body a priamky budeme označovať v súlade s označením v planimetrii. Prvky množiny R všetkých rovín budeme označovať malými písmenami gréckej abecedy α, β, γ, ... , pri potrebe ďalšieho rozlíšenia sa budú používať indexy alebo iné znaky, napr. α_1, α_2, α_3, ... , α', α'', ... , a pod.

Axiómy incidencie

- **I_1.** Ku každým dvom rôznym bodom existuje práve jedna priamka s nimi incidentná.
- **I_2.** Na každej priamke existujú aspoň dva rôzne body.
- **I_3.** Existujú body, ktoré všetky neležia na jednej priamke.
- **I_4.** Ku každým trom nekolineárnym bodom existuje práve jedna rovina s nimi incidentná.
- **I_5.** V každej rovine existujú aspoň tri nekolineárne body.
- **I_6.** Ak dva body priamky ležia v rovine, tak každý bod tejto priamky leží v danej rovine.
- **I_7.** Ak majú dve roviny spoločný bod, tak majú spoločnú aspoň jednu priamku.
- **I_8.** Existujú body, ktoré neležia všetky v jednej rovine.

Definícia 1.1

a) Množina bodov sa nazýva *kolineárna* [*komplanárna*], ak je incidentná s nejakou priamkou [rovinou].

b) Dve priamky, ktoré ležia v jednej rovine a nemajú spoločný bod, budeme nazývať *rovnobežnými* priamkami alebo *rovnobežkami*.

c) Dve priamky, ktoré neležia v žiadnej rovine, budeme nazývať *mimobežnými priamkami* alebo *mimobežkami*.

Poznámka 1.2

1. Existencia mimobežných priamok je zaručená axiómou I_8. Ak je štvorica bodov A, B, C, D nekomplanárna, tak mimobežné sú dvojice priamok $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$; $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{BD}$; $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{BC}$.

2. Ak každý bod priamky a leží v danej rovine α, hovoríme, že priamka a je incidentná s rovinou α [= leží v rovine α]; hovoríme tiež, že rovina α prechádza priamkou a.

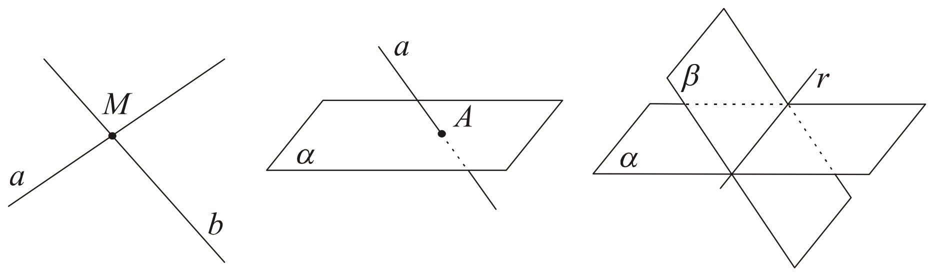
Priame dôsledky axióm incidencie a usporiadania vyjadruje nasledujúca veta:

Veta 1.1

a) Dve rôzne priamky majú najviac jeden spoločný bod. (Označenie: $a \cap b = M$)

b) Priamka neincidentná s rovinou má s touto rovinou najviac jeden spoločný bod. (Označenie: $a \cap \alpha = A$)

c) Ak majú dve rôzne roviny spoločný bod, tak majú spoločnú práve jednu priamku s ním incidentnú. (Označenie: $\alpha \cap \beta = r$)



Obr. 1.1

O *dôkaz* vety sa čitateľ môže pokúsiť sám.

Definícia 1.2

a) Dve priamky, ktoré majú spoločný práve jeden bod, nazývame *rôznobežné priamky* alebo *rôznobežky*. Spoločný bod sa nazýva *priesečník* priamok.

b) Ak má priamka s rovinou spoločný práve jeden bod, hovoríme, že je s touto rovinou *rôznobežná*. Spoločný bod nazývame *priesečníkom* priamky s rovinou alebo roviny s priamkou.

c) Dve roviny, ktoré majú spoločnú práve jednu priamku, nazývame *rôznobežnými rovinami*. Spoločnú priamku nazývame *priesečnicou* rovín.

Tvrdenia nasledujúcej vety sú dôsledkami axióm incidencie a usporiadania. Znovu pripomíname, že nám nejde o *rigoróznu axiomatickú výstavbu stereometrie*, ale hlavne o časovo nenáročné usporiadanie doterajších poznatkov zo stereometrie do logického systému nielen odrážajúceho postupnosť tvorby uvedených ďalších pojmov, ale aj ich základných vlastností (predovšetkým jasným vymedzením polohových a metrických vlastností geometrických útvarov). Už v kurze euklidovskej planimetrie sme mohli vidieť, že niektoré vlastnosti útvarov založené na axiómach incidencie a usporiadania vyzerajú na prvý pohľad triviálne, čo však neplatí o ich dôkazoch. V tomto zmysle sa predkladá čitateľovi veta 1.2 bez dôkazu.

Veta 1.2

a) V každej rovine existuje nekonečne mnoho bodov, ktoré všetky neležia na tej istej priamke.

b) Každým bodom prechádza nekonečne mnoho priamok, ktoré všetky neležia v tej istej rovine.

c) Existuje nekonečne mnoho rovín incidentných s tou istou priamkou.

Definícia 1.3

a) Množinu všetkých priamok incidentných s daným bodom nazývame *trs priamok*. Spoločný bod priamok je *stredom* trsu priamok.

b) Množinu všetkých rovín incidentných s jednou priamkou nazývame *zväzok rovín*. Spoločná priamka je *osou* daného zväzku rovín.

Veta 1.3

Rovina je určená:

a) priamkou a bodom s ňou neincidentným;

b) dvoma (rôznymi) rovnobežnými priamkami;

c) dvoma rôznobežnými priamkami.

Dôkaz

Urobme dôkaz napríklad pre prípad **c**, t.j. dané priamky a, b majú spoločný práve jeden bod ($a \cap b = \{M\}$). Súčasťou dôkazu je: 1. dôkaz *existencie* roviny požadovaných vlastností a 2. dôkaz, že takáto rovina je *práve jedna*. Dôkaz existencie je konštrukčný, preto v druhom kroku treba dokázať nezávislosť skonštruovaného objektu – v tomto prípade roviny – od konštrukcie.

1. (*existencia*) Nech $a \cap b = M$. Zvoľme si ľubovoľné dva body A, B tak, aby $A \in a$, $B \in b$ a $A \neq M \neq B$. (Prečo existujú body A, B ?). Potom existuje práve jedna rovina α incidentná s trojicou nekolineárnych bodov A, B, M (odôvodnite). Podľa axiómy I_6 ležia obe priamky a, b v rovine α ($a \cup b \subset \alpha$). Existencia roviny požadovaných vlastností je dokázaná.

2. (*jednoznačnosť*) Jednoznačnosť, t.j. nezávislosť roviny α od výberu bodov A, B sa dokáže dôkazom "*sporom*". Ak by existovali dve roviny α, β ($\alpha \neq \beta$) incidentné s priamkami a, b, tak by tieto navzájom rôzne roviny boli obe incidentné s danou trojicou nekolineárnych bodov A, B, M. To by ale bolo sporné tvrdenie s axiómou I_4.

Dôkazy v prípadoch **a**, **b** sú celkom analogické.

Ďalej sa bude definovať rovnobežnosť základných geometrických útvarov (priamka, rovina) za predpokladu existencie takýchto útvarov. Na dokázanie existencie priamky rovnobežnej s rovinou alebo dvojice navzájom rovnobežných rovín je potrebné dokázať určité dostačujúce podmienky rovnobežnosti takejto dvojice útvarov, ktoré sú i nutnými podmienkami. Definujme „*rovnobežnosť*“ tak, aby bola reláciou ekvivalencie na množine všetkých priamok a analogicky na množine všetkých rovín. Triedu všetkých navzájom rovnobežných priamok [rovín] budeme nazývať *osnova priamok* [*osnova rovín*]. Preto v nasledujúcej definícii 1.4 pripustíme za rovnobežné geometrické útvary i tie, ktoré sú navzájom incidentné. Dôkazy existencie takýchto útvarov urobíme v kapitole 2. Pripomeňme si najprv euklidovskú axiómu ***R*** rovnobežnosti z planimetrie.

Axióma *R*. *Existuje najviac jedna priamka prechádzajúca daným bodom, ktorá je rovnobežná s danou priamkou.*

Existencia dvoch priamok *absolútnej* roviny, ktoré nemajú spoločný bod, vyplýva z vlastnosti vonkajšieho uhla trojuholníka a existenčnej vety o priamke incidentnej s daným bodom a kolmej na ľubovoľnú priamku roviny ([15]).

Pretože axióma ***R*** rovnobežnosti platí v každej rovine priestoru, platí v euklidovskom priestore $\boldsymbol{E_3}$ nasledujúca veta:

Veta 1.4

Nech je $A \in \boldsymbol{E_3}$ ľubovoľný bod a $a \in \boldsymbol{E_3}$ ľubovoľná priamka s ním neincidentná. Existuje práve jedna priamka prechádzajúca bodom A a rovnobežná s priamkou a.

Definícia 1.4

a) Hovoríme, že *priamky* a, b *sú* navzájom *rovnobežné* práve vtedy, ak: alebo $a = b$ alebo existuje rovina, v ktorej obe priamky ležia a nemajú žiaden spoločný bod.

b) Hovoríme, že *priamka* a *je rovnobežná s rovinou* α práve vtedy, ak: alebo priamka a leží v rovine α alebo s ňou nemá žiaden spoločný bod.

c) Hovoríme, že *roviny* α, β *sú* navzájom *rovnobežné* práve vtedy, ak: alebo $\alpha = \beta$ alebo tieto roviny nemajú žiaden spoločný bod.

Symbolicky: $a \parallel b \Leftrightarrow (a = b) \vee (\exists \alpha : a \cup b \subset \alpha \wedge a \cap b = \emptyset)$

$$a \parallel \alpha \Leftrightarrow (a \subset \alpha) \vee (a \cap \alpha = \emptyset)$$

$$\alpha \parallel \beta \Leftrightarrow (\alpha = \beta) \vee (\alpha \cap \beta = \emptyset)$$

Nasledujúce tvrdenie je úplnou klasifikáciou *vzájomných polôh* základných geometrických útvarov.

Veta 1.5

a) Dve priamky sú alebo rovnobežné, alebo rôznobežné, alebo mimobežné.

b) Priamka je s rovinou alebo rovnobežná, alebo rôznobežná.

c) Dve roviny sú alebo rovnobežné, alebo rôznobežné.

Dôkaz

a) Ak sú a, b priamky, tak platí: $(a = b) \vee (a \neq b)$. Prvá možnosť je podľa definície 1.4 *rovnobežnosť* priamok.

Ak sú priamky a, b navzájom rôzne, tak platí: $(\exists\, \alpha : a \cup b \subset \alpha)$ alebo neexistuje žiadna rovina, v ktorej by ležali obe priamky. Druhá z možností je *mimobežnosť* priamok.

Ak sú a, $b \neq a$ priamky tej istej roviny, tak z planimetrie je zrejmé, že sú alebo *rôznobežné* alebo *navzájom rovnobežné rôzne*.

Dôkaz tvrdení **b**, **c** sa ponecháva čitateľovi.

2 VETY O ROVNOBEŽNOSTI ZÁKLADNÝCH GEOMETRICKÝCH ÚTVAROV

Základným pojmom pre rovnobežné geometrické útvary je rovnobežnosť priamky s rovinou. Dokážme preto takzvané *kritérium rovnobežnosti priamky a roviny*, ktoré formuluje *nevyhnutnú* a *dostačujúcu* podmienku preto, aby daná priamka bola rovnobežná s danou rovinou.

2.1 KRITÉRIUM ROVNOBEŽNOSTI PRIAMKY A ROVINY. EXISTENCIA PRIAMKY ROVNOBEŽNEJ S ROVINOU

Veta 2.1. (kritérium rovnobežnosti priamky a roviny)

Priamka je rovnobežná s rovinou *práve vtedy*, ak je rovnobežná s priamkou roviny.

Dôkaz

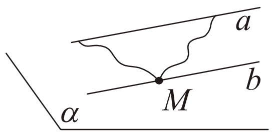
a) (*nevyhnutnosť*) Ak je priamka a rovnobežná s rovinou α, tak alebo priamka a leží v tejto rovine alebo nemá s rovinou α spoločný bod. V prvom prípade $a \parallel a$ $(a \subset \alpha)$, v druhom prípade urobme nasledujúcu konštrukciu. Zvoľme si ľubovoľný bod M ($M \in \alpha$). Bod M neleží na priamke a, teda existuje práve jedna rovina $\beta = \overleftrightarrow{aM}$. Priamka $b = \beta \cap \alpha$ má požadovanú vlastnosť. Pretože priamky a, b ležia obe v rovine β, stačí dokázať, že nemajú žiaden spoločný bod. Dôkaz urobíme sporom. Ak by existoval bod $A \in a \cap b$, tak by tento bod bol spoločným bodom priamky a s rovinou α. To je ale sporné tvrdenie s predpokladom $a \cap \alpha = \emptyset$. *Záver*: $a \parallel b$. (Obr. 2.1)

b) (*dostatočnosť*) Ak je priamka a rovnobežná s priamkou b roviny α, rozlíšme dva prípady: 1. $a \subset \alpha$, 2. priamka a neleží v rovine α. V prvom prípade rovnobežnosť $a \parallel \alpha$ je zaručená definíciou 1.4. V druhom prípade zrejme platí: $a \cap b = \emptyset \wedge a \parallel b$, teda priamky a, b ležia v jednej rovine β. Dokážeme, že $a \cap \alpha = \emptyset$. Použijeme metódu dôkazu sporom. Ak by existoval bod A ($A \in a \cap \alpha$), tak z incidencie priamky a s rovinou β by vyplynula incidencia bodu A s priesečnicou rovín α, β, t.j. s priamkou b. Následne bod A by bol spoločným bodom priamok a, b, čo je sporné tvrdenie s rovnobežnosťou týchto priamok. *Záver*: $a \parallel \alpha$.

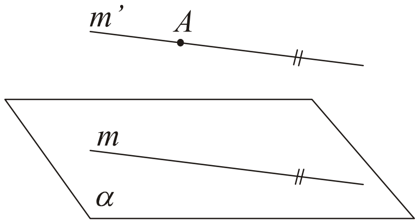
Príklad 2.1. Daná je rovina α a bod A ($A \notin \alpha$). Zostrojte ľubovoľnú priamku prechádzajúcu daným bodom A a rovnobežnú s rovinou α.

Riešenie

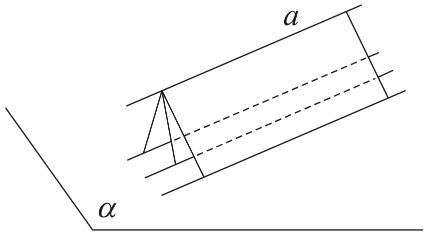
Stačí si zvoliť ľubovoľnú priamku m roviny α. Axióma rovnobežnosti $\boldsymbol{R}$ zaručuje existenciu práve jednej priamky m', ktorá prechádza bodom A a je rovnobežná s priamkou m. Z vety 2.1 vyplýva, že priamka m' je rovnobežná s rovinou α. (Obr. 2.2)



Obr. 2.1



Obr.2.2



Obr.2.3

Poznámka 2.1

1. Dôsledkom riešenia v príklade 1 je existencia nekonečného počtu priamok prechádzajúcich daným bodom a rovnobežných s danou rovinou.

2. Dokázali sme, že každá rovina, ktorá prechádza priamkou a rovnobežnou s danou rovinou α ($a \not\subset \alpha$) a nie je s rovinou α rovnobežná, pretína túto rovinu v priamke rovnobežnej s priamkou a (obr. 2.3).

Veta 2.2

Ak sú dve roviny navzájom rovnobežné, tak každá priamka jednej z rovín je rovnobežná s druhou rovinou.

Poznámka 2.2. V dôkazoch viet 2.2 – 2.7 budeme predpokladať, že všetky rovnobežné základné útvary vystupujúce v tvrdeniach viet (v predpokladoch i v závere) sú disjunktné. V opačnom prípade sú dôkazy triviálne. Napríklad uvažované roviny α, β vo vete 2.2 sú navzájom rôzne, čo znamená $\alpha \cap \beta = \emptyset$. Niektoré z dôkazov, ktoré sú dôsledkom jednoduchej logickej úvahy (vety 2.2, 2.4 a nevyhnutná podmienka vo vete 2.5) sa ponechávajú čitateľovi.

Veta 2.3

a) $a \parallel b \wedge b \parallel \alpha \Rightarrow a \parallel \alpha$

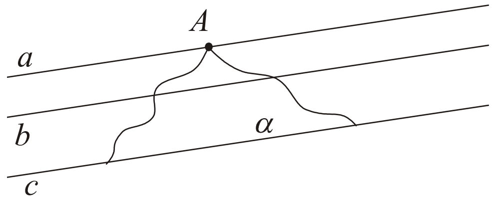
b) $a \parallel b \wedge b \parallel c \Rightarrow a \parallel c$

Dôkaz

a) Nech pre priamky a, b a rovinu α platí: $a \cap b = \emptyset$, $b \cap \alpha = \emptyset$, $a \not\subset \alpha$. Priamkami a, b je určená práve jedna rovina β. Platí: 1. $\beta \cap \alpha = \emptyset \vee$ 2. $\beta \cap \alpha = \{c\}$. V prvom prípade zrejme platí $a \cap \alpha = \emptyset$. V druhom prípade z rovnobežnosti $b \| \alpha$ vyplýva $b \| c$ (veta 2.1). Pre priamky a, b, c (navzájom rôzne) tej istej roviny β platí: $a \| b$, $b \| c$. Dôsledok $a \| c$ je dokázaný v planimetrii.

b) Nech priamky a, b, c sú navzájom rôzne a $a \| b$, $b \| c$ (obr. 2.4). Treba dokázať, že priamky a, c: 1. ležia v jednej rovine; 2. nemajú spoločný žiaden bod. *Dôkaz* 1: Zvoľme si na priamke a ľubovoľný bod A neležiaci na priamke c (keďže $a \neq c$, takýto bod existuje) a označme $\alpha = \overleftrightarrow{cA}$. Z platnosti $b \| c$ vyplýva $b \| \alpha$ (veta 2.1) a z rovnobežnosti priamok a, b následne i rovnobežnosť $a \| \alpha$. Ale priamka a má v rovine α bod A, teda v tejto rovine leží. *Záver*: $a \cup c \subset \alpha$.

Dôkaz 2. (sporom): Ak by existoval spoločný bod priamok a, c, tak by týmto bodom prechádzali dve navzájom rôzne rovnobežky a, c s priamkou b (predpoklad). To je ale sporné tvrdenie s axiómou $\boldsymbol{R}$ priestoru $\boldsymbol{E_3}$.



Obr. 2.4

Veta 2.4

$a \| \alpha \wedge \alpha \| \beta \Rightarrow a \| \beta$

2.2 KRITÉRIUM ROVNOBEŽNOSTI DVOCH ROVÍN. EXISTENCIA ROVINY ROVNOBEŽNEJ S DANOU ROVINOU

Veta 2.5. (kritérium rovnobežnosti dvoch rovín)

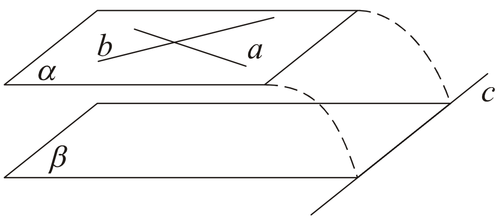
Dve roviny sú rovnobežné práve vtedy, ak jedna z nich obsahuje dve rôznobežky, ktoré sú rovnobežné s druhou rovinou.

Dôkaz

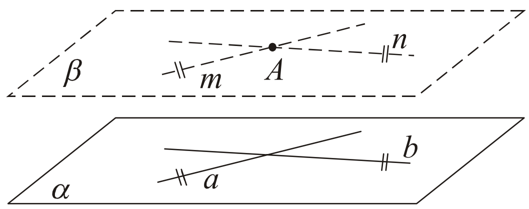
a) (*nevyhnutnosť*) Sformulujte, čo treba dokázať (za predpokladu $\alpha \cap \beta = \emptyset$) a dokážte.

b) (*dostatočnosť*) Nech sú roviny α, β navzájom rôzne a existujú dve rôznobežky a, b roviny α, pre ktoré platí: $a \cap \beta = \emptyset \ \wedge \ b \cap \beta = \emptyset$. Použijeme dôkaz sporom. Ak by roviny

α, β boli navzájom rôznobežné a $\alpha \cap \beta = c$, tak priamka c by preťala aspoň jednu z priamok a, b (môže byť rovnobežná najviac s jednou z nich). Nech je to priamka a; označme $c \cap a = A$. To ale znamená, že bod A by ležal v rovine β ($c \subset \beta$) a bol by i spoločným bodom priamky a s rovinou β. Je to sporné tvrdenie s predpokladom $a \cap \beta = \emptyset$. *Záver*: $\alpha \cap \beta = \emptyset \Rightarrow \alpha \parallel \beta$ (obr. 2.5).



Obr. 2.5



Obr. 2.6

Veta 2.6

$\alpha \parallel \beta \wedge \beta \parallel \gamma \Rightarrow \alpha \parallel \gamma$

Dôkaz

Nech roviny α, β sú navzájom rôzne. Z podmienky $\alpha \parallel \beta$ vyplýva, že v rovine α existujú dve rôznobežky ${}^1a$, ${}^2a$ tak, že ${}^ia \parallel \beta$ ($i = 1, 2$) (veta 2.5). Z platnosti ${}^ia \parallel \beta \wedge \beta \parallel \gamma$ vyplýva ${}^ia \parallel \gamma$ ($i = 1,2$) (veta 2.4), t.j. i platnosť $\alpha \parallel \gamma$ (kritérium rovnobežnosti dvoch rovín).

Veta 2.7

Nech A je bod neincidentný s rovinou α. Existuje práve jedna rovina prechádzajúca bodom A a rovnobežná s rovinou α.

Dôkaz

a) *(existencia)* Existenciu roviny β požadovaných vlastností dokážeme konštrukčne. Stačí si zvoliť ľubovoľné dve (rôzne) priamky m, n prechádzajúce bodom A a rovnobežné s rovinou α (príklad 1). Rovina $\beta = \overleftrightarrow{mn}$ má predpísané vlastnosti. (Popíšte podrobnejšie konštrukciu priamok m, n podľa obr. 2.6).

b) Dôkaz *jednoznačnosti* existencie roviny požadovaných vlastností sa ponecháva čitateľovi.

2.3 VZÁJOMNÉ POLOHY TROJICE NAVZÁJOM RÔZNYCH ROVÍN

V závere druhej kapitoly ešte urobíme klasifikáciu vzájomných polôh trojice navzájom rôznych rovín α, β, γ. Aby sme sa pri odvodzovaní vyhli zopakovaniu tej istej polohy, urobíme nasledujúci dohovor: ak sa spomedzi daných rovín vyskytne dvojica rovín navzájom rovnobežných, označíme ju α, β. To samozrejme neznamená, že dvojicou rovnobežných rovín nemôže byť dvojica (α, γ) alebo (β, γ), ale to, že ak sú roviny α, β navzájom rôznobežné, tak už žiadne dve z daných troch rovín nie sú navzájom rovnobežné roviny.

Pre roviny α, β môže platiť alebo $\alpha \parallel \beta$ (t.j. $\alpha \cap \beta = \emptyset$) alebo rovina α nie je rovnobežná s rovinou β (t.j. $\alpha \cap \beta = \{c\}$).

1. Nech platí $\alpha \parallel \beta$. Pre rovinu γ potom platí: alebo $\alpha \parallel \gamma$ alebo $\alpha \cap \gamma = \{b\}$.

a) Uvažujme o rovinách α, β, γ, pre ktoré $\alpha \parallel \beta$, $\alpha \parallel \gamma$. Odtiaľ (komutatívnosť a tranzitívnosť relácie rovnobežnosti rovín) vyplýva aj rovnobežnosť rovín β a γ. *Záver*: *α, β, γ je trojica navzájom rôznych rovnobežných rovín*. (Obr. 2.7a)

Obr. 2.7 a, b

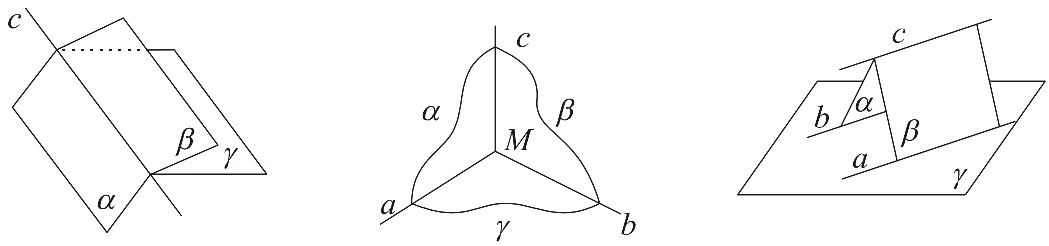
b) Nech platí: $\alpha \parallel \beta \wedge \alpha \cap \gamma = \{b\}$. Dôsledkom je rôznobežnosť rovín β, γ (v opačnom prípade by z platnosti $\alpha \parallel \beta$, $\beta \parallel \gamma$ vyplývala i rovnobežnosť rovín α, γ, čo je sporné tvrdenie s predpokladom). Je zrejmé, že priesečnice dvojíc rovín α, γ; β, γ sú navzájom rovnobežné priamky. (Odôvodnite.) *Záver*: *Roviny α, β sú navzájom rovnobežné a rovina γ ich pretína v dvoch navzájom rovnobežných priamkach $b = \alpha \cap \gamma$ a $a = \beta \cap \gamma$*. (Obr. 2.7b)

2. Nech platí: $\alpha \cap \beta = \{c\}$. Skúmajme vzájomnú polohu priamky c s rovinou γ. Môže nastať práve jeden z prípadov: ($c \subset \gamma$) alebo ($c \cap \gamma = \{M\}$) alebo ($c \cap \gamma = \emptyset$).

a) V prípade $\alpha \cap \beta = \{c\} \wedge c \subset \gamma$ majú tri roviny α, β, γ spoločnú práve jednu priamku, teda $\alpha \cap \beta \cap \gamma = \{c\}$. *Záver*: *roviny α, β, γ patria do toho istého zväzku*. (Obr. 2.7c)

b) V prípade $\alpha \cap \beta = \{c\}$ a $c \cap \gamma = \{M\}$ platí: $\alpha \cap \beta \cap \gamma = \{M\}$. *Záver*: *Roviny α, β, γ majú spoločný práve jeden bod, ktorým prechádzajú navzájom rôzne priesečnice dvojíc rovín (spomedzi rovín α, β, γ).* (Obr. 2.7d)

c) V prípade $\alpha \cap \beta = \{c\}$ a $c \cap \gamma = \emptyset$ označme $\alpha \cap \gamma = \{b\}$ a $\beta \cap \gamma = \{a\}$. Z poznámky 2 za príkladom 1 potom vyplýva, že priamky *a*, *b* sú rovnobežné s priamkou *c*. Platí teda: $c \parallel a \parallel b$. *Záver*: *Všetky dvojice rovín* (*spomedzi rovín* α, β, γ) *sa pretínajú a tieto priesečnice sú navzájom rôzne rovnobežky*. (Obr. 2.7e)



Obr. 2.7 c - e

Môžeme vysloviť:

Veta 2.8

Existuje päť vzájomných polôh troch navzájom rôznych rovín:

1. všetky tri roviny sú navzájom rovnobežné;
2. dve rovnobežné roviny pretína tretia v navzájom rovnobežných priamkach;
3. všetky tri roviny majú spoločnú práve jednu priamku (os zväzku rovín);
4. všetky tri roviny majú spoločný práve jeden bod;
5. všetky dvojice rovín sú navzájom rôznobežné roviny a ich priesečnice sú navzájom rôzne rovnobežné priamky.

3 ÚLOHY O VZÁJOMNEJ POLOHE ZÁKLADNÝCH GEOMETRICKÝCH ÚTVAROV. POLOHOVÉ ÚLOHY

Pod polohovými úlohami v stereometrii rozumieme úlohy riešiteľné na základe použitia axióm incidencie, usporiadania a axiómy rovnobežnosti. Ide prevažne o úlohy konštrukčné, preto je potrebné niečo povedať o riešení konštrukčnej stereometrickej úlohy. Štruktúra riešenia stereometrickej konštrukčnej úlohy sa zásadne ničím neodlišuje od štruktúry riešenia planimetrickej úlohy. Riešenie pozostáva zo štyroch krokov: rozbor úlohy, konštrukcia, dôkaz a diskusia. Nový problém v stereometrii predstavuje len druhý z nich. Pod konštrukciou v planimetrii rozumieme grafickú realizáciu postupu riešenia úlohy pomocou vhodných prostriedkov a metód. Adekvátnou konštrukciou v riešení stereometrickej úlohy by bolo vyhotovenie priestorového objektu požadovaných vlastností, čo je nerealizovateľná požiadavka pre technickú zložitosť. Prijmeme preto nasledujúci dohovor.

Konštrukcia v stereometrii sa bude kryť so zadaním algoritmu, ktorým by bol hľadaný priestorový objekt vytvorený použitím určitých *„elementárnych konštrukcií“*. Tieto postulujeme ako jednoduché základné úlohy vedúce k objektom, ktorých existencia je založená na axiómach a ich jednoduchých dôsledkoch. Sú to nasledujúce úlohy:

1. Zostrojiť rovinu incidentnú s danými tromi nekolineárnymi bodmi;
2. Zostrojiť priesečnicu dvoch rôznobežných rovín;
3. Riešiť v danej rovine ľubovoľnú planimetrickú úlohu;
4. Zvoliť si ľubovoľný bod, ktorý leží [neleží] na danej priamke;
Zvoliť si ľubovoľný bod, ktorý leží [neleží] v danej rovine;
Zvoliť si ľubovoľnú priamku, ktorá prechádza [neprechádza] daným bodom;
Zvoliť si ľubovoľnú priamku, ktorá leží [neleží] v danej rovine;
Zvoliť si ľubovoľnú rovinu, ktorá je [nie je] incidentná s daným bodom;
Zvoliť si ľubovoľnú rovinu, ktorá je [nie je] incidentná s danou priamkou.
5. Zostrojiť priamku prechádzajúcu daným bodom a rovnobežnú s danou priamkou.

Riešenie polohových úloh sa bude ilustrovať na jednoduchých geometrických útvaroch a telesách v tzv. voľnom rovnobežnom premietaní. Definície základných plôch a telies a klasifikácie ich vzájomných polôh s priamkou a rovinou, vrátane vzťahov dvoch rovinných rezov týchto telies čitateľ nájde v piatej kapitole práce (par. 5.1). S pojmom rovnobežného premietania, jeho základnými vlastnosťami a princípmi voľného rovnobežného premietania, ako aj s princípom konštrukcie obrazov základných telies vo voľnom rovnobežnom premietaní sa možno oboznámiť v paragrafe 5.2 tej istej kapitoly.

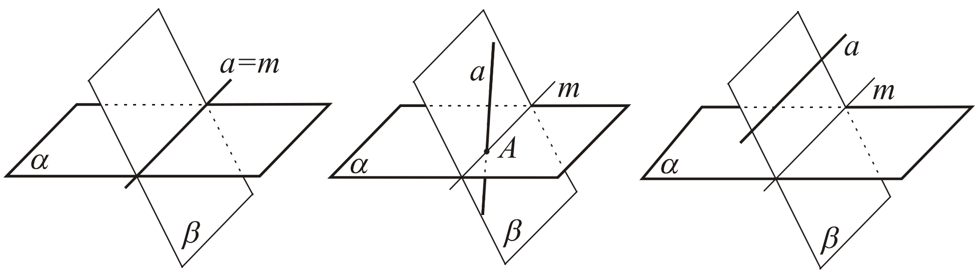
3.1 VZÁJOMNÁ POLOHA PRIAMKY A ROVINY. ROVINNÉ REZY ZÁKLADNÝCH TELIES

Úloha 3.1. Určte vzájomnú polohu priamky a a roviny α.

Riešenie.

Podstatou riešenia úlohy je prevedenie danej stereometrickej úlohy na planimetrickú úlohu pomocou ľubovoľnej *vhodnej* roviny, ktorá je s danou priamkou incidentná.

Nech je β ľubovoľná rovina prechádzajúca priamkou a a *rôznobežná s rovinou* α. Potom platí: $a \cap \alpha = (a \cap \beta) \cap \alpha = a \cap (\beta \cap \alpha) = a \cap m$, pri označení $m = \beta \cap \alpha$. Dokázali sme, že všetky spoločné body priamky a a roviny α sú práve všetky spoločné body priamok a, m tej istej roviny β. Pre priamky a, m teda platí $a = m$, resp. $a \cap m = \{A\}$, resp. $a \cap m = \{\}$ práve vtedy, ak platí $a \subset \alpha$, resp. $a \cap \alpha = \{A\}$, resp. $a \cap \alpha = \emptyset$. (Obr. 3.1 a, b, c)



Obr. 3.1 a - c

Príklad 3.1. Daný je rovnobežnosten $ABCDA'B'C'D'$. Zostrojte priesečník priamky $a = \overleftrightarrow{A'C}$ s rovinou $\alpha = AB'D'$. Určte i deliaci pomer $(A'CR)$, kde $R = a \cap \alpha$.

Riešenie

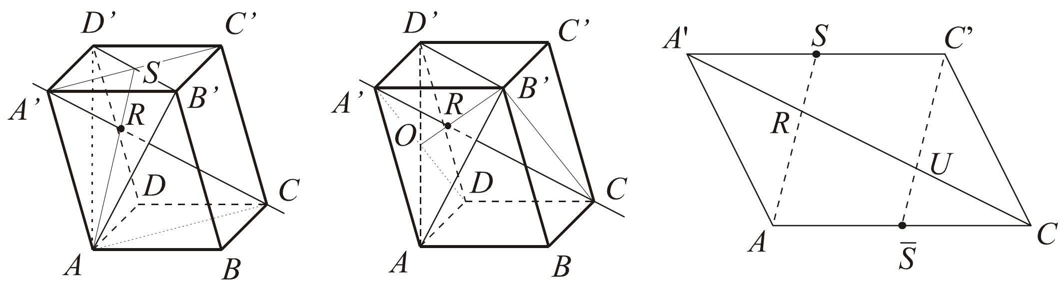
a) 1. Zvoľme si ľubovoľnú rovinu λ incidentnú s priamkou a, napr. $\lambda = \overleftrightarrow{A'AC}$. Potom platí: $a \cap \alpha = (a \cap \lambda) \cap \alpha = a \cap (\lambda \cap \alpha)$. (Obr. 3.2 a)

2. Zostrojíme priesečnicu rovín λ a α. Jeden jej bod je zrejme bod A, ďalší zostrojíme pomocou roviny niektorej steny telesa (napr. $\overleftrightarrow{A'B'C'}$) ako spoločný bod troch rovín :

$S = \lambda \cap \alpha \cap \overleftrightarrow{A'B'C'} = (\lambda \cap \overleftrightarrow{A'B'C'}) \cap (\alpha \cap \overleftrightarrow{A'B'C'}) = \overleftrightarrow{A'C'} \cap \overleftrightarrow{B'D'}$. (Bod S je zrejme stred rovnobežníka $A'B'C'D'$ a priamka AS ťažnica trojuholníka $A'B'D'$.)

3. $a \cap \alpha = a \cap (\lambda \cap \alpha) = a \cap \overleftrightarrow{AS} = R$

Poznámka. Ak v konštrukcii použijeme namiesto roviny λ inú roviny (napr. $\chi = \overleftrightarrow{A'B'C}$) incidentnú s priamkou *a*, platí: $a \cap \alpha = a \cap (\chi \cap \alpha) = a \cap \overleftrightarrow{B'O} = R \quad (O = AD' \cap A'D)$, čo znamená, že bod *R* je ťažiskom trojuholníka $AB'D'$. (Obr. 3.2 b)



Obr. 3.2 a - c

b) Deliaci pomer $(A'CR)$ určíme v rovine λ v rovnobežníku $ACC'A'$. Ak je bod $\overline{S}$ stred jeho strany *AC*, útvar $SA\overline{S}C'$ je tiež rovnobežník. Označme $U = A'C \cap C'\overline{S}$. Potom platí: $A'R \cong RU$ ($A'R$, RU sú rovnobežné priemety zhodných úsečiek priamky $A'C'$ na priamku $A'C$; to isté možno povedať o úsečkách RU a UC vzhľadom na zhodné úsečky $A\overline{S}$, $\overline{S}C$). Odtiaľ vyplýva: $(A'CR) = -\frac{1}{2}$. (Obr. 3.2 c)

Základom pre konštrukciu rovinných rezov základných telies je riešenie úlohy o vzájomnej polohe priamky a roviny, a predovšetkým aplikácia vety 2.8 (par. 2.3) venovanej klasifikácii vzájomných polôh troch navzájom rôznych rovín. Na ukážku riešenia uvádzame nasledujúci príklad, v riešení ktorého – až na konštrukciu útvaru zhodného s rezovým *n*-uholníkom – nie je podstatné, že ide o rovinný rez kvádra (úloha by sa zhodne riešila pre rovnobežnosten so zhodne označenými vrcholmi). Ďalšie rozmanité príklady a cvičenia nájde čitateľ v závere kapitoly.

Príklad 3.2. Zostrojte rovinný rez kvádra $ABCDA'B'C'D'$ rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{KLM}$ a útvar zhodný s rezovým *n*-uholníkom, ak: $(AA'K) = (ABL) = -3$, $(CC'M) = -1$ a $|AB| = 4j$, $|BC| = 3j$, $|AA'| = 5j$.

Riešenie

a) 1. Body K, L roviny α ležia v rovine steny $ABB'A'$ telesa, t.j. $\alpha \cap \overleftrightarrow{ABB'} = \overleftrightarrow{KL}$.

2. Žiadne dva body roviny α už neležia v tej istej stene. Bod M leží na priesečnici rovín stien $BCC'B'$ a $DCC'D'$. Pokračovať možno konštrukciou priesečnice roviny α s niektorou z týchto stien. Ďalší bod roviny α v rovine steny $BCC'B'$ nájdeme tak, že zostrojíme priesečník priamky KL s touto rovinou: $\overleftrightarrow{KL} \cap \overleftrightarrow{BCC'} = \overleftrightarrow{KL} \cap (\overleftrightarrow{ABB'} \cap \overleftrightarrow{BCC'}) =$ $= \overleftrightarrow{KL} \cap \overleftrightarrow{BB'} = 1$. Platí teda: $\alpha \cap \overleftrightarrow{BCC'} = \overleftrightarrow{M1}$ (bod 1 je spoločným bodom rovín α, $\overleftrightarrow{ABB'}$ a $\overleftrightarrow{BCC'}$). Priesečnica roviny α so stenou $BCC'B'$ je úsečka $MN \subset \overleftrightarrow{M1}$ $(N \in BC)$ a so stenou $ABCD$ úsečka LN.

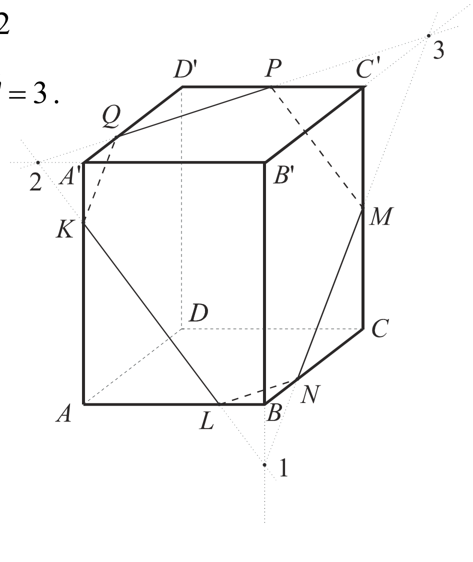
2'. Kváder je rovnobežnosten, teda priesečnice roviny α s dvojicami stien v navzájom rovnobežných rovinách ležia na rovnobežných priamkach. Tento postup konštrukcie vedúci k vyriešeniu úlohy sa ponecháva čitateľovi. My budeme pokračovať konštrukciou spoločných bodov troch rovín.

3. Zostrojme priesečnicu roviny α s rovinou $\overleftrightarrow{A'B'C'}$ (touto priamkou bude rovinný rez určený). Dva body roviny α v rovine $A'B'C'$ nájdeme ako v bode 2), a to konštrukciou bodov 2, 3, kde $2 = \overleftrightarrow{KL} \cap \overleftrightarrow{A'B'C'}$ a $3 = \overleftrightarrow{MN} \cap \overleftrightarrow{A'B'C'}$ takto :

$$\overleftrightarrow{KL} \cap \overleftrightarrow{A'B'C'} = \overleftrightarrow{KL} \cap (\overleftrightarrow{ABB'} \cap \overleftrightarrow{A'B'C'}) = \overleftrightarrow{KL} \cap \overleftrightarrow{A'B'} = 2$$

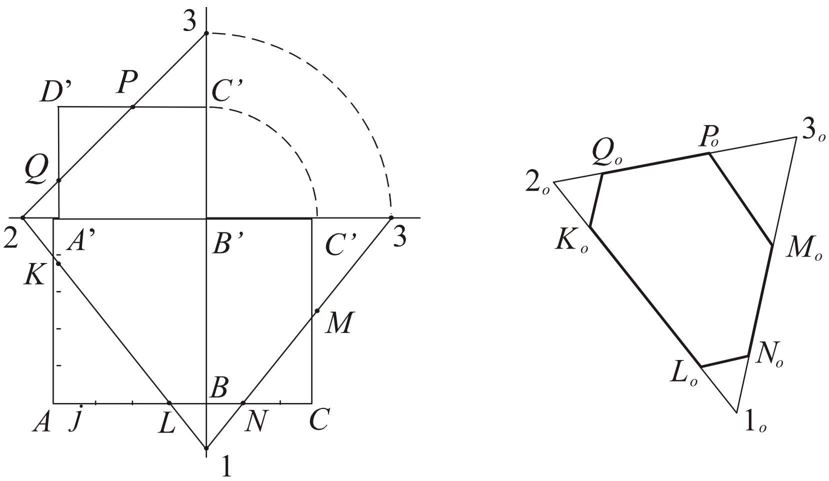
$$\overleftrightarrow{MN} \cap \overleftrightarrow{A'B'C'} = \overleftrightarrow{MN} \cap (\overleftrightarrow{BCC'} \cap \overleftrightarrow{A'B'C'}) = \overleftrightarrow{MN} \cap \overleftrightarrow{B'C'} = 3.$$

Potom $\alpha \cap \overleftrightarrow{A'B'C'} = \overleftrightarrow{23}$ a priesečnica roviny α so stenou $A'B'C'D'$ je úsečka PQ $(P \in C'D',\ Q \in A'D')$ na priamke 23. Rovinným rezom daného kvádra je šesťuholník $KLNMPQ$ so svojím vnútrom. Zrejme platí: $KL \parallel MP$, $LN \parallel PQ$ a $NM \parallel QK$. Viditeľnosť strán tohto šesťuholníka je dôsledkom zvolenej viditeľnosti stien telesa v náčrte.



Obr. 3.3 a

b) Konštrukcia útvaru zhodného s rezovým šesťuholníkom sa urobí tak, že nájdeme nejaký trojuholník so stranami incidentnými s rovinami troch stien telesa, do ktorého je rezový šesťuholník vpísaný (tak, že jeho strany sú incidentné so stranami trojuholníka).
V postupe riešenia úlohy je takýmto trojuholníkom $\triangle 123$. Konštrukcia úsečiek 12, 13 a 23 je zrejmá zo zadania úlohy (obr. 3.3b), t.j. i trojuholníka $1_o2_o3_o$ zhodného s trojuholníkom 123. Ďalej stačí zostrojiť body K_o, L_o strany 1_o2_o: $L_o1_o \cong L1$, $K_oL_o \cong KL$, body N_o, Q_o dourčíme z vlastnosti rovnobežnosti: $L_oN_o \| 2_o3_o$ a $K_oQ_o \| 1_o3_o$. Potom je potrebné zostrojiť napríklad bod M_o (tak, že úsečku $MN \subset 13$ odmeriame v stene $BCC'B'$). Zvyšný vrchol P_o sa dourčí využitím rovnobežnosti zvyšných strán šesťuholníka ($P_oM_o \| K_oL_o$).



Obr. 3.3 b

3.2 PRIEČKA GEOMETRICKÉHO ÚTVARU. PRIEČKY DVOJICE MIMOBEŽIEK

Definícia 3.1
Priečkou geometrického útvaru ***U*** nazývame priamku, ktorá má s útvarom ***U*** spoločný aspoň jeden bod. *Priečkou priamky m* nazývame každú priamku, ktorá je s priamkou *m* rôznobežná.

Úloha 3.2. Určte množinu bodov všetkých priečok priamky *m*, ktoré sú rovnobežné s priamkou *a* ($a \nparallel m$).

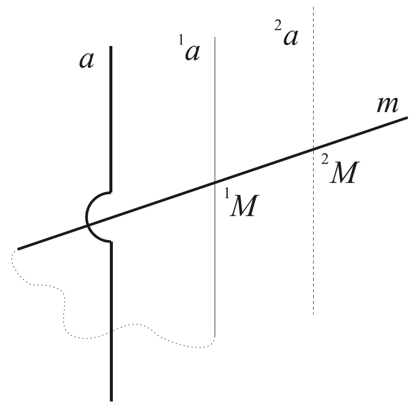
Riešenie

a) V prvej časti riešenia urobíme odhad množiny ***M*** bodov požadovanej vlastnosti. Zostrojme jednu priečku požadovanej vlastnosti. K tomu si stačí zvoliť ľubovoľný bod ${}^1M$ na priamke *m*. Existuje práve jedna priamka ${}^1a$ prechádzajúca bodom ${}^1M$ a rovnobežná s priamkou *a*. Ak zostrojíme analogicky ďalšiu priečku ${}^2a$, tak táto leží v rovine $\alpha = \overleftrightarrow{m\,{}^1a}$. Platí totiž: ${}^{1}a \parallel a \wedge {}^{2}a \parallel a \Rightarrow {}^{2}a \parallel {}^{1}a \Rightarrow {}^{2}a \parallel \alpha$ (kritérium rovnobežnosti priamky a roviny); ale bod ${}^{2}M$ priamky ${}^{2}a$ leží v rovine α, t.j. ${}^{2}a \subset \alpha$. Dokázali sme : $\boldsymbol{M} \subset \alpha$. (Obr. 3.4)

b) V druhej časti treba dokázať: $\alpha \subset \boldsymbol{M}$ (t.j., že každý bod roviny α je bodom priečky požadovanej vlastnosti). Nech $M \in \alpha$ je ľubovoľný bod. Potom platí: $M \in m \vee M \notin m$. V prvom prípade (vzhľadom na a) nie je čo dokazovať. V druhom prípade zostrojme bodom M priamku $\overline{a}$ rovnobežnú s priamkou a. Táto priamka leží v rovine α (dôkaz analogický ako v a)) a nie je rovnobežná s priamkou m, čo znamená, že priamky $\overline{a}$, m sú rôznobežky.

Priamka $\overline{a}$ je teda priečkou priamky m rovnobežnej s priamkou a. *Záver*: $M \in \boldsymbol{M}$.

Dôsledkom a), b) je $\alpha = \boldsymbol{M}$. Hľadanou množinou bodov je rovina prechádzajúca priamkou m a rovnobežná s priamkou a ($\alpha : m \subset \alpha \wedge \alpha \parallel a$).



Obr. 3.4

Dôsledok 3.1

1. Nech a, m sú ľubovoľné nerovnobežné priamky. Potom existuje práve jedna rovina prechádzajúca priamkou m a rovnobežná s priamkou a.[1]

2. Nech f je rovnobežné premietanie, ktorého osnova je daná priamkou a. Premietacím útvarom priamky m nepatriacej do osnovy premietacích priamok je rovina (premietacia rovina[2] priamky m).

[1] V prípade mimobežnosti priamok a, m existuje rovina obsahujúca ľubovoľnú z nich a rovnobežná s druhou priamkou. Obe roviny požadovanej vlastnosti sú navzájom rovnobežné rôzne. (Odôvodnite)

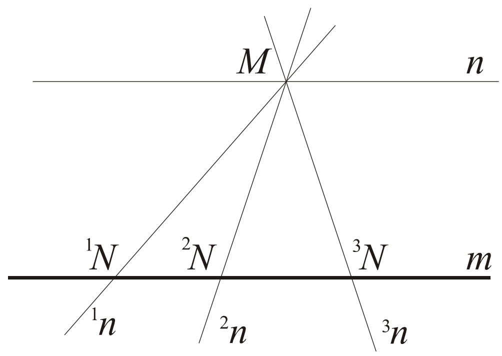
[2] S pojmom premietacieho útvaru prislúchajúceho danému geometrickému útvaru $\boldsymbol{U}$ sa možno oboznámiť v kapitole 5, par. 5.2.

Úloha 3.3.

Určte množinu bodov všetkých priečok priamky *m*, ktoré prechádzajú daným bodom *M* $(M \notin m)$.

Riešenie.

Celkom analogicky ako v riešení úlohy 3.2 sa dokáže, že hľadaná množina bodov je rovina $\alpha = \overleftrightarrow{mM}$ s výnimkou dvoch otvorených (navzájom opačných) polpriamok priamky *n* $(M \in n \wedge n \parallel m)$ so začiatkom *M* (obr. 3.5).



Obr. 3.5

Úloha 3.4. Zostrojte priečku mimobežných priamok *a*, *b*, ktorá prechádza daným bodom *M* $(M \notin a, M \notin b)$.

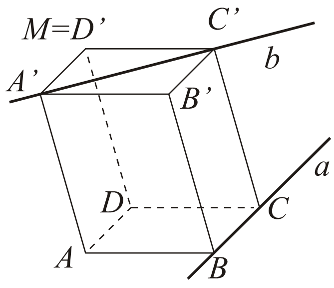
Riešenie

1. (*Rozbor úlohy*) Ak priečka *r* požadovaných vlastností existuje, platí: priamka *r* pretína priamku *a* a prechádza bodom *M* $(M \notin a)$, teda leží v rovine $\alpha = \overleftrightarrow{aM}$; analogickou úvahou sa dostane, že hľadaná priamka leží aj v rovine $\beta = \overleftrightarrow{bM}$, t.j. je priesečnicou rovín α, β .

2. *Konštrukcia* vyplýva z rozboru úlohy. Namiesto konštrukcie priečky *r* ako priesečnice dvoch rovín α , β možno zostrojiť len jednu z týchto rovín (napríklad α) a skonštruovať bod hľadanej priečky na mimobežke *b* neležiacej v rovine α . Ak priečka existuje, je to zrejme bod $B = b \cap \alpha$. (Odôvodnite). Priečka *r* je určená bodmi *B*, *M*.

3. *Diskusia.* Na záver treba zodpovedať otázku, za akých podmienok je priamka $r = \alpha \cap \beta$ priečkou priamok *a, b*. (Incidencia $M \in r$ je zrejmá.) Priamka *r* je komplanárna s každou z priamok *a*, *b*; táto priamka nie je priečkou priamok *a*, *b* práve vtedy, keď je s niektorou z nich rovnobežná, t.j. práve vtedy, keď: $(\alpha \cap \beta) \parallel a$ alebo $(\alpha \cap \beta) \parallel b$, čo nastane práve vtedy, keď: $a \parallel \beta \vee b \parallel \alpha \Leftrightarrow a \cap \beta = \emptyset \vee b \cap \alpha = \emptyset$. To možno pomocou daných prvkov vyjadriť v tvare: $a \cap \overleftrightarrow{bM} = \emptyset \ \vee \ b \cap \overleftrightarrow{aM} = \emptyset$. Prvá možnosť nastane napríklad pre priamky $a = \overleftrightarrow{BC}$, $b = \overleftrightarrow{A'C'}$ a bod $M = D'$, ak $ABCDA'B'C'D'$ je rovnobežnosten (obr. 3.6).

Záver. Množinou bodov s vlastnosťou, že neexistuje priečka priamok *a*, *b* s nimi incidentná *sú všetky body dvojice navzájom rovnobežných rovín, z ktorých každá obsahuje práve jednu z mimobežiek a, b* (*s výnimkou bodov oboch mimobežiek*). Pre každý bod *M* neležiaci v týchto rovinách existuje *práve jedna* priečka požadovanej vlastnosti.[3]



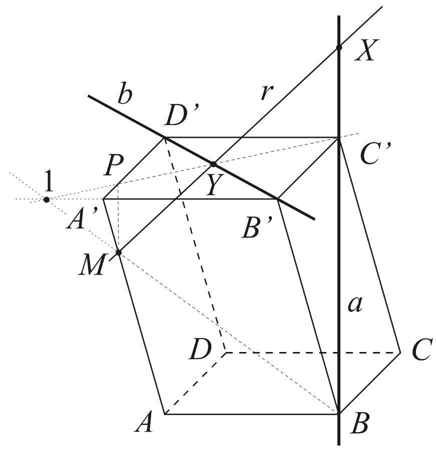
Obr. 3.6

Príklad 3.3. Zostrojte priečku priamok BC' a $B'D'$ prechádzajúcu bodom *M*. Základné teleso je rovnobežnosten $ABCDA'B'C'D'$, pre bod *M* platí: $(AA'M) = -3$.[4]

Riešenie

1. *Rozbor úlohy*. Ak priečka *r* požadovaných vlastností existuje, tak leží v rovine $\alpha = \overleftrightarrow{aM} = \overleftrightarrow{BC'M}$ (úloha 3.4) (obr. 3.7).

Rovinným rezom daného rovnobežnostena rovinou α je zrejme lichobežník $MBC'P$ (konštrukcia bodu *P* je zrejmá; možno ho zostrojiť dvoma spôsobmi, vysvetlite ako; bod $1 = \overleftrightarrow{BM} \cap \overleftrightarrow{A'B'}$ je spoločným bodom troch rovín (ktorých?). Ďalším bodom priečky *r* je priesečník priamky *b* s rovinou α $(b \cap \alpha = Y)$, t.j. $r = \overleftrightarrow{MY}$.



Obr. 3.7

2. *Konštrukcia*

a) Konštrukcia roviny α je popísaná vyššie. Body *B*, C', *M* sú nekolineárne, existuje práve jedna rovina nimi určená (elementárna konštrukcia z úvodu kapitoly).

b) Konštrukcia priesečníka priamky *b* s rovinou α :

$b \cap \alpha = (b \cap \overleftrightarrow{A'B'C'}) \cap \alpha = b \cap (\overleftrightarrow{A'B'C'} \cap \alpha) = b \cap \overleftrightarrow{1C'} = Y$.[5]

[3] Koľko riešení má úloha v prípade incidencie bodu *M* s niektorou z mimobežiek?

[4] Ten istý obrázok môže znázorňovať tak rovnobežnosten, ako aj kocku, či ľubovoľný kváder (Pohlkeho veta, kap.5)

[5] V tomto kroku sa ukazuje výhodnou predbežná konštrukcia rovinného rezu referenčného telesa rovinou α, ktorá sa objavila v riešení polohovej úlohy.

c) Priečka r požadovaných vlastností je priamka MY. Na obrázku je zostrojený i bod X priečky r na priamke a. (Prienik priečky s telesom je úsečka MY.)

Úloha 3.5. Zostrojte priečku mimobežných priamok a, b rovnobežnú s danou priamkou l ($l \nparallel a$, $l \nparallel b$).

Riešenie

1. *Rozbor úlohy*. Ak priečka r požadovaných vlastností existuje, tak podľa úlohy 3.2 leží v rovine α $(a \subset \alpha \wedge \alpha \parallel l)$ a súčasne v rovine β $(b \subset \beta \wedge \beta \parallel l)$, teda je priesečnicou týchto rovín $(r = \alpha \cap \beta)$.

2. *Konštrukcia* vyplýva z rozboru úlohy. Analogicky s riešením úlohy 3.4 možno zostrojiť jeden bod hľadanej priečky ako priesečník jednej z rovín α, β s tou mimobežkou, ktorú táto rovina neobsahuje. Týmto bodom je priamka $r\,(r \parallel l)$ určená.

3. *Diskusia*. Na záver treba rozhodnúť, akú podmienku musí spĺňať priamka l, aby bola úloha riešiteľná, či neriešiteľná. Z rozboru úlohy je zrejmé, že priečka požadovaných vlastností neexistuje práve vtedy, ak sú roviny α, β navzájom rovnobežné (zrejme $\alpha \neq \beta$; odôvodnite). To je práve vtedy, ak sú priamky a, b, l rovnobežné s tou istou rovinou, teda ak priamka l je rovnobežná s rovinou obsahujúcou jednu z mimobežiek a rovnobežnou s druhou z nich. V opačnom prípade má úloha práve jedno riešenie. Teda množinou všetkých priamok l s vlastnosťou, že neexistuje priečka mimobežných priamok a, b rovnobežná s ktoroukoľvek z nich sú všetky priamky rovnobežné s rovinou λ $(a \subset \lambda \wedge \lambda \parallel b)$.[6]

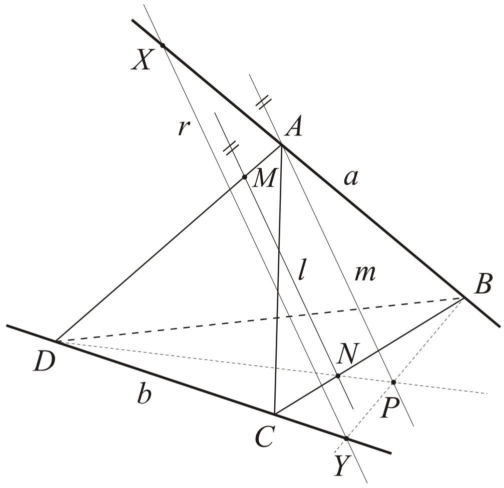
Príklad 3.4. Daný je štvorsten $ABCD$. Zostrojte priečku priamok $a = \overleftrightarrow{AB}$, $b = \overleftrightarrow{CD}$ rovnobežnú s priamkou $l = \overleftrightarrow{MN}$, ak $(DAM) = -5$, $(BCN) = -2$.

Riešenie

1. (*Rozbor úlohy*) Ak priečka r požadovaných vlastností existuje, platí: $r \subset \alpha$ $(a \subset \alpha \wedge \alpha \parallel l)$ (úloha 3.5).

[6] Konštrukciu roviny λ - vzhľadom na úlohu 3.2 môžeme považovať za elementárnu konštrukciu v tom zmysle, že ju vieme rozložiť na postupnosť elementárnych konštrukcií definovaných v úvode tejto kapitoly.

Rovinu α dourčíme napríklad priamkou m $(A \in m \wedge m \parallel l)$, teda $\alpha = \overleftrightarrow{am}$. Priamku m na obr.3.8 treba dourčiť[7] bodom $P = m \cap \overleftrightarrow{BCD}$, a to použitím napríklad roviny $\overleftrightarrow{lA}$ obsahujúcej priamku m. Bodom priečky je potom priesečník mimobežky b s rovinou α $(Y = b \cap \alpha)$. Priečka r prechádza bodom Y a je rovnobežná s priamkou l (úplnosť obrazu priamky r vyplýva z incidencie s rovinou α).



Obr. 3.8

2. (*Konštrukcia*)

a) Najprv zostrojíme priesečník priamky $m(A \in m \wedge m \parallel l)$ s rovinou *BCD*: $m \cap \overleftrightarrow{BCD} =$ $= (m \cap \overleftrightarrow{lA}) \cap \overleftrightarrow{BCD} = m \cap (\overleftrightarrow{ADN} \cap \overleftrightarrow{BCD}) = m \cap \overleftrightarrow{DN} = P$. (Zrejme $\overleftrightarrow{lA} = \overleftrightarrow{ADN}$) Teda $\alpha = \overleftrightarrow{ABP}$.

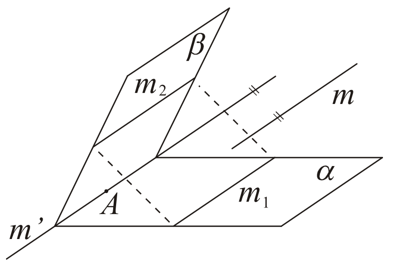
b) Priesečník priamky b s rovinou α zostrojíme napr. pomocou roviny *BCD* s ňou incidentnej. Platí: $b \cap \alpha = b \cap (\overleftrightarrow{BCD} \cap \alpha) = b \cap \overleftrightarrow{BP} = Y$. Priečka r prechádza bodom Y a je rovnobežná s priamkou l. Na obrázku je označený aj bod $X = a \cap r$. (Obr. 3.8)

3.3 PRÍKLADY

Príklad 3.5.[8] Dané sú navzájom rôznobežné roviny α, β a priamka m, pre ktorú platí: $\alpha \parallel m$, $\beta \parallel m$. Aká je vzájomná poloha priesečnice rovín α, β a priamky m? Dokážte.

Riešenie

Nech je A ľubovoľný bod priesečnice rovín α, β a m' nech je priamka ním prechádzajúca a s priamkou m rovnobežná. Platí: $m \parallel m' \wedge m \parallel \alpha \Rightarrow m' \parallel \alpha$ (veta 2.3). Ale priamka m' má s rovinou α spoločný bod, teda je s touto rovinou incidentná (definícia 1.2). Analogicky priamka m' leží v rovine β, t.j. $m' = \alpha \cap \beta$ (obr. 3.9).



Obr. 3.9

[7] Obraz priamky m vo voľnom rovnobežnom premietaní nie je úplný vzhľadom na riešenie polohových úloh. Treba určiť ďalší bod priamky v rovine niektorej steny daného štvorstena, t.j. v rovine *BCD* (bod *A* je vrcholom). O úplnosti obrazov útvarov vzhľadom na riešenie polohových úloh vo voľnom rovnobežnom premietaní je zmienka v kapitole 5 (par. 5.2). Podrobnejšie sa s problematikou možno oboznámiť v [12].

[8] Príklady 3.1 - 3.4 sa nachádzajú v teoretickej časti kapitoly.

Záver. Priesečnica dvoch rôznobežných rovín, z ktorých každá je rovnobežná s danou priamkou, je s touto priamkou rovnobežná.

(Iné riešenie)

Z kritéria rovnobežnosti priamky a roviny vyplýva, že v rovinách α, β existuje nekonečne mnoho priamok, ktoré sú rovnobežné s priamkou m. Vyberme z nich dve priamky m_i (i = 1, 2) tak, aby: $m_1 \subset \alpha \wedge m_1 \neq \alpha \cap \beta$, $m_2 \subset \beta \wedge m_2 \neq \alpha \cap \beta$. Rovina $\gamma = \overleftrightarrow{m_1 m_2}$ je rôznobežná s rovinami α, β a pretína tieto roviny v navzájom rôznych rovnobežkách m_1, m_2. Zo vzájomnej polohy troch navzájom rôznych rovín potom plynie, že všetky tri priesečnice sú navzájom rovnobežné, t.j. $(\alpha \cap \beta) \parallel m_i (i = 1, 2)$, a teda $(\alpha \cap \beta) \parallel m$.

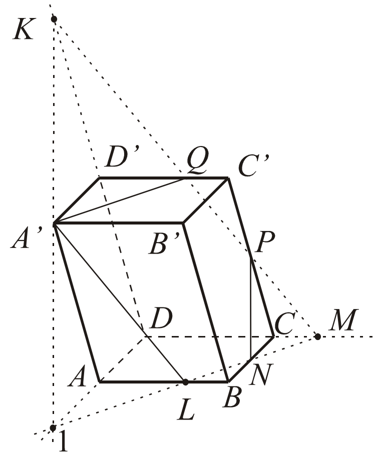
Príklad 3.6. Zostrojte rovinný rez rovnobežnostena $ABCDA'B'C'D'$ rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{KLM}$, ak platí: $(DD'K) = 2$, $(ABL) = -2$, $(DCM) = 4$. (Overte incidenciu vrcholu A' telesa s danou rovinou.)

Riešenie

1. Rovina α pretína rovinu steny *ABCD* telesa v priamke *LM* a stenu *ABCD* v úsečke *LN* $(N \in BC)$. Zrejme platí: $CM \cong BL$ a dvojice striedavých uhlov dvojice rovnobežných priamok $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ a ich priečok *BC* a *LM* sú zhodné, odkiaľ vyplýva zhodnosť trojuholníkov *BLN* a *CMN* (veta *uus*) (t.j. bod *N* je stred hrany *BC* telesa).

2. Priesečník priamky *LM* s rovinou steny $ADD'A'$ telesa, t.j. s priamkou *AD* označme 1. Trojuholníky $AL1$ a BLN sú podobné (veta uu; odôvodnite); koeficient podobnosti $f: A, L, 1 \mapsto B, L, N$ sa rovná $1/2$ (f je rovnoľahlosť so stredom L a charakteristikou $-1/2$). Preto $|BN|:|A1| = 1:2$, odkiaľ dostaneme $A1 \cong AD$.

3. Na záver si všimnime trojuholník 1*DK*. Priamka AD' je jeho strednou priečkou (obr. 3.10) rovnobežnou so stranou 1*K*. Z vlastností stredných priečok trojuholníka je zrejmé, že i úsečka $A'D'$ je stredná priečka trojuholníka $1KD$ $(A'D' \parallel 1D \wedge |A'D'| = |1D|/2)$. To znamená, že bod A' je stredom úsečky 1*K* na priesečnici roviny α



Obr. 3.10

s rovinou steny $ADD'A'$ rovnobežnostena. Tým sme dokázali, že vrchol A' leží v rovine α.

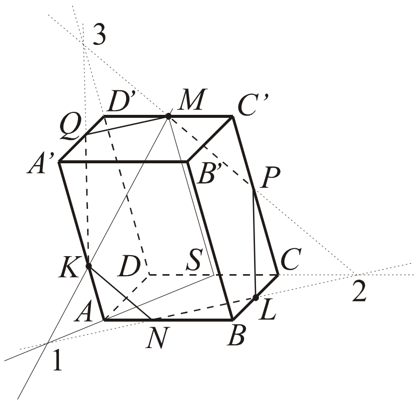
4. Rovinným rezom povrchu daného rovnobežnostena rovinou α je päťuholník $A'LNPQ$ vpísaný do trojuholníka 1*KM*, pričom na strane 1*K* trojuholníka leží len vrchol A' zostrojeného rezu. Konštrukcia bodov *P*, *Q* na strane *MK* trojuholníka 1*KM* je zrejmá. Skompletizovanie zápisu sa ponecháva čitateľovi.[9]

Príklad 3.7. Zostrojte rovinný rez rovnobežnostena $ABCDA'B'C'D'$ rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{KLM}$, ak platí: $(AA'K) = -1/2$, $(BCL) = (C'D'M) = -1$.

Riešenie

1. Žiadna z priamok určených niektorou trojicou bodov z bodov *K*, *L*, *M* roviny α neleží v rovine žiadnej steny daného rovnobežnostena ***K***. V takomto prípade budeme postupovať nasledovne. Vezmeme jednu zo spomenutých priamok (napríklad priamku *KM*) a nájdeme jej spoločný bod s rovinou tej steny telesa, v ktorej leží tretí z daných bodov roviny α. Bod *L* leží v rovinách dvoch stien, a to v rovine *ABC* a v rovine BCC'. Zvoľme si ktorúkoľvek z nich[10], napr. rovinu $\overleftrightarrow{ABC}$. Potom platí: $\overleftrightarrow{KM} \cap \overleftrightarrow{ABC} = \overleftrightarrow{KM} \cap (\lambda \cap \overleftrightarrow{ABC})$, kde λ je ľubovoľná rovina prechádzajúca priamkou *KM* a rôznobežná s rovinou $\overleftrightarrow{ABC}$.

Navyše, pretože zvolené teleso je rovnobežnosten (hranol, ktorého podstava je rovnobežník), rovinu λ si zvolíme tak, aby bola rovnobežná s niektorou hranou telesa. Pre zjednodušenie konštrukcie vezmime do úvahy len hrany telesa rôznobežné s rovinou *ABC*; sú to hrany patriace do osnovy priamky AA'. Teda $\lambda = \overleftrightarrow{KAM}$. Prienikom roviny λ s telesom je rovnobežník $AA'MS$, kde *S* je stred hrany *DC*, odtiaľ



Obr. 3.11

[9] Z riešenia úlohy vyplýva nevyhnutnosť overenia incidencie vrcholu daného telesa a rezovej roviny v prípade, ak pri črtaní obrázku (ktoré nemusí byť presné) vychádza priesečnica tejto roviny s rovinou niektorej steny „blízko" tohto vrcholu. Neoverenie by mohlo viesť k nesprávnemu výsledku – napríklad v príklade 3.6 ku konštatovaniu, že rovinným rezom je šesťuholník.

[10] Po dosť veľkom počte vyriešených úloh si čitateľ iste uvedomí, ktorá z rovín môže byť výhodnejšia z hľadiska grafickej ralizácie riešenia na náčrte telesa vo voľnom rovnobežnom premietaní a prečo.

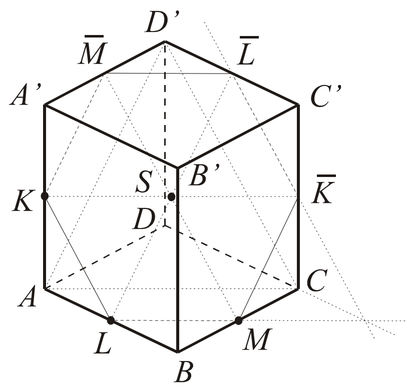
vyplýva: $\lambda \cap \overleftrightarrow{ABC} = \overleftrightarrow{SA}$[11], t.j. $\overleftrightarrow{KM} \cap \overleftrightarrow{ABC} = \overleftrightarrow{KM} \cap \overleftrightarrow{SA} = \{1\}$. (Obr. 3.11)

2. V rovine steny $ABCD$ telesa ležia body 1, L roviny α, t.j. $\alpha \cap \overleftrightarrow{ABC} = \overleftrightarrow{1L}$. Na priamke $1L$ leží ďalší vrchol N prienikového n-uholníka $\alpha \cap \boldsymbol{K}$. Rovinným rezom je *šesťuholník* $KNLPMQ$ a jeho vnútro; zvyšné vrcholy P, Q $(P \in CC', Q \in A'D')$ možno zostrojiť alebo použitím rovnobežností dvojíc priamok $MQ \parallel NL$, $LP \parallel KQ$ (odôvodnite) alebo pomocou konštrukcie dvojice spoločných bodov dvoch trojíc rovín, a to bod $2 = \overleftrightarrow{ABC} \cap \overleftrightarrow{CDD'} \cap \alpha = (\overleftrightarrow{ABC} \cap \overleftrightarrow{CDD'}) \cap (\overleftrightarrow{ABC} \cap \alpha)$ a bod $3 = \overleftrightarrow{ADD'} \cap \overleftrightarrow{DCC'} \cap \alpha = (\overleftrightarrow{ADD'} \cap \overleftrightarrow{DCC'}) \cap (\overleftrightarrow{DCC'} \cap \alpha)$. (Vysvetlite, čo je priesečnicou rovín $\overleftrightarrow{DCC'}$ a α.)

Príklad 3.8. Daná je kocka $ABCDA'B'C'D'$ a body K, L, M, ktoré sú v danom poradí stredmi hrán AA', AB, BC. Overte incidenciu stredu S kocky a roviny $\alpha = \overleftrightarrow{KLM}$. Aká je vzájomná poloha roviny α a roviny ACD'? Určte typy možných prienikov danej kocky so sústavou rovín rovnobežných s rovinou ACD'.[12]

Riešenie

Návod. Dokážte, že všetky telesové uhlopriečky kocky sa pretínajú v jednom bode S a sú ním rozpoľované.[13] Odtiaľ jednoducho vyplýva, že bod S je stredom súmernosti telesa, t.j. i hranice kocky (= povrch kocky). V dôsledku toho sú i spojnice stredov dvojíc hrán AB, $C'D'$; BC, $D'A'$ a CC', $A'A$ rozpoľované bodom S: $(K\overline{K}S) = (L\overline{L}S) = (M\overline{M}S) = -1$. (Obr.3.12)



Obr. 3.12

[11] Stačí si uvedomiť, že rovina λ je množinou bodov všetkých priečok priamky KM, ktoré sú rovnobežné s priamkou AA'; takéto roviny sa nazývajú *smerové* alebo *osnovové* roviny príslušného hranolového priestoru /plochy k danému telesu $\boldsymbol{K}$. Klasifikáciu vzájomnej polohy osnovovej roviny danej hranolovej plochy s touto plochou možno nájsť v kapitole 5 (par. 5.1) diplomovej práce.

[12] Množinu všetkých navzájom rovnobežných rovín nazývame *osnova rovín*.

[13] Tento fakt stačí dokázať pre ľubovoľnú jednu dvojicu telesových (hlavných) uhlopriečok kocky. (Vysvetlite prečo)

1. Označme $\beta = \overleftrightarrow{KLS}$ a skúmajme priesečnicu rovín β a $\overleftrightarrow{ABC}$. Z rovnobežnosti priamky *KS* s rovinou *ABC* vyplýva rovnobežnosť priamok *AC* a $\beta \cap \overleftrightarrow{ABC}$ (poznámka 2 za príkladom 2.1).

Priesečnica rovín β a $\overleftrightarrow{ABC}$ teda prechádza bodom *L* a je rovnobežná so stenovou uhlopriečkou *AC*, čo znamená, že je incidentná so strednou priečkou *LM* trojuholníka *ABC*. Dokázali sme, že $\overleftrightarrow{KLS} = \overleftrightarrow{KLM}$ $(\beta = \alpha)$. Incidencia bodu *S* s rovinou α je dokázaná.

2. Rovinným rezom roviny $\alpha = \overleftrightarrow{KLM}$ s povrchom telesa je *pravidelný* šesťuholník $KLM\overline{K}\overline{L}\overline{M}$.[14]

3. Z kritéria rovnobežnosti dvoch rovín je zrejmé, že roviny α a $\overleftrightarrow{ACD'}$ sú navzájom rovnobežné. (Odôvodnite!) Analogicky je rovnobežná dvojica rovín α a $\overleftrightarrow{A'C'B}$. *Styčné* (oporné) roviny kocky rovnobežné s rovinou ACD' prechádzajú vrcholmi D a B'; každá z nich má s telesom práve jeden spoločný bod (označme ich τ^D a $\tau^{B'}$). (Zdôvodnite)[15]
Z rozboru vyplýva, že a) všetky roviny vo vnútri priestorovej vrstvy určenej rovnobežnými rovinami $\tau^{B'}$ a $\overleftrightarrow{A'C'B}$ (vrátane roviny $A'C'B$) a priestorovej vrstvy určenej rovinami τ^D a $\overleftrightarrow{ACD'}$ (vrátane roviny ACD') pretínajú povrch telesa v rovnostrannom trojuholníku; b) všetky roviny vo vnútri priestorovej vrstvy určenej rovinami ACD' a $A'C'B$ pretínajú povrch telesa v šesťuholníku (pravidelný šesťuholník leží práve v rovine α); c) všetky zvyšné roviny z danej osnovy rovín nemajú s telesom žiaden spoločný bod.

Definícia 3.2. Ťažnicou štvorstena nazývame úsečku, ktorej krajné body sú vrchol telesa a ťažisko steny protiľahlej k tomuto vrcholu.

Príklad 3.9. Dokážte, že ťažnice štvorstena sa pretínajú v jednom bode (ťažisko telesa).

---

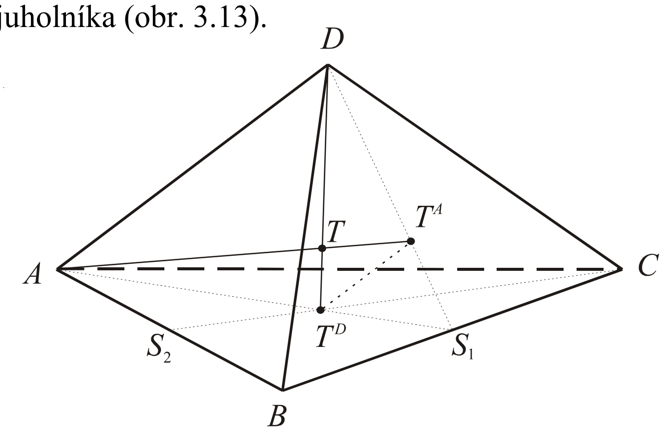
[14] Pojem pravidelného i polopravidelných *n*-uholníkov možno nájsť v [15]. *n*-uholník sa nazýva pravidelným, ak sú všetky jeho strany zhodné a všetky vrcholy ležia na jednej kružnici (kružnica danému *n*-uholníku opísaná).

[15] Potenciálnemu čitateľovi sa odporúča zostrojiť priesečnicu roviny $\tau^{B'}$ s rovinou *ABC*.

Riešenie

1. Zvoľme si ľubovoľný štvorsten $ABCD$. Ťažisko ľubovoľnej zo stien budeme označovať písmenom T s indexom protiľahlého vrcholu k tejto stene. Ťažnica DT^D je teda určená vrcholom D a ťažiskom T^D trojuholníka ABC. Zrejme platí: $T^D = AS_1 \cap CS_2$, kde S_1 je stred strany BC a S_2 stred strany AB daného trojuholníka (obr. 3.13).

Z planimetrie euklidovskej roviny je zrejmé, že všetky ťažnice trojuholníka prechádzajú jeho ťažiskom a pretínajú sa vo vnútornom bode tak, že deliaci pomer ťažiska vzhľadom na vrchol trojuholníka a stred protiľahlej strany sa rovná číslu -2. Platí teda: $(AS_1T^D) = (CS_2T^D) = -2$.



Obr. 3.13

Analogicky zostrojme ešte jednu z ťažníc, napríklad AT^A (T^A je ťažisko steny BCD, t.j. $(DS_1T^A) = -2$). (Konštrukcia bodu T^A je zrejmá z rovnosti $(AS_1T^D) = (DS_1T^A)$, odkiaľ vyplýva $T^AT^D \parallel AD$.) Ťažnice AT^A, DT^D daného štvorstena sú uhlopriečkami lichobežníka ADT^AT^D, pretínajú sa teda vo svojom vnútornom bode; označme ho T.

Poznámka 3.1. V prvej etape dôkazu sme dokázali, že ľubovoľné dve ťažnice daného štvorstena ležia na rôznobežkách a ich priesečník je vnútorným bodom každej z nich. V druhej časti dôkazu dokážeme, že zostrojený bod T leží na každej ťažnici telesa. K tomu stačí dokázať, že pre ľubovoľné dve zvolené ťažnice sa deliaci pomer ich priesečníka vzhľadom na krajné body ťažníc v danom poradí (napríklad vrchol telesa, ťažisko protiľahlej steny) rovná pevnému reálnemu číslu k. (Prečo? Vysvetlite.)

2. Dokážeme, že platí: $(AT^AT) = (DT^DT) = k$ a určme túto konštantu. Pre ľubovoľné dve rovnobežné úsečky (neležiace na tej istej nositeľke) platí, že ľubovoľná z nich je obrazom druhej v práve dvoch rovnoľahlostiach s tým istým koeficientom (pritom charakteristiky rovnoľahlostí sú navzájom opačné reálne čísla). V rovine AS_1D je teda úsečka AD obrazom úsečky T^AT^D v rovnoľahlosti ${}^1f: T^A, T^D \mapsto A, D$ so stredom v bode T ako aj v rovnoľahlosti ${}^2f: T^A, T^D \mapsto D, A$ so stredom v bode S_1 (obr. 3.13). Označme ${}^ik$ charakteristiku rovnoľahlosti ${}^if$. Platí: $(AT^AT) = (DT^DT) = {}^1k$, $(DT^AS_1) = (AT^DS_1) = {}^2k$, kde T je vnútorný, resp. S_1 vonkajší stred rovnoľahlosti ${}^1f$, resp. ${}^2f$. Z vlastností rovnoľahlosti je zrejmé, že $\left|{}^1k\right| = \left|{}^2k\right| = k$, t.j. ${}^1k = -k$, ${}^2k = k$. Pretože $(DS_1T^A) = (AS_1T^D) = -2$, platí aj $(DT^AS_1) = $ $= (AT^DS_1) = 3 = {}^2k$. Odtiaľ vyplýva: ${}^1k = -3$, t.j. $(AT^AT) = (DT^DT) = -3$.

Záver. Všetky štyri ťažnice štvorstena sa pretínajú v jednom bode T, ktorého vzdialenosť od ťažiska ľubovoľnej steny štvorstena sa rovná jednej štvrtine dĺžky príslušnej ťažnice.

Definícia 3.3. Spoločný bod ťažníc štvorstena sa nazýva *ťažiskom* štvorstena.

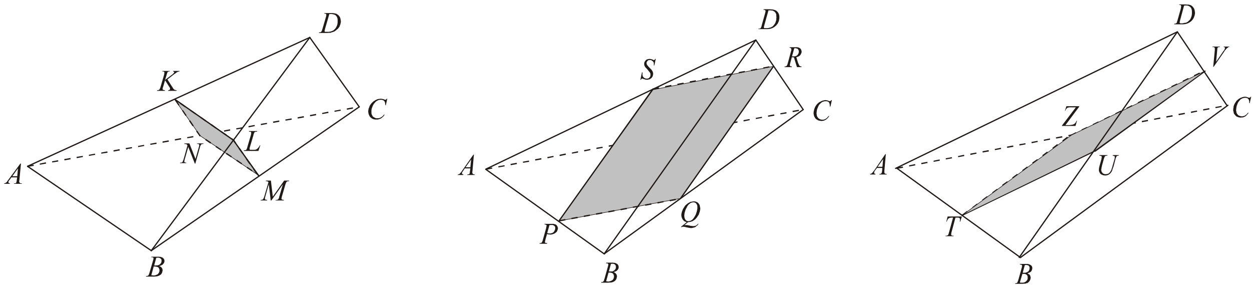
Príklad 3.10. Dokážte, že existujú tri sústavy rovín, ktoré daný štvorsten pretínajú v rovnobežníkoch. Načrtnite prienik rovinou z každej sústavy.

Riešenie

1. (*Rozbor úlohy*) Hľadáme rovinu α, ktorej prienik s daným štvorstenom $ABCD$ je rovnobežník (t.j. štvoruholník, ktorého protiľahlé strany sú navzájom rovnobežné). Ak rovina α existuje, musí pretínať dve dvojice rovín stien telesa v navzájom rovnobežných priamkach. Vyberme takéto dvojice: nech sú to steny v rovinách $\overleftrightarrow{ABC}, \overleftrightarrow{ABD}; \overleftrightarrow{CDA}, \overleftrightarrow{CDB}$. Požadujeme, aby $(\alpha \cap \overleftrightarrow{ABC}) \parallel (\alpha \cap \overleftrightarrow{ABD}) \wedge (\alpha \cap \overleftrightarrow{CDA}) \parallel (\alpha \cap \overleftrightarrow{CDB})$. Roviny všetkých stien sú navzájom rôznobežné a každá z nich má pretínať rovinu α. Zo vzájomnej polohy troch navzájom rôznobežných rovín je zrejmé, že uvedená požiadavka je splnená práve vtedy, keď $\alpha \parallel (\overleftrightarrow{ABC} \cap \overleftrightarrow{ABD}) \wedge \alpha \parallel (\overleftrightarrow{CDA} \cap \overleftrightarrow{CDB})$, t.j. $\alpha \parallel AB$ a $\alpha \parallel CD$. Teda každá rovina, ktorá je rovnobežná s dvojicou mimobežných hrán AB a CD štvorstena a obsahuje vnútorný bod K niektorej zo zvyšných hrán telesa, pretína teleso v rovnobežníku. Zvoleným bodom K (napr. $K \in AD$) je rovina α určená (existuje práve jedna rovina α incidentná s bodom K a rovnobežná s priamkami AB a CD – dôsledok V. 2.7; vysvetlite).

2. Spomedzi rovín stien telesa možno vybrať ešte dvakrát dve rôzne dvojice: $\overleftrightarrow{ABC}, \overleftrightarrow{ACD}$; $\overleftrightarrow{BCD}, \overleftrightarrow{ABD}$ a $\overleftrightarrow{ABC}, \overleftrightarrow{BCD}$; $\overleftrightarrow{ABD}, \overleftrightarrow{ACD}$. Analogicky každá rovina β, resp. γ rovnobežná s dvojicou hrán AC, BD, resp. BC, AD a obsahujúca vnútorný bod niektorej zo zvyšných hrán, pretína daný štvorsten $ABCD$ v rovnobežníku. (obr. 3.14)

Záver. Existujú tri sústavy navzájom rovnobežných rovín, ktorých prienik s daným štvorstenom $ABCD$ je rovnobežník. Rovín v každej zo sústav je nekonečne mnoho; každá z nich je rovnobežná s niektorou dvojicou mimobežných hrán telesa.



Obr. 3.14

Príklad 3.11. Určte vzájomnú polohu priamky a s pravidelným šesťbokým hranolom $H^* = ABCDEA'...E'$, ktorého výška je zhodná s hlavnou uhlopriečkou podstavy. V prípade existencie prieniku zostrojte úsečku zhodnú s prienikom (pri zvolenej dĺžke podstavnej hrany telesa). [$a = \overleftrightarrow{MN}$, $(SCM) = 2$ (S je stred podstavy $AB...F$), $(E'F'N) = 2$].

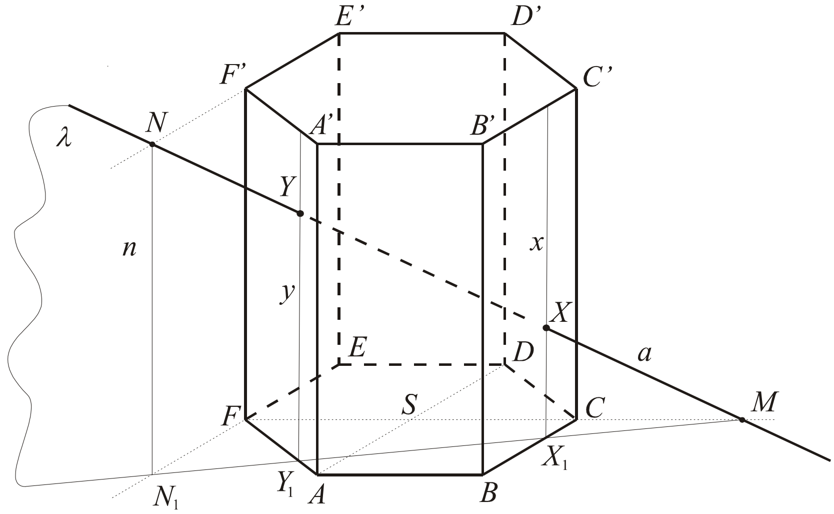
Riešenie

1. (*Rozbor*) Vzájomnú polohu priamky s telesom určíme pomocou ľubovoľnej roviny prechádzajúcej danou priamkou, ktorá je alebo osnovovou rovinou vzhľadom na príslušnú hranolovú plochu ***H*** alebo pretína túto plochu v n-uholníku. Najvýhodnejšou je osnovová rovina plochy ***H*** (par. 5.2.1, kap. 5). Takáto rovina má s plochou spoločné najviac dve tvoriace priamky (ak neobsahuje práve stenu plochy), teda jej prienik s povrchom hranola ***H****** je nanajvýš rovnobežník.[16]

2. (*Konštrukcia*) Priemetňu si zvoľme tak, aby stena $ABB'A'$ telesa bola v priečelnej polohe, t.j. ležala v rovine rovnobežnej s priemetňou. Obdĺžnik $ABB'A'$ na obr. 3.15 je preto zhodný s originálnou stenou telesa. Voľný rovnobežný priemet telesa je určený podľa Pohlkeho vety priemetom ľubovoľnej štvorice nekomplanárnych vrcholov; zvoľme si body A, B, S a A' (podľa dohovoru o stene $ABB'A'$ je $AB \perp AA'$, $|AA'| = 2|AB|$ a S si zvoľme

[16]V prípade použitia roviny, ktorá nie je osnovová, by konštrukcia vyžadovala prinajmenšom použitie perspektívnej afinity medzi rovnobežným priemetom šesťuholníka $AB...F$ a priemetom rovinného rezu hranolovej plochy ***H*** so zvolenou rovinou s prípadným doplnením rezov rovín oboch podstáv hranola ***H**** touto rovinou [13]. V čom môže pretínať rovina, ktorá nie je osnovová, povrch n-bokého hranola? (3-uholník až (n+1)-uholník)

ľubovoľne vhodne (tak, aby sa napríklad neprekrývali v priemete žiadne dve hrany)). Trojicou nekolineárnych bodov A, B, S je obraz podstavy určený.[17] Označme si λ osnovovú rovinu prechádzajúcu priamkou a. Táto rovina je určená priamkou a a napr. osnovovou priamkou n plochy $\boldsymbol{H}$ prechádzajúcou bodom N ($N \in n$, $n \parallel AA'$). Na konštrukciu prieniku ($\lambda \cap \boldsymbol{H}$) stačí zostrojiť priesečnicu roviny λ s rovinou šesťuholníka $AB...F$ a jej spoločné body s týmto šesťuholníkom (označme $P_6 = AB...F$). Platí: $\lambda \cap \overleftrightarrow{ABC} = \overleftrightarrow{N_1M}$, $\overleftrightarrow{N_1M} \cap P_6 = \{X_1, Y_1\}$, kde $N_1 = n \cap \overleftrightarrow{ABC} = n \cap \overleftrightarrow{EF}$ (vysvetlite). Prienikom roviny λ s plochou $\boldsymbol{H}$ sú tvoriace priamky x, y plochy incidentné s bodmi X_1, Y_1 ($X_1 \in x, Y_1 \in y, x \parallel y \parallel AA'$). Potom platí: $a \cap \boldsymbol{H} = a \cap (\lambda \cap \boldsymbol{H}) = a \cap \{x, y\} = \{X, Y\}$. Body X, Y môžu, no nemusia patriť danému hranolu $\boldsymbol{H}$. Vo zvolenom prípade ide o body povrchu hranola $\boldsymbol{H^*}$, teda prienikom priamky a s daným hranolom je úsečka XY: $a \cap \boldsymbol{H^*} = XY$. V opačnom prípade je potrebné zostrojiť prienikový obdĺžnik roviny λ s telesom (triviálna úloha) a určiť jeho vzájomnú polohu s priamkou a.



Obr. 3.15

3. Konštrukcia úsečky X^0Y^0 zhodnej s úsečkou XY je zrejmá. Zostrojíme ju napríklad pomocou konštrukcie trojuholníka NMN_1 (obr. 3.15) (zrejme $N \in E'F' \Rightarrow N_1 \in EF$).

[17] Podstava $AB...F$ je pravidelný šesťuholník so stredom S, t.j. na obrázku 3.15 je $SABC$ rovnobežník a bod S je stredom súmernosti šesťuholníka $AB...F$ v nákresni. Ide o obraz pravidelného šesťuholníka v afinite, ktorá je v tomto prípade rovnobežným premietaním. ([10], cvičenie 13)

3.4 CVIČENIA

1. Daný je štvorsten $ABCD$ a bod M roviny steny ACD ($M \notin AC \cup CD \cup AD$). Zostrojte priamku roviny steny ACD tak, aby prechádzala bodom M a bola rovnobežná s rovinou ABC. Dokážte správnosť konštrukcie.

2. V nasledujúcich úlohách je daný rovnobežnosten $ABCDA'B'C'D'$. Zostrojte rovinný rez telesa rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{KLM}$. V prípade kocky alebo kvádra zostrojte aj útvar zhodný s rezovým n-uholníkom.

a) $K = B$, $L = D'$, $(AA'M) = -1$. Riešte úlohu pre kocku s dĺžkou hrany a. Vyjadrite obsah rezu.

b) $(DD'K) = (B'BL) = (DCM) = 3$. Dokážte, že všetky vrcholy rezu sú stredmi relevantných hrán telesa.

c) $(A'D'K) = (ABL) = (CC'M) = -1$. Dokážte, že všetky ďalšie vrcholy rezu sú stredmi príslušných hrán telesa.

d) $(AA'K) = -1/2$, $(CC'L) = (DD'M) = -3$. Zostrojte aj priesečnicu roviny α s rovinou $A'B'C'$.

e) $(ABK) = (CC'M) = -1$, $(AA'L) = -3$.

f) $K = B$, $L = C'$, $(A'B'M) = 1/3$. Čo je rovinným rezom telesa? Zostrojte útvar zhodný s rezom, ak ide o kváder: $|AB| = 3j$, $|BC| = 5j$, $|AA'| = 4j$. Čo je rovinným rezom v prípade kocky?

g) $(AA'K) = (D'C'L) = -2$, $M = BC' \cap B'C$. (*Návod.* Zostrojte napríklad priesečník 1 priamky KL s rovinou steny $BCC'B'$ telesa pomocou roviny $\lambda = \overleftrightarrow{KLC'}$. Potom $\lambda \cap \overleftrightarrow{BCC'} = \overleftrightarrow{1M}$. Konštrukcia prienikov s rovinami ďalších stien telesa je zrejmá.)

h) $(A'D'K) = (C'D'L) = -1/2$, $ADM = 1/2$. Riešte úlohu pre ľubovoľný kváder.

i) $(BCK) = (C'D'L) = (C'CM) = -1/2$. Obraz telesa vo voľnom rovnobežnom premietaní si zvoľte podľa obr. 3.12.

j) $(DD'K) = 3$, $(BB'L) = 1/4$, $(CC'M) = -1$. Zostrojte aj priesečník priamky DB' s rovinou α.

k) $(C'D'K) = (CC'L) = (BDM) = -1/2$.

l) $K = A'$, $(ADL) = 1/2$, $(CC'M) = 1/3$. Zostrojte útvar zhodný s rezom pre ľubovoľný kváder.

3. Zostrojte rovinný rez rovnobežnostena rovinou α, ktorá prechádza daným bodom P a je rovnobežná s rovinou $\beta = \overleftrightarrow{KLM}$.

a) $K = A$, $L = B'$, $M = D'$, $(C'D'P) = -2$.

b) $K = D'$, $(AA'L) = (BB'P) = -1/2$, $(BD'M) = -1$.

c) $K = D$, $(AA'L) = -5/2$, $(C'D'M) = -2$, $(BD'P) = -1$.

d) $K = B$, $L = C'$, $(CDM) = -2$, $(ABP) = -1$.

4. Zostrojte rovinný rez rovnobežnostena rovinou, ktorá prechádza priamkou $m = \overleftrightarrow{KL}$ a je rovnobežná s priamkou *MN*. $(A'D'K) = -1/2$, $(C'D'L) = -1$, $M = C'$, $(BB'N) = -1/3$.

5. Zostrojte rovinný rez kvádra $ABCD...D'$ rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{KLM}$ a útvar zhodný s rezom pri ľubovoľne zvolených dĺžkach hrán kvádra.

a) $(CC'K) = -1/2$, $(A'D'L) = -1$, $(BB'M) = 1/3$.

b) *K*, *L*, *M* sú v danom poradí stredy hrán AA', BC a $C'D'$. Dokážte, že i priesečníky roviny s ďalšími hranami telesa sú ich stredmi.

6. Ktoré pravidelné *n*-uholníky môžu byť rovinnými rezmi kocky?

7. Zostrojte rovinný rez kvádra rovinou α rovnobežnou s rovinou ACD' a prechádzajúcou stredom kvádra.

8. Zostrojte rovinný rez štvorstena *ABCD* rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{MNP}$.

a) $M \in AB^{\mathrm{o}}$[18], $N \in AD^{\mathrm{o}}$, $P \in CD^{\mathrm{o}}$. Kedy je prienikom lichobežník? Urobte náčrt pre $(ABM) = -1$, $(ADN) = -3$, $(CDP) = -1/2$.

b) $(ABM) = -1$, $(BCN) = -2$, $(BDP) = -3$. Zobrazte i $\alpha \cap ACD$.

c) $1 > (CDM) > 0$, $N \in BC^{\mathrm{o}}$, $P \in AC^{\mathrm{o}}$

9. Zostrojte rovinný rez trojbokého hranola $\boldsymbol{H}\ (ABC, AA')$ rovinou $\alpha = \overleftrightarrow{KLM}$.

a) $K = B$, $L \in A'B'$, $M \in CC'$

b) $(AA'K) = -3$, $(BB'L) = -1/2$, $(A'C'M) = -1$.

c) $K = A$, $L = B$, $(A'C'M) = -2$.

d) $(ABK) = (A'C'L) = -1$, $(BCM) = -3$.

[18] AB^{o} je otvorená úsečka, t.j. množina všetkých vnútorných bodov úsečky *AB*.

e) $MN \subset \alpha$, $\alpha \parallel AA'$, $M \in AB$, $N \in B'C'$.

10. Daný je trojboký hranol $ABCA'B'C'$, rovina $\alpha = \overleftrightarrow{MNP}$ (M, N, P sú v danom poradí vnútorné body hrán AA', BB', CC') a bod L, ktorý je vnútorným bodom trojuholníka $A'B'C'$. Zostrojte priesečník priamky CL s rovinou α. Zvoľte si $(AA'M) \neq (BB'N) \neq$ $\neq (CC'P) \neq (AA'M)$.

11. Vyriešte príklad 3.11 pre hranol ***H*** s výškou zhodnou s podstavnou hranou. Zvyšné prvky zadania sú nezmenené.[19]

12. Určte vzájomnú polohu priamky a so šikmým šesťbokým hranolom $ABCDEFA'...F'$ s pravidelnou podstavou $ABC...F$. Zvoľte si náčrt tak, aby žiadna stena telesa nemala priečelnú polohu. [$a = \overleftrightarrow{MN}$, ($SCM$) = 3, ($BF'N$) = 4]. Rozhodnite i o viditeľnosti priamky a vzhľadom na zvolenú viditeľnosť hrán telesa.

13. Určte vzájomnú polohu priamky a s pravidelným päťbokým hranolom $ABCDEA'...E'$, ktorého výška je zhodná s uhlopriečkou podstavy. Zostrojte aj úsečku zhodnú s prienikom. Obraz telesa si zvoľte tak, aby podstava $ABCDE$ bola viditeľná (podhľad). [$a = \overleftrightarrow{MN}$, ($ABM$) = 2, ($BC'N$) = 5]

14.

a) Daná je rovina $\alpha = \overleftrightarrow{MNP}$ ($M \in AD^{o}$, $N \in BD^{o}$, $P \in CD^{o}$) a štvorsten $ABCD$. Zostrojte priesečník priamky DL s rovinou α, ak L je vnútorným bodom trojuholníka ABC. Zvoľte si $(ADM) \neq (BDN) \neq (CDP) \neq (ADM)$.

b) Zostrojte rovinný rez štvorstena $ABCD$ rovinou α ($MN \subset \alpha$, $\alpha \parallel AC$), ak $M \in AB^{o}$, $N \in AD^{o}$. Môže byť rezový útvar rovnobežník?

15. Zostrojte rovinný rez štvorbokého ihlana ***I*** ($ABCD$, V) rovinou α.

a) $BM \subset \alpha$, $\alpha \parallel AC$, $M \in DV^{o}$.

b) $\alpha = \overleftrightarrow{KMN}$ ($K \in AV^{o}$, body M, N sú v danom poradí vnútorné body trojuholníkov CDV a BCV).

[19] Úlohy z cvičení 11, 12 riešte v podhľade i nadhľade.

16. Popíšte konštrukciu priamky, ktorá prechádza daným bodom *A*, je rovnobežná s danou rovinou α a pretína priamku *b* ($A \notin \alpha$, $A \notin b$, priamka b je rôznobežná s rovinou α).

17. Dané sú mimobežné priamky *a*, *b*. Dokážte, že nimi možno preložiť dvojicu navzájom rovnobežných rovín.

18. Daný je rovnobežnosten $ABCDA'B'C'D'$ a body *P*, *Q* tak, že platí: $(A'D'P) = -1/2$, $(C'D'Q) = -1$. Zostrojte:

a) priečku priamok AB, $B'D'$ rovnobežnú s priamkou AC'.

b) priečku priamok AB', BC' rovnobežnú s priamkou $A'C$.

c) priečku priamok AB', BC' prechádzajúcu bodom A'.

d) priečku priamok PQ, DD' prechádzajúcu bodom B.

V poslednom prípade si zvoľte kocku a zostrojte aj dĺžku úsečky vyťatej na priečke oboma mimobežkami pri ľubovoľne zvolenej dĺžke hrany telesa.

19. Daný je rovnobežnosten $ABCDA'B'C'D'$. Zostrojte priečku priamok *a*, *b* prechádzajúcu bodom *M*. V prípade, že je referenčným telesom kocka, zostrojte aj dĺžku úsečky vyťatej na priečke oboma mimobežkami.

a) $a = \overleftrightarrow{AD'}$, $b = \overleftrightarrow{CR}$, $(A'B'R) = -1$, $(CDM) = 2/5$.

b) $a = \overleftrightarrow{C'K}$, $(A'B'K) = -1/2$, $b = \overleftrightarrow{DN}$, $(BCN) = -1$, $(CC'M) = -3/2$.

20. Daný je rovnobežnosten $ABCDA'B'C'D'$. Zostrojte priečku priamok *a*, *b* rovnobežnú s priamkou *s*, ak $a = \overleftrightarrow{A'S}$, $b = \overleftrightarrow{BE}$, $s = \overleftrightarrow{AB}$, $S = AC \cap BD$, $(DD'E) = 3$.

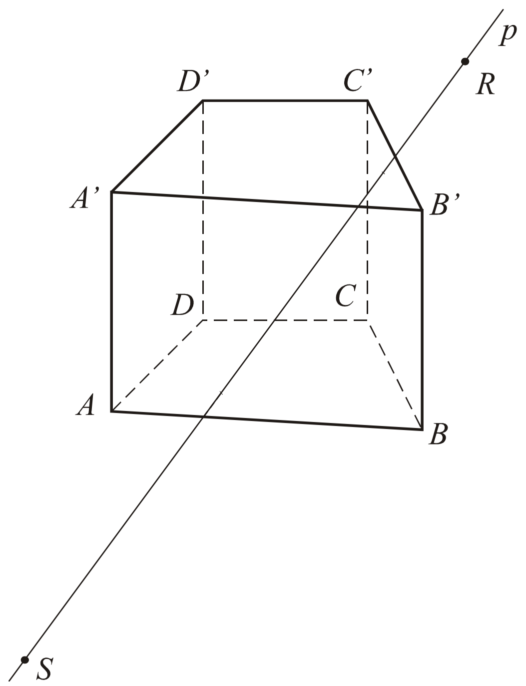
21. Za predpokladu, že $ABCDA'B'C'D'$ (z príkladu 3.3) je kváder s dĺžkami hrán $|AB| = 5j$, $|BC| = 6j$ a $|AA'| = 3j$, zostrojte dĺžku úsečky vyťatej na priečke oboma mimobežkami, t.j. $|XY|$.

22.

a) Za predpokladu, že je štvorsten *ABCD* (z príkladu 3.4) pravidelný a $|AB| = 5$ j, zostrojte dĺžku úsečky vyťatej na priečke danými mimobežkami.

b) Za predpokladu zvolenej viditeľnosti hrán telesa rozhodnite o viditeľnosti úsečky $XY \subset r$ vzhľadom na teleso. Vymodelujte si celú konfiguráciu.

23. Daný je štvorboký hranol $ABCDA'B'C'D'$ a priamka $p = \overleftrightarrow{RS}$, kde $R = p \cap \overleftrightarrow{DCC'}$, $S = p \cap \overleftrightarrow{ADD'}$ (obr. 3.16). Zostrojte priesečníky priamky p s rovinami zvyšných stien hranola a vyznačte graficky prienik priamky s telesom (vrátane viditeľnosti vzhľadom na zvolenú viditeľnosť hrán telesa na obrázku). *Návod.* Použite osnovovú rovinu príslušnej hranolovej plochy ${}^4H\,(ABCD \subset \alpha;\ \overleftrightarrow{AA'})$ incidentnú s danou priamkou p a zostrojte jej priesečnice s rovinami DCC', ADD' a následne s rovinou podstavy $ABCD$ telesa. Konštrukcia priesečníc tejto roviny s rovinami zvyšných troch stien telesa je triviálna (prienik hranolovej plochy s osnovovou rovinou vzhľadom na plochu – kapitola 5).



Obr. 3.16

24. Môže byť rovinným rezom štvorstena kosoštvorec, pravouholník alebo štvorec? Môže byť takých sústav rovín viac? Skúste odhadnúť nevyhnutné (dostačujúce) podmienky. Návod: príklad 3.10.

25. Vyriešte príklad 3.11 pre hranol ***H*** s výškou zhodnou s podstavnou hranou. Zvyšné prvky zadania sú nezmenené.

26. Zostrojte priesek rovnobežníka *KLMN* a trojuholníka *PQR*. Referenčné teleso je kocka $ABCDA'B'C'D'$. $(AA'K) = -2$, $L = B$, $(CC'M) = -1/2$, $(AA'P) = 2$, $(ACQ) = -1/3$, $R = C'$.

27. Dané sú mimobežné priamky a, b. Čo je množina všetkých bodov X, pre ktoré platí: $(ABX) = m$, $A \in a$, $B \in b$, $m \in R - \{0,1\}$.

28. Je daných n rôznych priamok, z ktorých každé dve sú navzájom rôznobežné. Dokážte, že tieto priamky buď všetky prechádzajú jedným bodom, alebo všetky ležia v jednej rovine.

29. Vo dvoch rôznych rovinách ρ, ρ' ležia trojuholníky ABC, $A'B'C'$, pričom $A \neq A'$, $B \neq B'$, $C \neq C'$. Priamky AB, $A'B'$ sa pretínajú v bode C_0, priamky BC, $B'C'$ v bode A_o a priamky CA, $C'A'$ v bode B_0. Dokážte, že:

a) Body A_0, B_0, C_0 ležia na jednej priamke.

b) Priamky AA', BB', CC' prechádzajú určitým bodom V.

30. Dané sú body A', B', C', D', ktoré všetky neležia v jednej rovine.

a) Môžu niektoré z týchto bodov ležať na jednej priamke?

b) Koľko priamok a koľko rovín je týmito bodmi určených?

c) Ako voláme teleso určené týmito bodmi?

d) Vyhľadajte tri dvojice mimobežiek, ktoré určujú dané body.

31. Nech sú C, D dva body, ktoré neležiace v danom polpriestore $\overset{\mapsto}{\rho A}$. Dokážte, že bod D leží v polpriestore $\overset{\mapsto}{\rho C}$.

32. Ak je priamka p [rovina ρ] rovnobežná s rovinou σ, tak priamka p [rovina ρ] leží v tom istom polpriestore s hranicou σ. Dokážte.

33. Sformulujte analogické tvrdenie s tvrdením v cvičení 32 pre priamku a rovinu, ktoré sú rôznobežné s rovinou σ.

34. Zvoľte si ľubovoľný štvorsten $ABCD$ a vnútorné body A', B' jeho hrán DA, DB v danom poradí.

a) Zostrojte priesečnicu rovín $AB'C$, $A'BC$.

b) Nech C' je bod, pre ktorý $(DCC') > 0$; dokážte, že existuje priesečnica p rovín ABC, $A'B'C'$ a zostrojte ju. Ďalej dokážte, že priamky AB, $A'B'$ sú s priamkou p buď rovnobežné, alebo ju pretínajú v tom istom bode.

35. Je daný štvorsten *ABCD*; *T*, *U*, *V* sú v danom poradí stredy hrán AB, BD, CD. Vyšetrite vzájomnú polohu trojíc rovín :

a) ABU, TUV, BCD

b) ABC, BCD, AUV

c) ABD, ABC, ABV

d) ABC, TUV, BCD.

36. Daný je štvorsten *VABC* a vnútorný bod *M* hrany *VA*. Dokážte, že rovina $\alpha(M \in \alpha \wedge \alpha \parallel \overleftrightarrow{ABC})$ pretína úsečky *VB* a *VC* v ich vnútorných bodoch.

37. Nech sú dané dve dvojice navzájom rovnobežných rovín $\rho \parallel \rho'$, $\sigma \parallel \sigma'$, pričom ρ, σ sú navzájom rôznobežné roviny. Dokážte, že aj roviny ρ', σ' sú navzájom rôznobežné.

38. Nech je daná rovina ρ a v nej konvexný štvoruholník *ABCD*. Ďalej nech je daná priamka *a* prechádzajúca bodom *A*, ktorá neleží v rovine ρ a priamka *c* prechádzajúca bodom *C* a rovnobežná s priamkou *a*. Dokážte, že roviny $\overleftrightarrow{Ba}$, $\overleftrightarrow{Dc}$ sa pretínajú s rovinami $\overleftrightarrow{Bc}$, $\overleftrightarrow{Da}$ (v danom poradí) v priamkach *u* a *v*, pričom $u \parallel v \parallel a$.

39. Je daná rovina ρ a dve navzájom rôzne rovnobežné priamky *p*, *q* ($p \parallel q$). Dokážte:

a) Ak platí $p \parallel \rho$, platí aj $q \parallel \rho$.

b) Ak priamka *p* pretína rovinu ρ, pretína ju i priamka *q*.

40. Je daný ihlan *VMNPQ*, ktorý má lichobežníkovú podstavu *MNPQ* ($MN \parallel PQ$). Určte priesečnicu rovín *VMQ*, *VNP* a rovín *VMN*, *VPQ*. Riešenie urobte s použitím siete ihlana.

41. Nech sú α, β navzájom rôznobežné roviny a α', β' ľubovoľné dve roviny, pre ktoré $\alpha \parallel \alpha' \neq \alpha$, $\beta \parallel \beta' \neq \beta$. Dokážte, že i roviny α', β' sú navzájom rôznobežné a ich priesečnica je rovnobežná s priesečnicou rovín α, β.

42. Dané sú dve rovnobežné roviny ρ, ρ' a dve navzájom rovnobežné priamky *r*, *s* rôznobežné s danými rovinami. Body *R*, *S* (v danom poradí) sú priesečníky týchto priamok s rovinou ρ a body R', S' (v danom poradí) priesečníky s rovinou ρ'. Dokážte, že platí $RR' \uparrow\uparrow SS'$ a $RR' \cong SS'$.

43. Zobrazte ľubovoľný štvorsten *VABC*. Bodom *V* narysujte priamky $a' \parallel BC,\ b' \parallel CA,\ c' \parallel AB$. Dokážte, že priamky $a',\ b',\ c'$ ležia v jednej rovine, ktorá je rovnobežná s rovinou trojuholníka *ABC*.

44. Nech je daný ihlan *VABC*. Po priamke *BC* sa pohybuje bod *M*.

a) Aké útvary vyplnia jednotlivé ťažnice trojuholníkov *VAM*?

b) Čo je množinou bodov ťažníc týchto trojuholníkov?

45. Dokážte, že ak ležia všetky vrcholy vypuklého mnohouholníka v polpriestore $\overset{\mapsto}{\rho A}$, potom všetky body mnohouholníka ležia v tomto polpriestore.

46. Zostrojte styčné roviny ihlanovej plochy $\boldsymbol{I_n}(P_n \subset \alpha; V)$ prechádzajúce daným bodom *M* $(M \neq V)$.

47. Zostrojte styčné roviny ihlanovej plochy $\boldsymbol{I_n}(P_n \subset \alpha; V)$ rovnobežné s danou priamkou *m* $(V \notin m)$.

48. Zostrojte dotykové roviny kružnicovej valcovej plochy $\boldsymbol{V}(k \subset \alpha;\ l)$ prechádzajúce daným bodom *M* $(M \neq V)$.

49. Zostrojte dotykové roviny kružnicovej valcovej plochy $\boldsymbol{V}(k \subset \alpha;\ l)$ rovnobežné s danou priamkou *m* $(V \notin m)$.

50. Zostrojte dotykové roviny kružnicovej kužeľovej plochy $\boldsymbol{K}(k \subset \alpha; V)$ prechádzajúce daným bodom *M* $(M \neq V)$.

51. Zostrojte dotykové roviny kružnicovej kužeľovej plochy $\boldsymbol{K}(k \subset \alpha; V)$ rovnobežné s danou priamkou *m* $(V \notin m)$.

4 METRICKÉ ÚLOHY

4.1 KOLMOSŤ ZÁKLADNÝCH GEOMETRICKÝCH ÚTVAROV

Budeme definovať kolmosť základných geometrických útvarov, a to kolmosť dvoch priamok, kolmosť priamky a roviny a kolmosť dvojice rovín. Ústredným problémom bude určenie nevyhnutných a dostačujúcich podmienok dvoch navzájom kolmých geometrických útvarov a ich vlastností, na základe ktorých sa budú definovať nové pojmy, napríklad vzdialenosť dvoch geometrických útvarov. V tejto súvislosti sa odvodia aj ďalšie vlastnosti niektorých základných telies, ako napríklad pravidelný štvorsten, kocka, pravidelný osemsten, ortocentrický štvorsten a pod.

V planimetrii sa kolmé priamky (tej istej roviny) definujú ako priamky, ktorých uhol je zhodný s pravým uhlom[20] a ukáže sa, že možno v rovine zostrojiť *práve jednu priamku* prechádzajúcu daným bodom a kolmú na ľubovoľnú inú priamku roviny[21]. V stereometrii narážame na problém určenia uhla dvoch navzájom mimobežných priamok, ktorý zatiaľ *nie je* definovaný. Uhol dvoch mimobežných priamok *a*, *b* bude prirodzené definovať ako uhol zhodný s uhlom ľubovoľných dvoch rôznobežiek a', b', pričom $a' \parallel a$ a $b' \parallel b$. Aby bola definícia *korektná*, dokážeme najprv *nezávislosť takto definovaného uhla* od výberu dvojice rôznobežiek z dvoch daných osnov priamok určených priamkami *a*, *b*. Dokážeme vetu

Veta 4.1

Nech sú *a*, *b* dve ľubovoľné mimobežky a M', M'' dva body ($M'' \neq M'$). Ak zostrojíme priamky a', b'; a'', b'' tak, aby $M' \in a' \cap b'$, $M'' \in a'' \cap b''$ a $a' \parallel a'' \parallel a$, $b' \parallel b'' \parallel b$, platí: $\sphericalangle a'b' \cong \sphericalangle a''b''$.

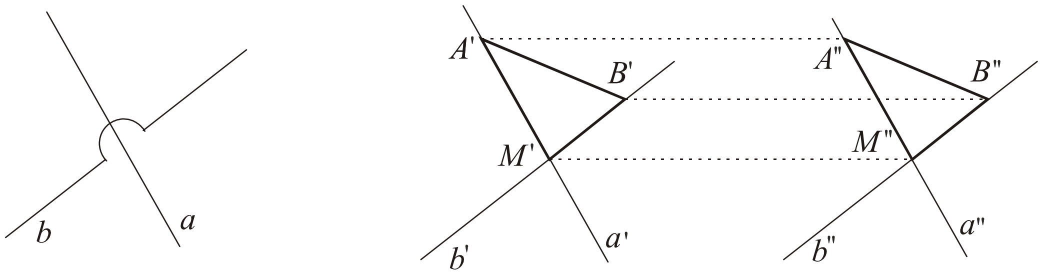
Dôkaz

Zvoľme si dva ľubovoľné body A', B' ($B' \neq A'$) incidentné s rovnomennými priamkami a', b' tak, aby $A' \neq M' \neq B'$. Ďalej stačí zostrojiť body A'', B'' tak, aby útvary $M'A'A''M''$ a $M'B'B''M''$ boli rovnobežníky. Je zrejmé, že aj útvar $A'B'B''A''$ je rovnobežníkom a trojuholníky $A'B'M'$ a $A''B''M''$ sú zhodné (veta sss). Pretože zhodné trojuholníky sa

[20] Pravý uhol sa definuje ako uhol zhodný so svojím susedným uhlom.

[21] Bezprostredným dôsledkom je existencia priamok roviny, ktoré nemajú spoločný bod (= *rovnobežky*) ([15]).

zhodujú vo všetkých uhloch, platí: $\sphericalangle A'M'B' \cong \sphericalangle A''M''B''$, t.j. $\sphericalangle a'b' \cong \sphericalangle a''b''$, čo bolo treba dokázať. (Obr. 4.1)



Obr. 4.1

Definícia 4.1

a) *Uhlom priamok a, b* ($a \nparallel b$) nazývame uhol ľubovoľných dvoch nedisjunktných priamok a', b', pre ktoré platí: $a' \parallel a$, $b' \parallel b$. *Uhol dvoch rovnobežiek* nazývame nulovým uhlom.

b) *Kolmé priamky* nazývame také priamky, ktorých uhol je pravý.

c) *Priamka kolmá na rovinu* [hovoríme aj *kolmica na rovinu*] je priamka kolmá na všetky priamky roviny.

Dôsledok 4.1

a) Priamka kolmá na rovinu je s touto rovinou rôznobežná.

b) Priamka kolmá na dve rôznobežky danej roviny je s touto rovinou rôznobežná.

Veta 4.2. (kritérium kolmosti priamky a roviny)

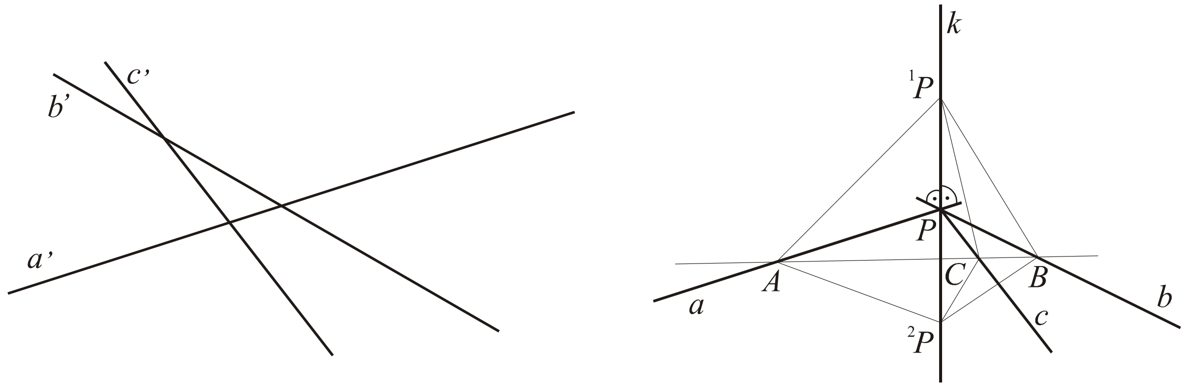
Priamka je kolmá na rovinu *práve vtedy*, keď je kolmá na dve rôznobežné priamky tejto roviny.

Dôkaz

a) (*nutnosť*) Predpokladajme, že priamka *k* je kolmá na rovinu α ($k \perp \alpha$). Z kolmosti priamky *k* na všetky priamky roviny (definícia 4.1) vyplýva jej kolmosť na ľubovoľné dve jej rôznobežky.

b) (*dostatočnosť*) Predpoklad: priamka *k* je kolmá na dve rôznobežky a', b' roviny α. Treba dokázať, že priamka *k* je kolmá na všetky priamky danej roviny. Zvoľme si ľubovoľnú priamku c' ($c' \nparallel a', c' \nparallel b'$) tejto roviny; stačí dokázať kolmosť priamok *k*, c'.

Ďalej urobíme nasledujúcu konštrukciu. Podľa dôsledku 4.1b je priamka k s rovinou α rôznobežná. Označme P ich spoločný bod a zostrojme priamky a, b, c prechádzajúce týmto bodom a rovnobežné s priamkami a', b', c' $(P = a \cap b \cap c,\ a \parallel a',\ b \parallel b',\ c \parallel c')$ (obr. 4.2). Stačí dokázať: $k \perp c$ (prečo? vysvetlite).



Obr. 4.2

Zvoľme si ľubovoľné body A, B ležiace na rovnomenných priamkach a, b tak, aby $A \neq P \neq B$ a priamka c aby pretínala úsečku AB. Označme $c \cap AB = \{C\}$ – ide zrejme o vnútorný bod úsečky AB. Ďalej nech sú ${}^iP \in k$ $({}^iP \neq P,\ i = 1,2)$ ľubovoľné dva body, pre ktoré $({}^1P\,{}^2P P) = -1$, t.j. bod P je stredom úsečky ${}^1P\,{}^2P$.

Potom platí: $\triangle {}^1PAP \cong \triangle {}^2PAP$, $\triangle {}^1PBP \cong \triangle {}^2PBP$ (sus), t.j. ${}^1PA \cong {}^2PA$, ${}^1PB \cong {}^2PB$. Odtiaľ vyplýva: $\triangle {}^1PAB \cong \triangle {}^2PAB$ (sss), t.j. $\sphericalangle {}^1PAB \cong \sphericalangle {}^2PAB$ $(\Rightarrow \sphericalangle {}^1PAC \cong \sphericalangle {}^2PAC)$. Dôsledkom je zhodnosť trojuholníkov $\triangle {}^1PAC, \triangle {}^2PAC$ (sus), t.j. i úsečiek ${}^1PC, {}^2PC$. Na záver konštatujeme, že $\triangle {}^1PPC \cong \triangle {}^2PPC$ (sss), čo znamená, že sú zhodné i uhly v týchto trojuholníkoch pri vrchole P. Pretože ide o susedné uhly, sú oba uhly pravé, t.j. priamka $k = \overleftrightarrow{{}^1PP}$ je kolmá na priamku c.

Záver: priamka k je kolmá na rovinu α. Tvrdenie je dokázané. (Obr. 4.2)

Poznámka 4.1

1. Ak je priamka a kolmá na priamku b, je zrejme i priamka b kolmá na priamku a; budeme preto hovoriť, že *priamky a, b sú navzájom kolmé*.
2. Veta 4.2 vyjadruje nevyhnutnú a dostačujúcu podmienku kolmosti priamky a roviny, a to za predpokladu *existencie* takejto priamky. Existenciu priamky kolmej na rovinu dokážeme v nasledujúcej vete. Namiesto vyjadrenia „priamka je kolmá na rovinu“ budeme tiež používať vyjadrenie „rovina je kolmá na priamku“. Analogicky ako v a) budeme hovoriť, že priamka a rovina sú *navzájom kolmé*.

Veta 4.3

Existuje práve jedna priamka prechádzajúca daným bodom M a kolmá na danú rovinu α.

Dôkaz

a) (*existencia*) 1. Dokážeme existenciu priamky požadovanej vlastnosti pre prípad, že bod M neleží v rovine α ($M \notin \alpha$). Dôkaz bude konštrukčný. Podľa vety 4.2 stačí zostrojiť priamku prechádzajúcu bodom M a kolmú na dve rôznobežky roviny α. Nech je $a \subset \alpha$ ľubovoľná priamka. Môžeme zostrojiť priamku b prechádzajúcu bodom M, ležiacu v rovine $\overleftrightarrow{aM}$ a kolmú na zvolenú priamku a (obr. 4.3a).[22] Priamky a, b sú navzájom rôznobežné; označme ich priesečník P. Ďalej zostrojme priamku c roviny α prechádzajúcu bodom P a kolmú na priamku a. Z kolmostí priamky a na navzájom rôznobežné priamky b, c (prečo ide o rôznobežky?) vyplýva podľa vety 4.2 kolmosť priamky a na rovinu $\gamma = \overleftrightarrow{bc}$. Je zrejmé, že stačí zostrojiť priamku k roviny γ prechádzajúcu bodom M a kolmú na priamku c tejto roviny. Táto priamka ako priamka roviny γ je kolmá na priamku a (definícia 4.1), teda $k \perp a \wedge k \perp c$; pretože priamky a, c sú navzájom rôznobežné, je podľa vety 4.2 priamka k kolmá na rovinu α. Existencia priamky požadovaných vlastností je dokázaná[23].

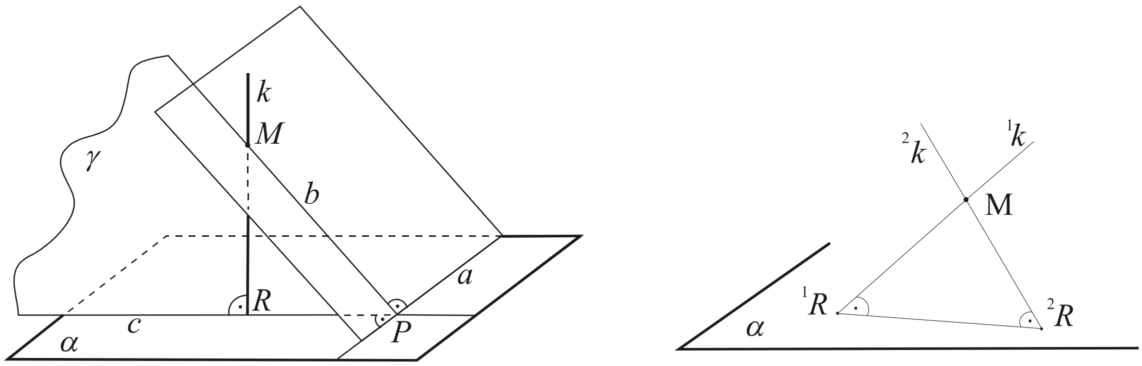
2. V prípade $M \in \alpha$ si stačí zvoliť ľubovoľný bod A, ktorý v rovine α neleží. Podľa prvej časti existenčného dôkazu existuje priamka k ($A \in k \wedge k \perp \alpha$). Z definície uhla dvoch priamok je zrejmé, že každá priamka rovnobežná s priamkou k je kolmá na rovinu α. Priamka požadovanej vlastnosti je teda priamka l ($M \in l \wedge l \parallel k$).

b) (*jednoznačnosť*) Jednoznačnosť existencie kolmice na danú rovinu α, ktorá prechádza daným bodom M stačí dokázať pre prípad $M \notin \alpha$ (prečo?). Treba dokázať, že konštrukcia priamky k realizovaná v a) nezávisí od výberu priamky a roviny α. Urobíme to dôkazom *sporom*. Ak by existovali dve navzájom rôzne priamky ${}^{i}k$ požadovanej vlastnosti, tak by ich priesečníky ${}^{i}R$ s rovinou α (i = 1, 2) boli navzájom rôzne body (prečo?), trojuholník ${}^{1}R\,{}^{2}RM$

[22] Treba si uvedomiť, že priamku prechádzajúcu daným bodom, ktorá je kolmá na inú priamku, zatiaľ vieme zostrojiť len v rovine; v nasledujúcej vete sa ukáže, že takýchto priamok je nekonečne mnoho a všetky ležia v tej istej rovine. Tento výsledok nám poskytne ďalšiu konštrukciu priečky danej priamky, ktorá prechádza daným bodom a je kolmá na túto priamku.

[23] Pretože priamky b, k prechádzajú obe tým istým bodom a sú kolmé na priamku a, môže nastať i prípad $k = b$. To však nič na dôkaze nemení, znamenalo by to toľko, že sme pri výbere priamky $a \subset \alpha$ „natrafili“ práve na priamku prechádzajúcu priesečníkom zostrojenej priamky k s rovinou α.

by bol trojuholníkom s dvoma pravými uhlami, čo je sporné tvrdenie s vetou o súčte vnútorných uhlov v trojuholníku euklidovskej roviny. Tvrdenie je dokázané. (Obr. 4.3b)



Obr. 4.3 a, b

Poznámka 4.2

Je prirodzené nazvať priesečník kolmice na rovinu s danou rovinou pätou kolmice (analogicky s planimetrickým pojmom). Okrem toho je zrejmé, že ak bod R je päta kolmice k z bodu M na rovinu α ($M \notin \alpha$, t.j. $M \neq R$), tak platí: $MX > MR$ pre všetky body $X \neq R$ roviny α. To nás oprávňuje nazvať úsečku MR alebo dĺžku tejto úsečky vzdialenosťou bodu M od roviny α.

Definícia 4.2

a) Priesečník priamky prechádzajúcej daným bodom M a kolmej na rovinu α s rovinou α nazývame *pätou kolmice* z bodu M na rovinu α.

b) *Vzdialenosťou bodu M od roviny* α nazývame úsečku MR (dĺžku úsečky MR), kde bod R je päta kolmice z bodu M na rovinu α.

Dôsledok 4.2

1. Všetky priamky kolmé na tú istú rovinu sú navzájom rovnobežné.

2. Vzdialenosť bodu M od roviny α je najmenšia z úsečiek MX ($\forall X \in \alpha$).

Príklad 4.1

a) Dokážte, že telesová uhlopriečka kocky je kolmá na všetky jej stenové uhlopriečky, s ktorými nie je rôznobežná.

b) Vyberte si ľubovoľnú telesovú uhlopriečku kocky a označte všetky stenové uhlopriečky k nej kolmé. Akú majú vlastnosť dve vhodné trojice z nich?

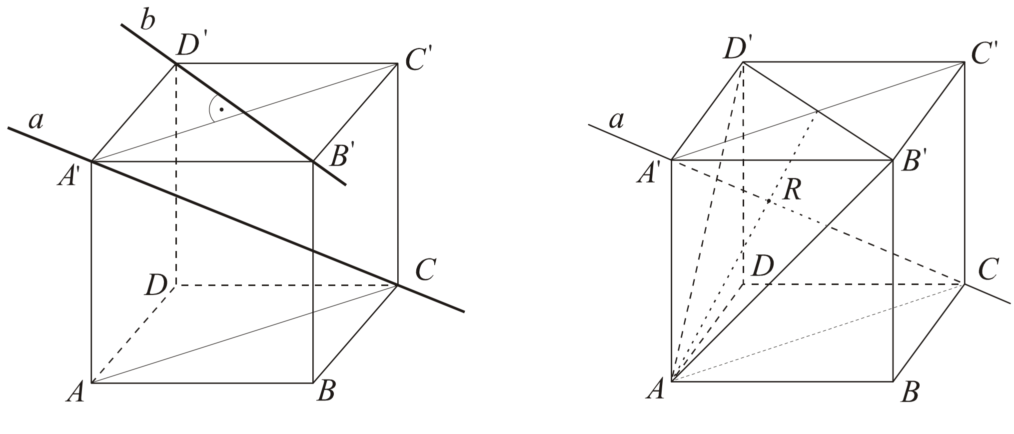
c) V kocke $ABCDA'...D'$ určte konštrukčne i výpočtom vzdialenosť vrcholu A' od roviny $AB'D'$. Dĺžka hrany kocky sa rovná nenulovému reálnemu číslu a.

Riešenie

a) Zvoľme si v kocke $ABCDA'...D'$ telesovú uhlopriečku $A'C$ a napríklad stenovú uhlopriečku $B'D'$ s ňou mimobežnú. Kolmosť dvoch mimobežných priamok overujeme tak, že nájdeme rovinu incidentnú s jednou z daných priamok a kolmú na zvyšnú priamku. Nositeľky $a = \overleftrightarrow{A'C}$, $b = \overleftrightarrow{B'D'}$ spomenutých uhlopriečok sú navzájom mimobežné priamky (vysvetlite). Pokúsme sa zostrojiť rovinu kolmú na jednu z nich a prechádzajúcu jedným z bodov zvyšnej priamky.

Rovina prechádzajúca bodom A' a kolmá na priamku b je rovina $A'C'C$. Platí totiž: $A'C' \perp b \wedge CC' \perp b$ a priamky $A'C'$ a CC' sú navzájom rôznobežné. Kolmosť je zaručená vetou 4.2 (vysvetlite). Navyše rovina $A'C'C$ obsahuje priamku *a*, odkiaľ na základe definície kolmosti priamky a roviny vyplýva kolmosť priamok *a*, *b*. (Obr. 4.4 a)

b) Analogicky môžeme pre ďalšie stenové uhlopriečky dokázať, že: $a \perp AB'$, $a \perp AD'$; $a \perp BD$, $a \perp DC'$, $a \perp BC'$. Každá z dvoch trojíc stenových uhlopriečok leží v tej istej rovine, ktorá je kolmá na zvolenú telesovú uhlopriečku. Platí teda: $A'C \perp \overleftrightarrow{AB'D'}$ a $A'C \perp \overleftrightarrow{C'DB}$ a roviny $AB'D'$ a $C'DB$ sú navzájom rovnobežné.



Obr. 4.4 a, b

Poznámka 4.3

Čitateľovi sa odporúča skompletizovať načrtnutý dôkaz a analogicky vyhľadať dvojice rovín kolmých na ďalšie stenové uhlopriečky telesa.

c) Vzdialenosť bodu A' od roviny $\alpha = \overleftrightarrow{AB'D'}$ sa rovná dĺžke úsečky $A'R$, kde R je päta kolmice z bodu A' na rovinu α. Podľa bodu a) priamka prechádzajúca bodom A' a kolmá na rovinu α je nositeľka telesovej uhlopriečky $\overleftrightarrow{A'C} = a$ danej kocky. (Obr. 4.4 b) Pätou kolmice a je bod $R = a \cap \alpha$. Konštrukcia bodu R bola riešením úlohy 3.1 (obr. 3.2a), kde sme zároveň dokázali, že R je ťažiskom trojuholníka $AB'D'$ a platí: $(A'CR) = -1/2$. Odkiaľ vyplýva: $|A\alpha| = |A'R| = \frac{1}{3}|A'C| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Konštrukcia úsečky $A'R$ pomocou obdĺžnika $A'ACC'$ sa necháva čitateľovi.

Poznámka 4.4

Vo vete 4.3 sme dokázali existenciu práve jednej priamky prechádzajúcej daným bodom a kolmej na danú rovinu. V zmysle poznámky o riešení konštrukčných úloh v stereometrii (v úvode kapitoly 3) sa úloha o konštrukcii priamky kolmej na rovinu pre nás stáva štandardnou konštrukciou, ktorú možno zaradiť za vymenované elementárne konštrukcie. V riešení stereometrických úloh sa často stretávame i s potrebou konštrukcie roviny incidentnej s daným bodom a kolmej na danú priamku. Po dokázaní nasledujúcej vety i túto konštrukciu zaradíme medzi elementárne konštrukcie.

Veta 4.4

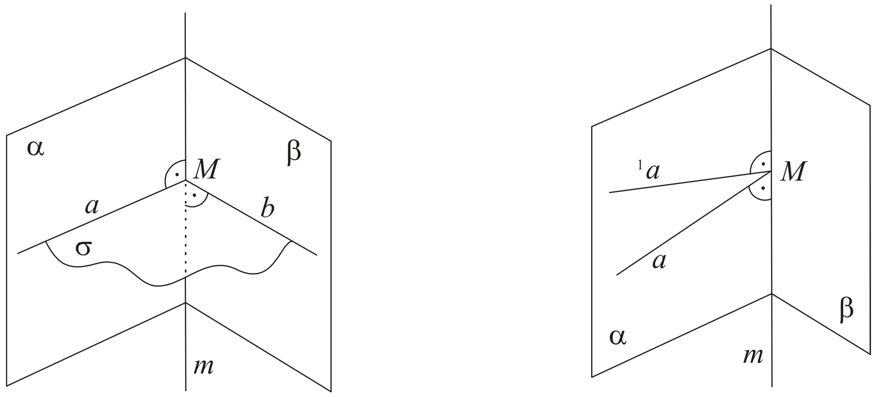
Existuje práve jedna rovina prechádzajúca daným bodom M a kolmá na danú priamku m.

Dôkaz

1. $M \in m$

a) (*existencia*) Dokážeme (konštrukčne), že rovina σ požadovaných vlastností existuje. Podľa vety 4.3 stačí zostrojiť dve navzájom rôzne priamky prechádzajúce daným bodom M a kolmé na danú priamku m. Podstatou riešenia konštrukčnej stereometrickej úlohy je jej prevedenie na postupnosť planimetrických úloh. V tomto zmysle je konštrukcia priamky prechádzajúcej bodom M priamky m a kolmej na túto priamku uskutočniteľná v ľubovoľnej rovine, ktorá je s danou priamkou incidentná. Zo zväzku rovín s osou v priamke m si teda vyberme ľubovoľné dve (navzájom rôzne) roviny α, β (je to možné podľa vety 1.2) a v týchto rovinách postupne zostrojme kolmice na priamku m požadovanej vlastnosti: $a(a \subset \alpha, M \in a, a \perp m)$, $b(b \subset \beta, M \in b, b \perp m)$. Je zrejmé, že priamky a, b sú navzájom rôznobežné (odôvodnite) a platí, že rovina $\sigma = \overleftrightarrow{ab}$ má požadované vlastnosti $(M \in \sigma \wedge \sigma \perp m)$. (Obr. 4.5a)

b) (*jednoznačnosť*) V tomto kroku treba dokázať nezávislosť zostrojenej roviny od výberu rovín α, β zo zväzku rovín s osou m. Dôkaz urobíme *sporom*. Ak by existovala ešte ďalšia rovina ${}^1\sigma$ požadovanej vlastnosti $(M \in {}^1\sigma \wedge {}^1\sigma \perp m)$, tak priesečnice rovín $\sigma, {}^1\sigma$ s aspoň s jednou z rovín α, β by boli dve navzájom rôzne priamky (odôvodnite). Nech $\alpha \cap \sigma \neq \alpha \cap {}^1\sigma$; pri označení $\alpha \cap {}^1\sigma = {}^1a$ by potom v rovine α existovali dve navzájom rôznobežné priamky $a, {}^1a$ kolmé na priamku *m* tejto roviny (odôvodnite kolmosť) (obr. 4.5b). To je sporné tvrdenie euklidovskej planimetrie (definícia pravého uhla).



Obr. 4.5 a, b

2. V prípade $M \notin m$ si stačí zvoliť ľubovoľný bod $N \in m$. Podľa kroku 1 dôkazu existuje práve jedna rovina ρ prechádzajúca bodom *N* a kolmá na priamku *m*. Z definície uhla dvoch priamok a kolmosti priamky a roviny je zrejmé, že každá rovina rovnobežná s rovinou ρ je na priamku *m* kolmá. Rovinou σ požadovanej vlastnosti ($M \in \sigma \wedge \sigma \perp m$) je teda rovina incidentná s bodom *M* a rovnobežná s rovinou ρ.

Dôsledok 4.3

Dve roviny kolmé na tú istú priamku sú navzájom rovnobežné. (Odôvodnite)

Poznámka 4.5

Pod vzdialenosťou dvoch geometrických útvarov U_1, U_2 sa rozumie najmenšia z úsečiek *XY* (alebo dĺžka tejto úsečky) pre $X \in U_1$, $Y \in U_2$. Čitateľovi sa odporúča dokázať, že pre dve navzájom rovnobežné roviny α, β ($\alpha \neq \beta$) je úsečka *XY* najmenšia v prípade kolmosti priamky *XY* na ľubovoľnú z rovín (t.j. na obe roviny). Môžeme teda definovať vzdialenosť dvoch rovnobežných rovín nasledovne:

Definícia 4.3

Vzdialenosťou dvoch rovnobežných rovín nazývame vzdialenosť ľubovoľného bodu jednej z rovín od druhej roviny.

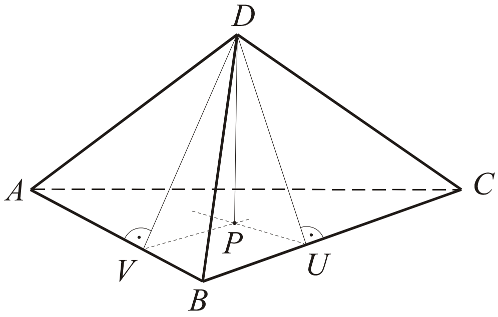
Dôkaz korektnosti definície sa ponecháva čitateľovi.

Príklad 4.2. Daný je štvorsten *ABCD*. Nech *P* je päta výšky prechádzajúcej vrcholom *D* a kolmej na rovinu *ABC*, nech *V* je päta kolmice z bodu *D* na hranu *AB* a nech *U* je päta kolmice z bodu *D* na hranu *BC*.

Dokážte, že platí: $VP \perp AB$, $UP \perp BC$ a na základe toho dôkazu odvoďte konštrukciu päty výšky štvorstena prechádzajúcej jedným vrcholom a kolmej na protiľahlú stenu telesa.

Riešenie

Z predpokladu $DP \perp \overleftrightarrow{ABC}$ vyplýva, že priamka *DP* je kolmá na každú priamku roviny $\overleftrightarrow{ABC}$ (definícia 4.1c), teda platí $DP \perp AB$. Ďalej vieme, že $DV \perp AB$, teda z oboch kolmostí je (podľa vety 4.2) zrejmé: $\overleftrightarrow{DVP} \perp AB \Rightarrow VP \perp AB$.
Analogicky dokážeme $UP \perp BC$.



Obr. 4.6

Konštrukcia päty výšky štvorstena prechádzajúcej jeho jedným vrcholom a kolmej na jeho protiľahlú stenu je pre ľubovoľný štvorsten zrejmá z vyššie uvedeného dôkazu. Postup konštrukcie je nasledovný. Zvolíme si vrchol *V* štvorstena, ktorým má výška prechádzať a ľubovoľné dve steny telesa s týmto vrcholom incidentné. V rovinách oboch stien stačí zostrojiť výšky prechádzajúce zvoleným vrcholom a následne pätami týchto výšok v rovine α steny protiľahlej k vrcholu *V* zostrojiť priamky kolmé na príslušné hrany štvorstena, ktoré päty výšok obsahujú. Priesečník V_1 oboch kolmíc je hľadaná päta výšky štvorstena $(VV_1 \perp \alpha)$.

4.2 UHLY ZÁKLADNÝCH GEOMETRICKÝCH ÚTVAROV

Uhol dvoch priamok sme definovali v úvode paragrafu 4.1. V definícii uhla priamky s rovinou bude považovaný za známy pojem kolmého priemetu priamky do roviny. Ako sme už pripomenuli, základné pojmy a vlastnosti rovnobežného – špeciálne ortogonálneho (= kolmého) – premietania patria do obsahu piatej kapitoly tejto práce (paragraf 5.2.2).

Definícia 4.4

a) Ak je priamka kolmá na rovinu, hovoríme, že jej *uhol s rovinou je pravý*.
Uhlom priamky a s rovinou α $(a \not\perp \alpha)$ nazývame uhol priamky *a* s jej kolmým priemetom do roviny α. (Obr. 4.7a)

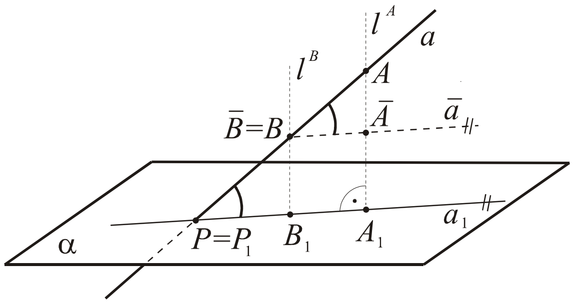
b) Uhol dvoch rovnobežných rovín nazývame *nulový uhol*.

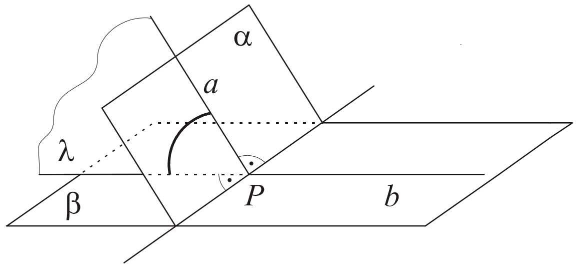
Uhlom rovín α, β (α, β sú rôznobežné) nazývame uhol priamok *a*, *b*, z ktorých každá leží práve v jednej z rovín a obe sú kolmé na priesečnicu rovín ($a \subset \alpha$, $b \subset \beta$, $a \perp \alpha \cap \beta$, $b \perp \alpha \cap \beta$). (Obr. 4.7b)

O rovinách, ktorých uhol je zhodný s pravým uhlom hovoríme, že sú *navzájom kolmé*.

Konštrukcia uhla priamky *a* s rovinou α vyplýva z definície. Nech je daná priamka *a* s rovinou α rôznobežná. Označme *P* ich spoločný bod. Musíme zostrojiť kolmý priemet priamky *a* do roviny α. Je ním priamka spájajúca kolmé priemety dvoch navzájom rôznych bodov priamky *a* do roviny α. (Kolmý priemet ľubovoľného bodu *X* [útvaru U] do roviny α budeme označovať pravým dolným indexom „1“, t.j. X_1 [U_1].) Ak je bod *P* dostupný, tak $P = P_1$ a stačí zostrojiť kolmý priemet ešte ďalšieho bodu *A* priamky *a* do danej roviny. Potom $A_1 = l^A \cap \alpha$, kde l^A je premietacia priamka bodu *A* (t.j. $A \in l^A \wedge l^A \perp \alpha$) a $a_1 = \overleftrightarrow{P_1A_1}$. Platí: $\sphericalangle a\alpha \cong \sphericalangle a a_1 \cong \sphericalangle A P_1 A_1$. (Obr. 4.7a)[24]

V prípade rovnobežnosti priamky *a* s rovinou α je $a \parallel a_1$ (poznámka za príkladom 1.1), t.j. uhol priamky s rovinou je nulovým uhlom.





Obr. 4.7 a, b

Konštrukcia uhla dvoch navzájom rôznobežných rovín α, β pozostáva z konštrukcie priesečnice $\alpha \cap \beta$ oboch rovín a z konštrukcie priamok *a*, *b* ($a \subset \alpha \wedge a \perp \alpha \cap \beta$; $b \subset \beta \wedge b \perp \alpha \cap \beta$). Vo všeobecnosti sú priamky *a*, *b* navzájom mimobežné; na základe definície 4.1

[24] V prípade nedostupného priesečníka *P* treba zostrojiť kolmý priemet ešte ďalšieho bodu *B* ($B \neq A$) priamky *a* do roviny α (analogicky s bodom A_1), t.j. $a_1 = \overleftrightarrow{A_1B_1}$. Úlohu možno riešiť i konštrukciou roviny $\bar{\alpha}$ (napr. $B \in \bar{\alpha} \wedge \bar{\alpha} \parallel \alpha$) a zostrojiť kolmý priemet $\bar{a}$ priamky *a* do tejto roviny. Platí totiž $\sphericalangle a\alpha \cong \sphericalangle a\bar{\alpha}$. Na obr. 4.7a je z roviny $\bar{\alpha}$ označený len bod $B = \bar{B}$ a kolmý priemet $\bar{A}$ bodu *A* do tejto roviny.

uhla dvoch priamok je však výhodné zvoliť si priamky a, b tak, aby boli navzájom rôznobežné (t.j. prechádzali tým istým bodom P priesečnice oboch rovín). Na záver sa uhol $\sphericalangle \alpha\,\beta \cong \sphericalangle ab$ určí v rovine $\overleftrightarrow{ab}$. Všetky kroky algoritmu sú elementárne konštrukcie popísané v úvode tretej kapitoly. (Obr. 4.7b)

Rovina $\lambda = \overleftrightarrow{ab}$ je kolmá na priesečnicu rovín α, β. Stačí zostrojiť ľubovoľnú rovinu χ kolmú na priesečnicu daných rovín a jej priesečnice s oboma rovinami. Platí: $\sphericalangle \alpha\,\beta \cong \sphericalangle((\alpha \cap \chi),(\beta \cap \chi))$; tento uhol sa určí v rovine χ.

Konštrukciu uhla priamky s rovinou, či uhla dvoch rôznobežných rovín uľahčuje nasledujúci poznatok:

Veta 4.5

a) Uhol priamky s rovinou je doplnkovým uhlom k uhlu priamky s kolmicou na túto rovinu.

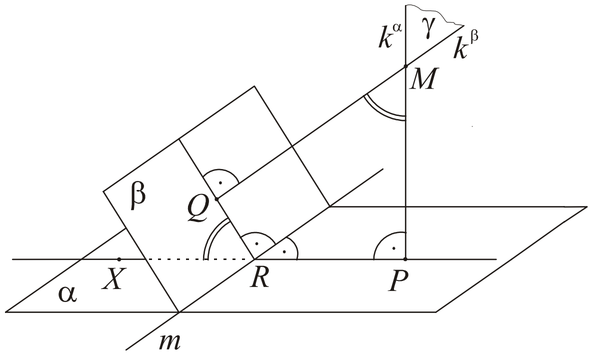
b) Uhol dvoch rovín je zhodný s uhlom priamok kolmých na tieto roviny.

Dôkaz

a) Dôkaz tvrdenia 1 sa necháva čitateľovi.

b) Nech sú α, β dané rôznobežné roviny a bod M neležiaci v žiadnej z nich. Zostrojme priamku k^α, resp. k^β incidentnú s bodom M a kolmú na rovinu α, resp. β (obr. 4.8). Priamky k^α, k^β sú zrejme navzájom rôznobežné (odôvodnite); označme ich rovinu γ. Roviny α, β, γ sú navzájom rôznobežné a platí: $k^\alpha \perp \alpha \cap \beta, k^\beta \perp \alpha \cap \beta$. To znamená, že priesečnica m rovín α a β je kolmá na rovinu γ. Z definície kolmosti priamky a roviny vyplýva, že i priesečnice $\alpha \cap \gamma$ a $\beta \cap \gamma$ sú priamky kolmé na priamku m. Z klasifikácie vzájomnej polohy troch navzájom rôznych rovín je zrejmé, že všetky tri roviny majú práve jeden spoločný bod; označme ho R. Navyše označme P, resp. Q pätu kolmice z bodu M na rovinu α, resp. β.

Útvar $MPRQ$ je tetivový štvoruholník, odkiaľ vyplýva, že uhol $\sphericalangle PRQ$ je doplnkom do priameho uhla s uhlom $\sphericalangle PMQ$. Ten istý uhol je doplnkom do priameho uhla s uhlom XRQ (podľa obr. 4.8), ktorý je zhodný s uhlom



Obr. 4.8

rovín α, β (definícia 4.4b). Teda platí: $\sphericalangle PMQ \cong \sphericalangle XRQ \Rightarrow \sphericalangle k^{\alpha} k^{\beta} \cong \sphericalangle \alpha\,\beta$, čo bolo treba dokázať.

Často sa vyskytujúcou konštrukciou v riešení stereometrických úloh je konštrukcia roviny určitých vlastností, ktorá je kolmá na inú danú rovinu. Na rozhodnutie o riešiteľnosti tejto úlohy je užitočné uviesť nevyhnutnú a dostačujúcu podmienku kolmosti dvoch rovín. Vyjadruje ju nasledujúca veta:

Veta 4.6 (kritérium kolmosti dvoch rovín)

Dve roviny sú kolmé práve vtedy, ak jedna z rovín obsahuje priamku kolmú na druhú rovinu.[25]

Dôkaz sa pre jednoduchosť zaraďuje do cvičení v závere kapitoly (cvičenie 20). Treba dokázať, že daná podmienka je nutná i dostačujúca.

Príklad 4.3. Daný je štvorsten *ABCD*, v ktorom platí: $AB \perp CD$, $AD \perp BC$. Dokážte, že potom platí aj $AC \perp BD$.

Riešenie

1. Z kolmosti priamok *AB*, *CD* vyplýva, že každou z nich prechádza práve jedna rovina, ktorá je kolmá na zvyšnú priamku. $\exists! \alpha : CD \subset \alpha \wedge \alpha \perp AB$. Priesečník priamky *AB* s rovinou α označme *P*. Zrejme platí: $DP \perp AB$, $CP \perp AB$ (odôvodnite). Analogicky z kolmosti hrán *AD*, *BC* vyplýva: $\exists! \beta : AD \subset \beta \wedge \beta \perp BC$ a pri označení $Q = \beta \cap \overleftrightarrow{BC}$ je zrejmé, že $AQ \perp BC$, $DQ \perp BC$. Priamky *CP* a *AQ* sú teda nositeľkami výšok trojuholníka *ABC*, t.j. *bod* D_1 *je jeho ortocentrum*.[26] Roviny α, β sú obe kolmé na rovinu $\overleftrightarrow{ABC}$ (odôvodnite); odtiaľ vyplýva, že aj ich priesečnica $\alpha \cap \beta = \overleftrightarrow{DD_1}$ je priamka kolmá na rovinu *ABC*.[27]

2. Na záver dokážeme kolmosť priamok *AC* a *BD*. Keďže ide o mimobežné priamky, stačí dokázať kolmosť jednej z nich na rovinu obsahujúcu zvyšnú priamku. Je to rovina BD_1D

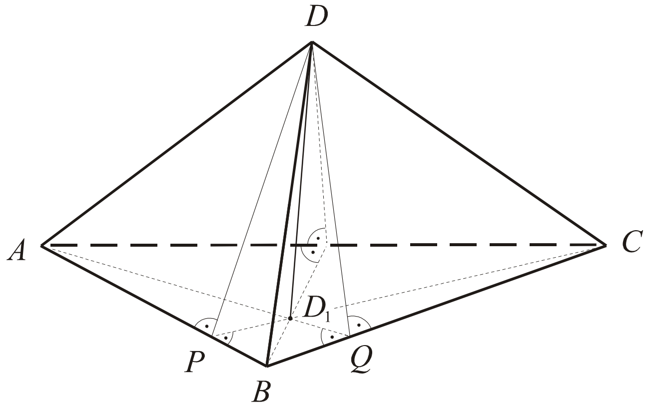
[25] Takúto priamku obsahuje prirodzene každá z rovín na seba kolmých. Stačí, ak jedna z rovín je rovnobežná s priamkou kolmou na zvyšnú rovinu (prečo?).

[26] Môže byť niektorý z bodov *P*, *Q*, D_1 vonkajším bodom trojuholníka *ABC* ? Môže byť bod D_1 bodom trojuholníka *ABC* ? Vysvetlite.

[27] Príklad 4.6, par. 4.3.

obsahujúca priamku *BD*. Priamka *AC* je kolmá na priamku BD_1 (D_1 je ortocentrum trojuholníka *ABC*). Okrem toho je priamka *AC* kolmá na priamku DD_1 ($DD_1 \perp \overleftrightarrow{ABC}$). (Obr. 4.9)

Dostačujúca podmienka kolmosti priamky *AC* a roviny BD_1D je splnená (veta 4.2.). *Záver*: $AC \perp BD$.



Obr. 4.9

Poznámka 4.6

V priebehu riešenia úlohy sme navyše dokázali, že ak sú nositeľky všetkých dvojíc mimobežných hrán štvorstena navzájom kolmé priamky, tak kolmý priemet každého vrcholu štvorstena do roviny protiľahlej steny je ortocentrum tejto steny. Aká je dostačujúca podmienka zabezpečujúca kolmosť dvoch dvojíc mimobežných hrán štvorstena? (Cvičenie 10, par.4.4)

Definícia 4.5

Osou mimobežiek a, b nazývame takú priečku priamok *a*, *b*, ktorá je kolmá na obe mimobežky.

Úloha 4.1. Zostrojte os daných dvoch navzájom mimobežných priamok *a*, *b*.

Riešenie

a) *Rozbor úlohy*

Ak priamka *r* požadovaných vlastností existuje, tak platí: (*r* je priečkou priamok *a*, *b*) a súčasne priamka *r* je kolmá na obe mimobežky *a*, *b*. Z kolmosti $r \perp a \wedge r \perp b$ vyplýva, že priamka *r* je kolmá na každú rovinu, ktorá je rovnobežná s oboma mimobežkami. Zrejmá je konštrukcia ľubovoľnej roviny α z danej osnovy navzájom rovnobežných rovín s oboma priamkami *a*, *b* i kolmice *k* na takúto rovinu. Osou *r* daných mimobežiek je teda taká ich priečka, ktorá je rovnobežná s priamkou *k*. Z rozboru úlohy je zrejmá nasledujúca konštrukcia:

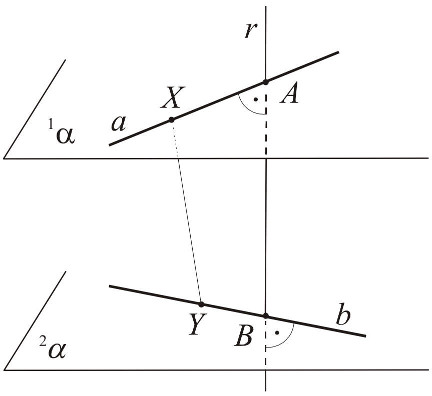
b) *Konštrukcia*

1. Zvoľme si ľubovoľný bod *M* priestoru a zostrojme priamky a', b' tak, aby: $M \in a' \cap b' \wedge a' \parallel a \wedge b' \parallel b$. Rovina $\alpha = \overleftrightarrow{a'b'}$ je rovnobežná s oboma mimobežkami *a*, *b*.
2. Zostrojíme ľubovoľnú priamku *k* tak, aby $k \perp \alpha$.
3. Zostrojíme priečku *r* priamok *a*, *b* rovnobežnú s priamkou *k* (úloha 3.5)

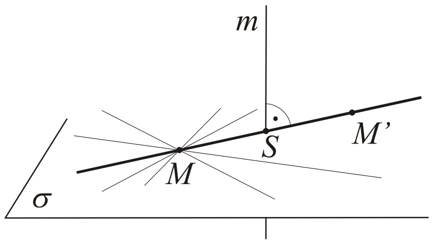
Z rozboru úlohy 3.5 je zrejmé, že každé dve mimobežné priamky majú *práve jednu* os. Označme $r \cap a = A, r \cap b = B$; dá sa dokázať, že úsečka *AB* je najmenšia spomedzi všetkých úsečiek *XY* ($X \in a, Y \in b$) (obr. 4.10)[28]. Je preto prirodzené definovať:

Definícia 4.6

Vzdialenosťou mimobežiek *a*, *b* nazývame úsečku *AB* [dĺžku úsečky *AB*], ktorá je na ich osi vyťatá oboma mimobežkami.[29]



Obr. 4.10



Obr. 4.11

Poznámka 4.7

1. Ak sú priamky *a*, *b* navzájom kolmé a priamka *r* je ich osou, platí: $(a \perp b \wedge a \perp r) \wedge (b \perp a \wedge b \perp r) \Rightarrow a \perp \overleftrightarrow{br} \wedge b \perp \overleftrightarrow{ar}$. V tomto prípade hľadaná priečka *r* leží v rovinách α, β ($b \subset \beta \wedge \beta \perp a$; $a \subset \alpha \wedge \alpha \perp b$). Os mimobežiek je priesečnicou rovín α, β.

[28] Ak označíme $^i\alpha$ (i =1,2) navzájom rovnobežné roviny, z ktorých každá obsahuje práve jednu z mimobežiek *a*, *b*, platí: $|\alpha\beta| = |AB| < |XY| \quad \forall X, Y : X \in \alpha, Y \in \beta, X \neq A, Y \neq B$ (takáto priečka je práve jedna).

[29] Platí teda: $A \in a,\ B \in b,\ AB \perp a,\ AB \perp b$.

2. Môžeme povedať, že ak sú dve priamky navzájom kolmé (rôznobežky alebo mimobežky), tak existuje práve jedna rovina obsahujúca jednu z priamok, ktorá je kolmá na zvyšnú priamku. Pri porovnaní s vetou 4.4 prichádzame k poznatku, že rovina z vety 4.4 je množinou bodov všetkých priamok, ktoré prechádzajú bodom M a sú kolmé na priamku m. V prípade $M \notin m$ je z týchto priamok rôznobežná s priamkou m práve jedna, zvyšné sú s ňou mimobežné. (Obr. 4.11) To nám poskytuje nový prístup k riešeniu nasledujúcich úloh: 1. určiť vzdialenosť bodu od priamky; 2. zostrojiť pätu kolmice z bodu na danú priamku; 3. zostrojiť bod súmerne združený s daným bodom podľa danej priamky.

Všetky z týchto úloh sú riešiteľné v rovine incidentnej s daným bodom M a danou priamkou m. V riešení týchto úloh v nejakej zobrazovacej metóde v deskriptívnej geometrii je veľmi často výhodnejší postup vyjadrený symbolicky v nasledujúcom algoritme riešenia:

a) Konštrukcia roviny σ ($M \in \sigma \wedge \sigma \perp m$) (veta 4.4).
b) Konštrukcia priesečníka S priamky m s rovinou σ.
c) Výsledkom riešenia úloh v danom poradí je: 1. $|MS|$; 2. bod S; 3. bod M': $(M'MS) = -1$.

Príklad 4.4. Zostrojte os mimobežných priamok $a = \overleftrightarrow{BD'}$, $b = \overleftrightarrow{B'C}$ a určte konštrukčne i výpočtom ich vzdialenosť pri ľubovoľne zvolenej dĺžke hrany kocky. Referenčné teleso je kocka $ABCDA'B'C'D'$.

Riešenie.

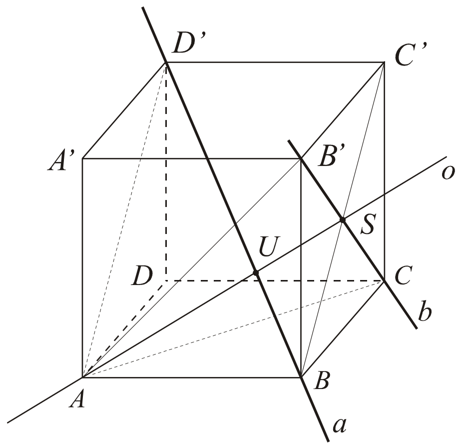
1. (*Rozbor*) V príklade 4.1a tejto kapitoly sme dokázali kolmosť telesovej uhlopriečky kocky so stenovou uhlopriečkou (navzájom mimobežných), preto na zostrojenie ich osi môžeme použiť konštrukciu z poznámky 4.7 (bod 1). Zvolíme si rovinu α tak, aby bola incidentná s priamkou a a zároveň bola kolmá na priamku b. Takouto rovinou je rovina $\overleftrightarrow{BC'D'} = \alpha$. Ďalej si zvolíme rovinu β tak, aby bola incidentná s priamkou b a zároveň bola kolmá na priamku a. Takouto rovinou je rovina $\overleftrightarrow{CB'A} = \beta$. Hľadanou osou mimobežiek a, b je priamka, ktorá je priesečnicou rovín α, β ($o = \alpha \cap \beta = \overleftrightarrow{AS}$ ($S = BC' \cap CB'$)).

2. *Konštrukcia* je zrejmá z rozboru.

3. Na záver určíme vzdialenosť oboch mimobežiek. Priesečník priamok a, o označme U. Vzdialenosť mimobežiek a, b sa rovná dĺžke úsečky US. Z riešenia polohovej úlohy (príklad

3.1) je zrejmé, že bod U je ťažiskom trojuholníka $AB'C$. Ide o rovnostranný trojuholník, ktorého strana má dĺžku $d.\sqrt{2}$ pri zvolenej dĺžke d hrany kocky.

Ťažnica (= výška) trojuholníka $AB'C$ má dĺžku $\frac{d}{2}\sqrt{6}$, odkiaľ $|US| = \frac{d}{6}\sqrt{6}$. (Na obr. 4.12 sa nerešpektuje viditeľnosť konštruovaných útvarov vzhľadom na referenčné teleso.)



Obr. 4.12

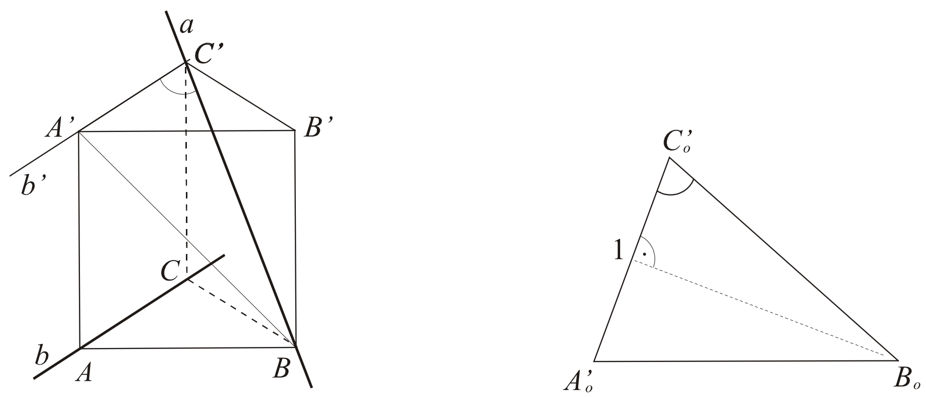
4.3 PRÍKLADY

Príklad 4.5. Zostrojte uhol zhodný s uhlom priamok BC' a AC a výpočtom určte jeho veľkosť. Referenčné teleso je pravidelný trojboký hranol $ABCA'B'C'$, ktorého stenové pravouholníky sú štvorce.

Riešenie

1. *Rozbor.* Uhol dvoch mimobežných priamok a, b je zhodný s uhlom ľubovoľných dvoch rôznobežiek a', b', pre ktoré $a' \| a$, $b' \| b$ (definícia 4.1a). Nech $\overleftrightarrow{BC'} = a$, $\overleftrightarrow{AC} = b$. Potom platí: $\sphericalangle a\,b \cong \sphericalangle a\,b'$ ($C' \in b'$, $b' \| b$) (obr. 4.13).

2. *Konštrukcia.* Uhol priamok a, b' zostrojíme v rovine $A'BC'$, je ním vnútorný uhol pri vrchole C' v rovnoramennom trojuholníku $A'BC'$ s temenom B ($BA' \cong BC'$).



Obr. 4.13

3. *Výpočet.* Nech bod 1 je stredom základne $A'C'$ trojuholníka $A'BC'$. Potom platí: $|C'1| = a/2$ (*a* je dĺžka podstavnej hrany telesa), $|BC'| = a\sqrt{2}$, a po označení $\alpha = |\sphericalangle 1C'B|$ dostaneme $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ alebo $\alpha = \arccos\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Príklad 4.6. Nech pre roviny $\alpha, \beta \neq \alpha$ platí: $\alpha \perp \gamma$, $\beta \perp \gamma$. Potom sú roviny α, β alebo rovnobežné alebo je ich priesečnica kolmá na rovinu γ. Dokážte.

Riešenie.

a) Ak sú dve roviny navzájom kolmé, tak priamka kolmá na jednu z nich je rovnobežná so zvyšnou rovinou (veta 4.6). Teda ak označíme *m* ľubovoľnú priamku, ktorá je kolmá na rovinu γ, platí: $m \parallel \alpha \wedge m \parallel \beta$. Dve rôzne roviny rovnobežné s tou istou priamkou môžu byť navzájom *rovnobežné* alebo *rôznobežné*.

b) V prípade rôznobežných rovín α, β z platnosti $m \parallel \alpha$, $m \parallel \beta$ vyplýva podľa príkladu 3.5, že priesečnica rovín α, β je priamka rovnobežná s priamkou *m*. Ale kolmosť priamky *m* na rovinu γ implikuje i kolmosť ľubovoľnej s ňou rovnobežnej priamky na tú istú rovinu. Platí teda: $(\alpha \cap \beta) \perp \gamma$. Tvrdenie je dokázané.

Príklad 4.7. Dokážte, že všetky výšky štvorstena *ABCD* z príkladu 4.3 prechádzajú jedným bodom.

Riešenie

a) Podľa príkladu 4.3 (poznámka 4.6) sú výšky uvažovaného štvorstena *ABCD* (tj. štvorstena, v ktorom sú navzájom kolmé všetky dvojice mimobežných hrán) priamky spájajúce vrchol štvorstena s ortocentrom steny protiľahlej k tomuto vrcholu. Pri štandardnom označení[30] výšok štvorstena platí: $v^A = \overleftrightarrow{AA_o}$, $v^B = \overleftrightarrow{BB_o}$, $v^C = \overleftrightarrow{CC_o}$, $v^D = \overleftrightarrow{DD_o}$, kde index nula označuje ortocentrum steny protiľahlej k rovnomennému vrcholu telesa. V prvom kroku dokážeme, že každé dve výšky štvorstena sú navzájom rôznobežné.

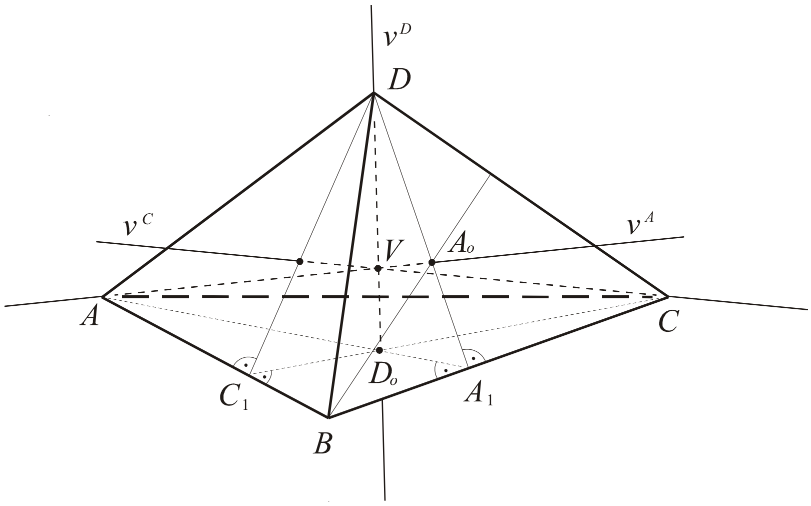
Uvažujme napr. o výškach v^A, v^D. Z konštrukcie ortocentra trojuholníka *ABC* ($D_o = \overleftrightarrow{AA_1} \cap \overleftrightarrow{CC_1}$, kde A_1, C_1 sú päty výšok trojuholníka *ABC* na priamkach *BC* a *AB*) a

[30] Index každej výšky je označenie vrcholu telesa, ktorý je s ňou incidentný. Pod výškou štvorstena sa rozumie tak priamka incidentná s vrcholom telesa a jeho kolmým priemetom do roviny protiľahlej steny, ako aj úsečka s krajnými bodmi v týchto bodoch.

vlastností daného štvorstena vyplýva: $\overleftrightarrow{ADA_1} \perp BC$, tj. $DA_1 \perp BC$ a následne $A_o \in \overleftrightarrow{DA_1}$. Obe výšky v^D, v^A štvorstena teda ležia v rovine AA_1D. Pretože $v^D \nparallel v^A$ (odôvodnite) platí: $v^D \cap v^A = \{V\}$. Analogickým spôsobom možno dokázať, že každé dve výšky daného štvorstena sú navzájom rôznobežné.

b) Ďalej dokážeme, že i výšky v^C a v^B prechádzajú bodom *V*. Dokážeme to napríklad pre priamku v^C; stačí dokázať, že priamka *CV* je kolmá na rovinu *ABD* (prečo?). Pre priamku *CV* platí: $\overleftrightarrow{CV} \subset \overleftrightarrow{CC_1D} \wedge \overleftrightarrow{CV} \subset \overleftrightarrow{ACV}$. Ale rovina CC_1D je kolmá na priamku *AB*, odkiaľ vyplýva $\underline{CV \perp AB}$. Analogicky o rovine *ACV* dokážeme, že je kolmá na priamku *BD*. Vyplýva to z kolmostí: $AC \perp BD$ a $AV \perp BD$ (dôsledok kolmosti $AV \perp \overleftrightarrow{BCD}$). Potom platí aj $\underline{CV \perp BD}$. Dôsledkom oboch kolmostí: $CV \perp AB$, $CV \perp BD$ je kolmosť priamky *CV* na rovinu steny *ABD*, čo bolo třeba dokázať. (Obr. 4.14)

Dôkaz pre priamku v^B je analogický; platí teda: $v^A \cap v^B \cap v^C \cap v^D = \{V\}$.



Obr. 4.14

Poznámka 4.8. Bod, v ktorom sa pretínajú všetky výšky štvorstena, sa nazýva *ortocentrum* daného štvorstena a každý štvorsten, ktorého výšky prechádzajú tým istým bodom budeme nazývať *ortocentrickým štvorstenom*.

4.4 CVIČENIA

1. Priamka kolmá na rovinu je s touto rovinou rôznobežná. Dokážte.

2. Priamka kolmá na dve rôznobežky danej roviny je s touto rovinou rôznobežná. Dokážte.

3. Zostrojte uhol vypísaných dvojíc priamok: $A'C, BC'$; BC', CA'; BC', DF'; BC', CE'. Základné teleso je pravidelný šesťboký hranol $ABC...F'$, $a = 5j$, $v = 6j$.

4. Konštrukčne i výpočtom určte vzdialenosť vrchola C kocky od roviny BDC'. Dĺžku hrany kocky si zvoľte ľubovoľne.

5. Dokážte, že v kocke $ABCD...D'$ platí: $ADK \perp BCL$, kde $(AA'L) = (A'B'K) = -1$.

6. a) Konštrukčne i výpočtom určte uhly telesovej uhlopriečky kocky s jej hranami a stenami.

b) V kocke $ABCD...D'$ určte veľkosť uhla dvojíc rovín: $AB'D', AA'C$; $AB'D', A'BC$.

7. Načrtnite pätu kolmice z vrchola D štvorstena $ABCD$ do roviny ABC, ak uhol ABC je pravý a $AD \cong BD \cong CD$. (Návod: príklad 4.2)

8. Daný je štvorsten $ABCD$, v ktorom platí: $AB \perp CD$, $AD \perp BC$. Potom platí:

a) $|AB|^2 + |CD|^2 = |AC|^2 + |BD|^2 = |AD|^2 + |BC|^2$

b) Pravouhlý priemet ľubovoľného vrchola do roviny protiľahlej steny je ortocentrum tejto steny.

Poznámka: Pred riešením úlohy a) zistite, čo je množina všetkých bodov priestoru $\boldsymbol{E}$, pre ktoré je rozdiel štvorcov vzdialeností od dvoch daných bodov $A, B \neq A$ konštantný.

9. a) Popíšte konštrukciu ortocentrického štvorstena (príklad 4.7), ak $ABC \subset \alpha$ je ľubovoľný trojuholník. Koľko takých štvorstenov existuje?

b) Daný je ľubovoľný trojuholník $ABC \subset \alpha$ a rovina β ($\beta \neq \alpha$). Popíšte konštrukciu štvorstena $ABCD$ s navzájom kolmými mimobežnými hranami tak, aby vrchol D ležal v danej rovine β.

10. Daný je štvorsten $ABCD$, v ktorom jedna z jeho výšok prechádza ortocentrom protiľahlej steny ku zvolenému vrcholu (s touto výškou incidentnému). Dokážte, že všetky dvojice mimobežných hrán štvorstena sú navzájom kolmé.[31]

11. Daný je obraz pravidelného štvorstena $ABCD$ (vo voľnom rovnobežnom premietaní). Narysujte obraz jeho ortocentra.

[31] Na základe príkladu 4.3 stačí dokázať kolmosť dvoch dvojíc navzájom mimobežných hrán.

12. Daný je pravidelný štvorsten *ABCD*. Určte (konštrukčne i výpočtom) polomer *R*, resp. *r* guľovej plochy danému štvorstenu opísanej, resp. do daného štvorstena vpísanej pri zvolenej dĺžke *a* hrán štvorstena.

13. Nech α a π sú rôznobežné roviny a *k* je priamka kolmá na rovinu α. Potom platí: pravouhlý priemet priamky *k* do roviny π je kolmý na priesečnicu $\alpha \cap \pi$. Dokážte.

14. Daný je kváder $ABCD...D'$, $|AB| = 5j, |BC| = 4j, |AA'| = 7j$. Konštrukčne určte uhol priamok BD', $B'C$.

15. Zostrojte uhol zhodný s uhlom priamky *a* s rovinou $\overleftrightarrow{ABC}$ a rovinou steny $BCC'B'$ pre priamku *a* a pravidelný šesťboký hranol z príkladu 3.11.

16. Napíšte algoritmus riešenia nasledujúcich úloh. Zostrojte:

a) priamku, ktorá prechádza daným bodom *A*, je kolmá na danú priamku *a* a je rovnobežná s danou rovinou α;

b) priamku, ktorá prechádza daným bodom *A*, je kolmá na danú priamku *a* a je rôznobežná s danou priamkou *b* (priamky *a*, *b* nie sú navzájom rovnobežné);

c) priamku, ktorá leží v rovine α, prechádza bodom *M* roviny α a je kolmá na danú priamku *a*;

d) kocku, ktorá má vrchol v danom bode *A* a telesovú uhlopriečku na danej priamke *p* ($A \notin p$);

e) kocku, ktorá má stred v danom bode *S* a jednu hranu na danej priamke *m* ($S \notin m$);

f) pravidelný štvorboký ihlan, pre ktorý je daný rovnoramenný trojuholník *AVB* stenou;

g) pravidelný osemsten, ktorý má vrchol v danom bode *A* a telesovú uhlopriečku na danej priamke *p* ($A \notin p$);

h) pravidelný štvorsten, ak *p*, *q* sú mimobežné priamky incidentné s hranami telesa.

17. Daná je kocka $ABCD...D'$. Zvoľte si ľubovoľný pravidelný štvorsten, ktorého vrcholy sú i vrcholmi kocky. Vypočítajte objem tohto štvorstena, ak dĺžka hrany kocky je *a*. Vyjadrite kocku ako zjednotenie tohto štvorstena a ďalších štvorstenov tak, aby prienik vnútorných bodov ľubovoľných dvoch prvkov zjednotenia bol prázdna množina.

18. Analogickú úlohu k úlohe 17 riešte pre kváder. Hrany zvoleného štvorstena (nie pravidelného) sú stenové uhlopriečky kvádra.

19. Daná je kocka $ABCD...D'$ a rovina *KLM*. Zostrojte vzdialenosť vrchola B' kocky od tejto roviny.

a) $K = A, L = C, (DD'M) = -1$.

b) $M = D', (ABK) = (BCL) = -1$.

c) $(DD'M) = -3, (ABK) = -1, (BCL) = -2$.

20. Dokážte vetu: Dve roviny sú kolmé práve vtedy, ak jedna z rovín obsahuje priamku kolmú na druhú rovinu.

21. Daný je pravidelný štvorsten *ABCD*. Zobrazte priamku prechádzajúcu ľubovoľne zvoleným bodom *P* steny *ABD* a kolmej na rovinu steny *BCD* štvorstena.

22. Konštrukčne i výpočtom určte vzdialenosť bodu *P* od roviny *BCD* pre štvorsten *ABCD* a bod *P* z cvičenia 21.

23. Zostrojte osi mimobežných priamok a) BD', CC'; b) $AB', A'D'$, ak referenčné teleso $ABCDA'B'C'D'$ je kocka.

24. Nech sú dané tri navzájom rovnobežné priamky *k*, *l*, *m* ($k \parallel l \parallel m$), ktoré neležia v jednej rovine. Označme *K* ľubovoľný bod priamky *k* a *L*, *M* päty kolmíc *KL*, *KM* zostrojených z bodu *K* na priamky *l*, *m*. Dokážte, že úsečka LM určuje vzdialenosť priamok *l*, *m*.

25. Nech je *ABCD* rovnobežník, ktorého stred je bod *O*; mimo roviny ρ rovnobežníka je daný bod *V*, pre ktorý platí: $VA \cong VC, VB \cong VD$. Dokážte, že platí: $OV \perp \rho$.

26. Je daný bod *M* a dve priamky *m*, *n*. Bodom *M* zostrojte priamku *k*, ktorá je kolmá na priamku *m* a pretína priamku *n*.

a) Určte podmienku riešiteľnosti.

b) Úlohu vyriešte v ľubovoľnom kvádri $ABCDA'B'C'D'$ pre $M = D'$, $m = \overleftrightarrow{AB'}$, $n = \overleftrightarrow{BD}$. Zvoľte si stenu $ABB'A'$ v priečelnej polohe.

27. Na priamke *a* ležia tri rôzne body *P*, *Q*, *R*, ktorých vzdialenosti od danej roviny ρ sa rovnajú. Dokážte, že priamka *a* je s rovinou ρ rovnobežná. (Uvážte, že aspoň dva z bodov *P*, *Q*, *R* ležia v tom istom polpriestore s hranicou v rovine ρ .)

28. Dve roviny sú navzájom rovnobežné práve vtedy, keď sa rovnajú orientované vzdialenosti všetkých bodov jednej z rovín od druhej roviny. Dokážte.

29. Určte množinu všetkých bodov, ktorých vzdialenosť od danej roviny ρ sa rovná zvolenému kladnému reálnemu číslu *d*.

30. Nech je daná priamka *a* a rovina ρ, ktoré sú navzájom rôznobežné, ale nie navzájom kolmé. Označme a_o pravouhlý priemet priamky *a* do roviny ρ a *x* ľubovoľnú ďalšiu priamku roviny ρ prechádzajúcu priesečníkom $P = a \cap \rho$. Dokážte, že ostrý uhol priamok *a*, *x* je väčší než ostrý uhol priamok *a*, a_o.

31. Zostrojte priamku *k* prechádzajúcu vrcholom A' kocky $ABCDA'B'C'D'$ a kolmú na rovinu $\alpha = \overleftrightarrow{HKL}$. Body H, K, L sú v danom poradí vnútorné body hrán AA', $A'B'$, $A'D'$. Zostrojte i priesečník $k \cap \alpha$.

32. Nech sú dané dve navzájom kolmé roviny ρ, σ a ich priesečnica *p*. Zvoľme si v rovine ρ ľubovoľnú priamku *r* kolmú na priamku *p*. Dokážte, že platí: $r \perp \sigma$.

33. Nech je daný trojuholník *ABC* a mimo jeho roviny ρ bod *V* tak, že platí $VA \cong VB \cong VC$. Dokážte, že päta V_1 kolmice z bodu *V* na rovinu ρ je stredom kružnice opísanej trojuholníku *ABC*.

34. Daný je štvorsten *ABCD*, pre ktorý platí: $|VA| = |VB| = |VC| = v$ a *ABC* je pravouhlý trojuholník, ktorého prepona má dĺžku *c*. Konštrukčne i výpočtom určte vzdialenosť bodu *V* od roviny $\overleftrightarrow{ABC}$.

35. Vo štvorstene *ABCD* platí: *ABC* je pravouhlý trojuholník ($a = |BC|$, $b = |AC|$) a výška v^D prechádza stredom *S* prepony *AB* a $|DS| = v$. Konštrukčne i výpočtom určte dĺžky všetkých hrán telesa.

36. Prienik klina s rovinou, ktorá je rôznobežná s hranou klina, je dutý uhol. Dokážte.

37. Dĺžka podstavnej hrany pravidelného štvorbokého ihlana sa rovná 4*j* a dĺžka bočnej hrany 7*j*. Určte uhol klina, ktorého steny obsahujú dve susedné bočné steny ihlana. Určte uhol zhodný s uhlom rovín bočných susedných i protiľahlých stien telesa (konštrukčne i výpočtom).

38. Súčet uhlov trojhranu je väčší než priamy uhol. Dokážte.[32]

39. Pravidelný trojhran je trojhran, ktorý má všetky strany navzájom zhodné. Dokážte, že uhly pravidelného trojhranu sú tiež navzájom zhodné.

[32] Pojem trojhranu možno nájsť v paragrafe 5.1 poslednej kapitoly práce.

5 DODATKY

5.1 ZÁKLADNÉ PRIESTOROVÉ ÚTVARY, PLOCHY A TELESÁ

Analogicky s planimetriou, kde sa medzi prvými geometrickými útvarmi definujú polpriamka, polrovina, uhol, trojuholník a mnohouholník (spolu so všetkými súvisiacimi pojmami) a odvodzujú ich vlastnosti nevyhnutné pre ďalšie rozvíjanie geometrie euklidovskej roviny, zavedieme pred definovaním základných stereometrických telies (hranol/ihlan, valec/kužeľ, guľová plocha, guľa) pojmy *polpriestor*, *klin* a *trojhran*.

Vzhľadom na zameranie práce a význam i dôležitosť výučby stereometrie predovšetkým na stredných školách všetkých typov sa ohraničíme na konvexné telesá a ich najdôležitejšie vlastnosti. Po vymedzení pojmu toho-ktorého telesa/plochy pôjde o skúmanie ich vzájomnej polohy s rovinami a priamkami a konštrukcie styčných/dotykových rovín príslušných plôch telesám prislúchajúcich, ktoré majú určitú predpísanú vlastnosť. Nejde o samoúčelné konštrukcie; ich dôležitosť sa ukáže pri zobrazovaní základných telies vo voľnom rovnobežnom premietaní a v zobrazovacích metódach deskriptívnej geometrie. Voľnému rovnobežnému premietaniu je venovaný posledný paragraf 5.2 tejto diplomovej práce.

5.1.1 Polpriestor, klin, trojhran

Definícia 5.1

a) Hovoríme, že rovina α leží medzi bodmi A, B, ak existuje bod roviny α ležiaci medzi bodmi A a B (označenie: $\alpha \,\mathrm{m}\, AB$); v opačnom prípade hovoríme, že rovina α neleží medzi bodmi A, B.

b) Nech je $\alpha \subset \boldsymbol{E_3}$ ľubovoľná rovina a A ľubovoľný bod s ňou neincidentný. Množinu všetkých bodov M priestoru, pre ktoré platí: rovina α neleží medzi bodmi A, M, budeme nazývať *polpriestor* (αA) *a budeme ho označovať* $\overset{\mapsto}{\alpha A}$.[33] Rovina α sa nazýva *hranicou* alebo hraničnou rovinou polpriestoru $\overset{\mapsto}{\alpha A}$. Všetky body polpriestoru nepatriace rovine α sa nazývajú jeho *vnútornými bodmi* a množina všetkých vnútorných bodov tohto polpriestoru sa nazýva *vnútro polpriestoru* $\overset{\mapsto}{\alpha A}$ alebo *otvorený polpriestor* (označenie: $\overset{\mapsto}{\alpha A}^{\mathrm{o}}$). Množina

[33] Z definície je zrejmé, že do polpriestoru $\overset{\mapsto}{\alpha A}$ patria aj všetky body roviny α a samotný bod A.

bodov, ktorá je doplnkom otvoreného polpriestoru $\overset{\mapsto}{\alpha A}{}^{o}$ v priestore $\boldsymbol{E_3}$ sa nazýva *polpriestor opačný k polpriestoru* $\overset{\mapsto}{\alpha A}$.

Z definície priamo vyplývajú nasledujúce vlastnosti:

Veta 5.1

a) Ak je bod *B* vnútorným bodom polpriestoru $\overset{\mapsto}{\alpha A}$, tak platí: $\overset{\mapsto}{\alpha A} = \overset{\mapsto}{\alpha B}$.

b) Polpriestor $\overset{\mapsto}{\alpha A}$ je konvexným útvarom.[34]

c) Každá rovina α rozdeľuje priestor na dve konvexné oblasti. Ak bod *A* neleží v rovine α, týmito oblasťami sú otvorený polpriestor $\overset{\mapsto}{\alpha A}{}^{o}$ a polpriestor k nemu opačný.

V planimetrii euklidovskej roviny je analogické tvrdenie k bodu c axiómou. V stereometrii možno tvrdenie c dokázať. Ide o závažné tvrdenie, ktoré však s ohľadom na rozsah a zameranie práce dokazovať nebudeme. Keďže v dôkaze pôjde vždy o vzájomnú polohu dvojice bodov *A*, *B* ($B \neq A$) vzhľadom na rovinu α, jednotlivé kroky dôkazu sú planimetrickými konštrukciami v ľubovoľnej rovine, ktorá obsahuje priamku *AB*. To isté platí o dôkazoch nasledujúcich tvrdení:

Veta 5.2

a) Dve rôznobežné roviny rozdeľujú priestor na štyri konvexné oblasti.

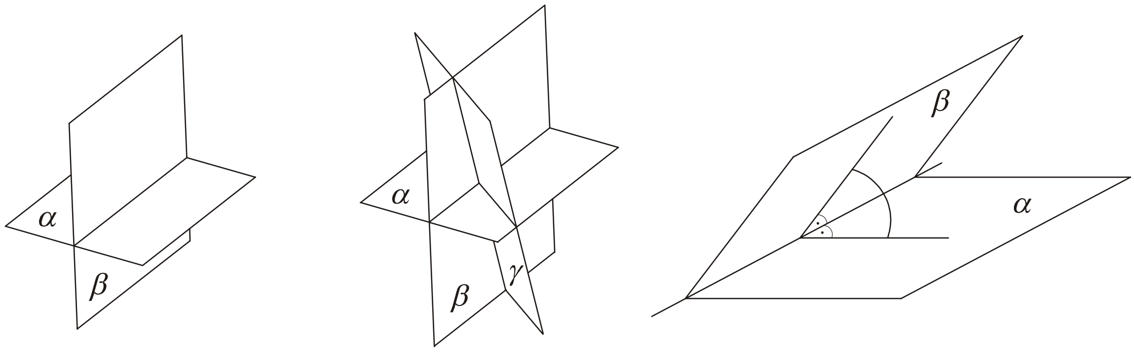
b) Tri roviny, ktoré majú spoločný práve jeden bod, rozdeľujú priestor na osem konvexných oblastí.

Definícia 5.2

Dvojicu polrovín, ktoré majú spoločnú hranicu a neincidujú s tou istou rovinou, nazývame *klinom*. Spoločná hranica polrovín sa nazýva *hrana klinu*, obe polroviny sú *stranami klinu*. Pod *uhlom klinu* budeme rozumieť uhol, ktorého ramená sú prienikom ľubovoľnej roviny kolmej na hranu klinu s jeho stranami. Pod bodmi, ktoré patria klinu,

[34] Definíciu konvexného (vypuklého) geometrického útvaru v priestore $\boldsymbol{E_3}$ možno bez akejkoľvek zmeny prevziať z planimetrie ([15], str. 10). Analogicky preberieme pojmy *oblasť* a rozdelenie priestoru geometrickým útvarom $\boldsymbol{U}$ na k ($k \in N, k \geq 2$) konvexných oblastí (tamtiež, str. 14); tiež pojem *n*-uholníka sa prirodzeným spôsobom rozšíri na pojem priestorového *n*-uholníka.

budeme rozumieť všetky body oboch polrovín. Klin, ktorého stranami sú polroviny $\overset{\mapsto}{\alpha}$, $\overset{\mapsto}{\beta}$ budeme označovať $\angle \overset{\mapsto}{\alpha}\overset{\mapsto}{\beta}$. (Obr. 5.1c)



Obr. 5.1 a - c

Uhol klinu je zrejme nezávislý od výberu jeho vrcholu. Základnú vlastnosť klinu vyjadruje nasledujúca veta:

Veta 5.3

Klin rozdeľuje priestor na dve oblasti, z ktorých jedna je konvexná a druhá nekonvexná.

Poznámka 5.1

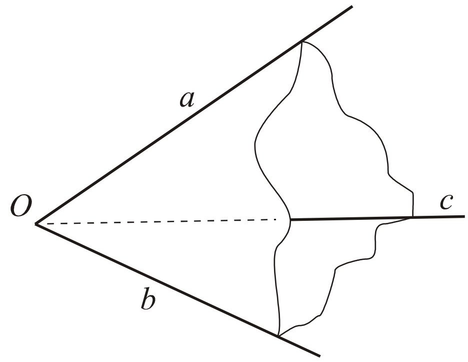
1. Konvexnú oblasť z vety 5.3 môžeme analogicky ako v prípade uhla v rovine nazvať *vnútrom konvexného klinu* a nekonvexnú oblasť *vnútrom nekonvexného klinu*, určených tými istými stranami. Vzhľadom na poznámku v úvode paragrafu sa bude všade ďalej pod pojmom klin rozumieť klin s konvexným vnútrom. Tento možno vyjadriť pomocou prieniku dvoch polpriestorov, hraničné roviny ktorých obsahujú (po jednom) práve jednu z jeho strán.
2. Dôkaz vety 5.3 je celkom analogický s dôkazom planimetrickej vety o nenulovom uhle, ktorý nie je priamym uhlom.

Ďalej uvedieme definíciu trojhranu a všimneme si analogickú vlastnosť s trojuholníkom v rovine.

Definícia 5.3

a) Nech sú $\overset{\mapsto}{a}$, $\overset{\mapsto}{b}$, $\overset{\mapsto}{c}$ ľubovoľné tri nekolineárne polpriamky so spoločným začiatkom O. Zjednotenie daných polpriamok a vnútra každého z troch konvexných uhlov $\sphericalangle \overset{\mapsto}{a}\overset{\mapsto}{b}^{o}$, $\sphericalangle \overset{\mapsto}{a}\overset{\mapsto}{c}^{o}$ a $\sphericalangle \overset{\mapsto}{b}\overset{\mapsto}{c}^{o}$ sa nazýva *trojhran*.

b) Bod O nazývame *vrcholom* trojhranu, každú z polpriamok $\overset{\mapsto}{a}$, $\overset{\mapsto}{b}$, $\overset{\mapsto}{c}$ *hranou trojhranu* a každý z konvexných uhlov $\sphericalangle \overset{\mapsto}{a}\overset{\mapsto}{b}$, $\sphericalangle \overset{\mapsto}{a}\overset{\mapsto}{c}$ a $\sphericalangle \overset{\mapsto}{b}\overset{\mapsto}{c}$ *stranou trojhranu*. Stranu trojhranu s jej vnútrom budeme nazývať *stenou trojhranu* a uhly klinov, v ktorých ležia dvojice stien budú *uhly trojhranu pri príslušnej hrane* ležiacej v týchto stenách.



Obr. 5.2

Z definície sú zrejmé nasledujúce vlastnosti trojhranu:

1. Súčet veľkostí všetkých strán trojhranu je menší než 360°.

2. Súčet veľkostí všetkých uhlov trojhranu je väčší než 180° a menší než 540°.

Základná vlastnosť trojhranu je vyjadrená v nasledujúcej vete:

Veta 5.4

Trojhran rozdeľuje priestor na dve oblasti, z ktorých jedna je konvexná a druhá nekonvexná.

Ak sú $\overset{\mapsto}{a}$, $\overset{\mapsto}{b}$, $\overset{\mapsto}{c}$ hrany trojhranu, tak príslušná konvexná oblasť je prienikom vnútra troch polpriestorov: $\overset{\mapsto}{\alpha A}{}^{o} \cap \overset{\mapsto}{\beta B}{}^{o} \cap \overset{\mapsto}{\gamma C}{}^{o}$, kde $\overset{\mapsto}{b}\overset{\mapsto}{c} \subset \alpha \wedge A \in \overset{\mapsto}{a}{}^{o}$; $\overset{\mapsto}{a}\overset{\mapsto}{c} \subset \beta \wedge B \in \overset{\mapsto}{b}{}^{o}$; $\overset{\mapsto}{a}\overset{\mapsto}{b} \subset \gamma \wedge C \in \overset{\mapsto}{c}{}^{o}$. Túto oblasť môžeme nazvať vnútrom daného trojhranu (všetky jej body sú jeho vnútornými bodmi). Dôkaz vety 5.4 sa robiť nebude; čitateľ ho môže nájsť v [11]. S pojmom mnohohranu (n-hranu) a vlastnosťami konvexných mnohohranov sa možno oboznámiť v [11].

5.1.2 Hranolová plocha. Vzájomná poloha plochy s priamkou a rovinou. Hranol

Definícia 5.4

Nech je P_n ľubovoľný n-uholník roviny α a l ľubovoľná priamka rôznobežná s touto rovinou. Množinu bodov všetkých priamok rovnobežných s priamkou l a pretínajúcich

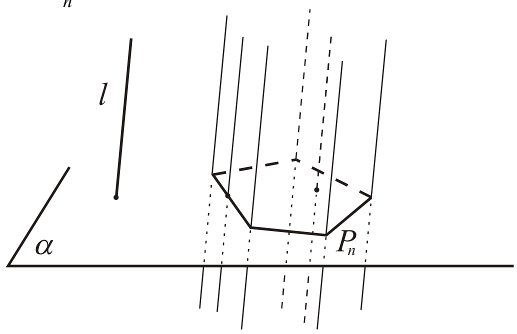
n-uholník P_n [n-uholník P_n a jeho vnútro] nazývame *n-boká hranolová plocha* [*n-boký hranolový priestor*]. (Obr. 5.3)

a) n-uholník P_n sa nazýva *určujúcim n-uholníkom* plochy.

b) *Tvoriacimi priamkami* hranolovej plochy nazývame všetky priamky rovnobežné s priamkou l patriace ploche.

c) *Hranou plochy* nazývame tvoriacu priamku incidentnú s vrcholom určujúceho n-uholníka a s*tenou plochy* označujeme množinu bodov všetkých tvoriacich priamok pretínajúcich jednu stranu určujúceho n-uholníka P_n.

d) Každú priamku [rovinu] rovnobežnú s priamkou l budeme nazývať o*snovovou priamkou* [*osnovovou rovinou*] hranolovej plochy. Každú rovinu kolmú na tvoriace priamky plochy nazývame *normálovou rovinou* plochy.



Obr. 5.3

Poznámka 5.2

1. Z definície konvexného útvaru je zrejmé, že hranolový priestor je konvexným, resp. nekonvexným útvarom práve vtedy, keď je určujúci n-uholník plochy konvexný, resp. nekonvexný. (Dôkaz je triviálny a necháva sa čitateľovi.) Niekedy hovoríme i hranolovej ploche prislúchajúcej konvexnému n-uholníku konvexná hranolová plocha, i keď táto plocha je zrejme nekonvexným útvarom. Všade ďalej budeme brať do úvahy len konvexné určujúce n-uholníky hranolovej plochy, či priestoru.

2. Hranolová plocha s určujúcim n-uholníkom P_n v rovine α a osnovovou priamkou l sa bude označovať symbolom $\boldsymbol{H_n}(P_n \subset \alpha\,; l)$; analogicky budeme označovať príslušný hranolový priestor $\overline{H}_n(P_n \subset \alpha\,; l)$.

Bez dôkazu uvedieme nasledujúcu vlastnosť „konvexných“ hranolových plôch:

Veta 5.5

Každá „konvexná“ hranolová plocha rozdeľuje priestor na dve oblasti, z ktorých jedna je konvexná a druhá nekonvexná.

Definícia 5.5

Každý bod konvexnej oblasti z vety 5.5 sa nazýva *vnútorným bodom hranolovej plochy* $\boldsymbol{H_n}$/hranolového priestoru $\overline{H}_n$. Všetky zvyšné body priestoru nepatriace ploche $\boldsymbol{H_n}$ budeme nazývať vonkajšími bodmi plochy $\boldsymbol{H_n}$/priestoru $\overline{H}_n$. Množina všetkých vnútorných bodov hranolovej plochy sa nazýva vnútrom hranolovej plochy.

Veta 5.6

Osnovová rovina β má s hranolovou plochou $\boldsymbol{H_n}(P_n \subset \alpha;\ l)$ jednu z nasledujúcich vzájomných polôh:

a) nemá s plochou žiaden spoločný bod;
b) obsahuje práve jednu hranu plochy;
c) obsahuje stenu plochy;
d) má s plochou spoločné práve dve tvoriace priamky.

Dôkaz

Rovina β je osnovová rovina, t.j. je rovnobežná s priamkou l, je teda zrejmé, že roviny α, β sú navzájom rôznobežné a existuje priesečnica týchto dvoch rovín. Rovina β je množinou bodov všetkých priečok priamky ($\alpha \cap \beta$) rovnobežných s priamkou l a hranolová plocha $\boldsymbol{H_n}$ je množinou bodov všetkých priečok n-uholníka P_n rovnobežných s priamkou l. Je zrejmé, že rovina β je incidentná s priamkou ($\alpha \cap \beta$). Na to, aby sme zistili vzájomnú polohu roviny β s hranolovou plochou $\boldsymbol{H_n}$, stačí zistiť vzájomnú polohu priamky ($\alpha \cap \beta$) s určujúcim n-uholníkom plochy $\boldsymbol{H_n}$. Priamka ($\alpha \cap \beta$) je v obrázkoch 5.4 a-d označená p.

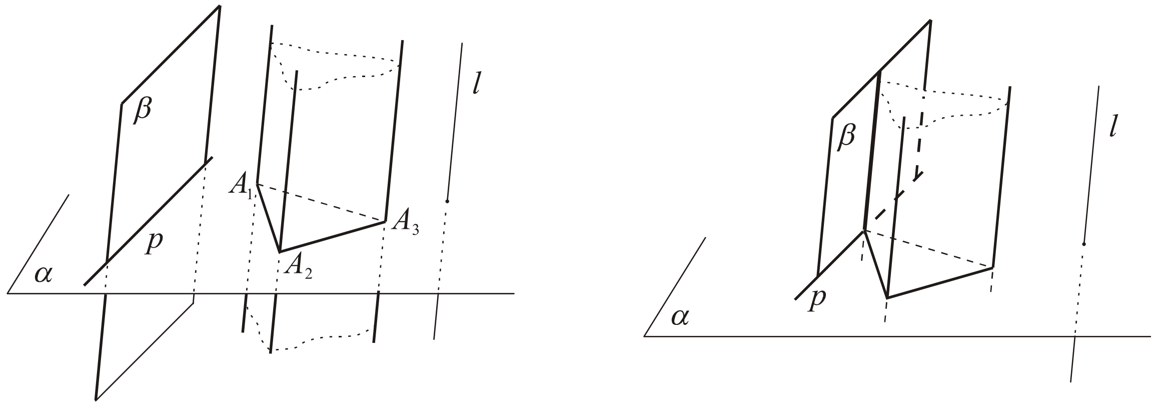
a) Ak priamka ($\alpha \cap \beta$) nemá s určujúcim n-uholníkom žiaden spoločný bod, je zrejmé, že ani rovina β incidentná s priamkou ($\alpha \cap \beta$) a rovnobežná s priamkou l nemá s hranolovou plochou žiaden spoločný bod. (Obr. 5.4 a)

$((\beta \cap \alpha) \cap P_n = \emptyset \Rightarrow \beta \cap \boldsymbol{H_n} = \emptyset)$

b) Ak priamka ($\alpha \cap \beta$) má s určujúcim n-uholníkom spoločný práve jeden bod, t.j. je styčnou priamkou n-uholníka obsahujúcou len jeho vrchol[35], je zrejmé, že rovina β má s hranolovou plochou spoločnú práve jednu tvoriacu priamku incidentnú s týmto bodom, t.j. práve jednu hranu plochy. (Obr. 5.4 b)

[35] Priamka sa nazýva styčnou priamkou rovinného n-uholníka, ak má s týmto n-uholníkom spoločný práve jeden vrchol alebo práve jednu zo strán.

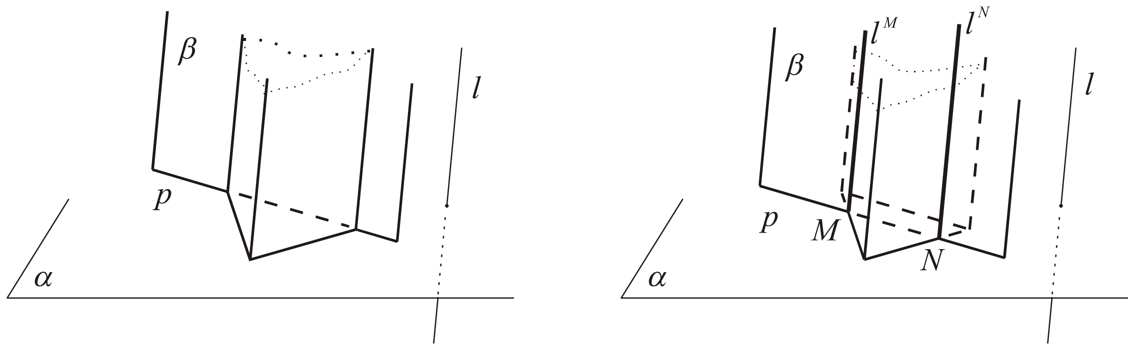
$$((\beta \cap \alpha) \cap P_n = \{A_i\} \Rightarrow \beta \cap \boldsymbol{H_n} = \{l^{A_i}\}, (i \in \{1,...,n\}))$$



Obr. 5.4 a, b

c) Ak priamka ($\alpha \cap \beta$) má s určujúcim *n*-uholníkom spoločnú stranu daného *n*-uholníka, je zrejmé, že rovina β má s hranolovou plochou spoločnú množinu tvoriacich priamok incidentných s touto stranou určujúceho *n*-uholníka, t.j. jednu stenu hranolovej plochy incidentnú s danou stranou určujúceho *n*-uholníka. (Obr. 5.4 c)

$$((\beta \cap \alpha) \cap P_n = \{A_i A_{i+1}\} \ (i \in \{1,...,n\}; A_{n+1} = A_1))$$



Obr. 5.4 c, d

d) Môže nastať posledná z možností, a to, že priamka ($\alpha \cap \beta$) má s určujúcim *n*-uholníkom spoločné práve dva navzájom rôzne body. Vtedy má osnovová rovina s danou hranolovou plochou $\boldsymbol{H_n}$ spoločné práve dve tvoriace priamky incidentné s týmito bodmi. Spomenuté body nemusia, no môžu byť (nesusednými) vrcholmi *n*-uholníka P_n alebo jeden z nich je vrcholom alebo žiaden. Potom osnovová rovina obsahuje v danom poradí dve (nesusedné) hrany plochy alebo jednu hranu a tvoriacu priamku, ktorá nie je hranou alebo dve tvoriace priamky, ktoré nie sú hranami plochy. (Obr. 5.4 d)

$$((\beta \cap \alpha) \cap P_n = \{M, N \neq M\} \ \Rightarrow \beta \cap \boldsymbol{H_n} = \{l^M, l^N\})$$

Definícia 5.6

Styčnou rovinou hranolovej plochy $\boldsymbol{H_n}$ nazývame takú osnovovú rovinu, ktorá obsahuje hranu alebo stenu plochy.[36]

Dôsledok 5.1

1. Rovina, ktorá nie je osnovová, pretína hranolovú plochu $\boldsymbol{H_n}$ v konvexnom n-uholníku. Pritom všetky roviny tej istej osnovy (navzájom rovnobežných rovín) pretínajú plochu v zhodných n-uholníkoch. Ak ide o šikmú hranolovú plochu, existuje i druhá sústava rovín pretínajúcich plochu v zhodných n-uholníkoch s n-uholníkmi 1. sústavy. Patria do nej všetky roviny súmerne združené s rovinami prvej sústavy podľa ľubovoľnej normálovej roviny plochy. (Odôvodnite)
2. Medzi dvoma rovinnými rezmi hranolovej plochy navzájom rôznobežnými rovinami, ktoré nie sú osnovové, je vzťah perspektívnej afinity, ktorej osou je priesečnica rezových rovín a dvojicu bodov vzor-obraz tvoria body na ľubovoľnej osnovovej priamke plochy v týchto rovinách. Možno dokázať, že i medzi rovnobežnými priemetmi týchto rovinných rezov (ak roviny rezu nepatria do osnovy premietania) je vzťah perspektívnej afinity v priemetni. Určujúcimi prvkami afinity v priemetni sú priemety určujúcich prvkov pôvodnej perspektívnej afinity.[37]

Pri vysvetľovaní teórie zobrazenia základných telies v rovnobežnom alebo stredovom premietaní, ako aj v konštrukciách osvetlenia telies je potrebné uvažovať o styčných alebo dotykových rovinách plôch, ktoré sú súčasne styčnými/dotykovými rovinami tohto telesa a navyše premietacími rovinami.[38] Bude to potrebné pri vymedzení pojmov *obrys útvaru* $\boldsymbol{U}$ v danom premietaní a *hranica vlastného tieňa útvaru* $\boldsymbol{U}$ v osvetlení. Preto zaraďujeme pri každej z definovaných základných plôch (hranolová/valcová plocha, ihlanová/kužeľová a guľová plocha) do základných úloh riešenia nasledujúcich dvoch problémov: konštrukcia styčnej/dotykovej roviny príslušnej plochy, ktorá a) je incidentná s daným bodom; b) je rovnobežná s danou priamkou.

[36] Styčnými rovinami hranolovej plochy sú osnovové roviny v prípadoch b, c z vety 5.6. Styčná rovina pretína rovinu α určujúceho n-uholníka v jeho styčnej priamke.

[37] S ohľadom na rozsah práce sa dôkaz tvrdenia považuje za známy. [13]

[38] V stredovom premietaní, t.j. v premietaní z bodu euklidovského priestoru $\boldsymbol{E_3}$ (stred premietania) nazývame *premietacou priamkou/rovinou* každú priamku/rovinu incidentnú so stredom premietania.

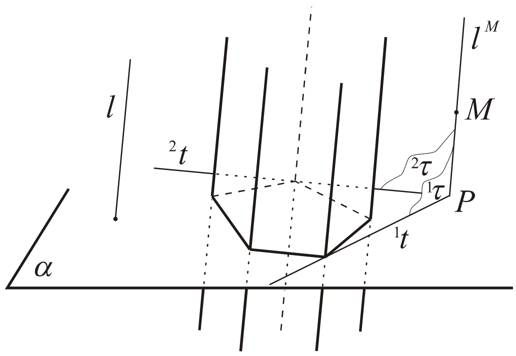
Úloha 5.1. Zostrojte styčnú rovinu hranolovej plochy $\boldsymbol{H_n}(P_n \subset \alpha; l)$, ktorá prechádza daným bodom M.

Riešenie

1. (*Rozbor*) Ak existuje styčná rovina ${}^i\tau$ požadovaných vlastností, tak v tejto rovine leží osnovová priamka l^M danej hranolovej plochy, ktorá prechádza bodom M. Priesečnica rovín $\alpha, {}^i\tau$ je teda styčnou priamkou ${}^it$ určújúceho n-uholníka P_n, ktorá prechádza bodom $l^M \cap \alpha = \{P\}$.

2. (*Konštrukcia*) Zostrojíme priamku l^M, pre ktorú platí $M \subset l^M \wedge l^M \parallel l$ a jej priesečník P s rovinou α ($l^M \cap \alpha = \{P\}$).

Ďalej zostrojme styčnú priamku ${}^it$ určújúceho n-uholníka P_n prechádzajúcu bodom P. Táto styčná priamka je priamkou hľadanej styčnej roviny roviny ${}^i\tau$ (${}^it = {}^i\tau \cap \alpha$). Dotyková rovina ${}^i\tau$ je určená priamkou ${}^it$ a bodom M (${}^i\tau = \overleftrightarrow{{}^itM}$). (Obr. 5.5)



Obr. 5.5

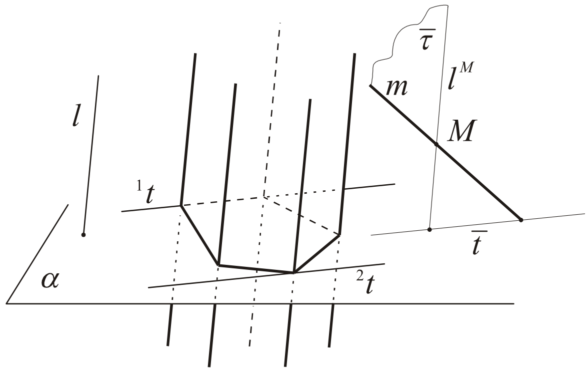
3. *Diskusia*. Styčná rovina ${}^i\tau$ existuje práve vtedy, keď existuje styčná priamka ${}^it$ n-uholníka P_n incidentná s bodom P, čo je práve vtedy, keď bod P nie je vnútorným bodom n-uholníka P_n. Pre vzájomnú polohu bodu P a n-uholníka P_n platí: a) bod P je bodom n-uholníka, ale nie je vrcholom; b) bod P je vrcholom n-uholníka; c) bod P je vonkajším bodom n-uholníka; d) bod P je vnútorným bodom n-uholníka. V prípade a) má teda úloha práve jedno riešenie obsahujúce stenu plochy, v prípade b) existuje nekonečne mnoho rovín požadovanej vlastnosti, z ktorých každá obsahuje tú istú hranu plochy, v prípade c) má úloha práve dve riešenia a v prípade d) riešenie neexistuje. (Vysvetlite) Dôsledkom je, že: a) úloha má práve jedno riešenie, ak je bod M vnútorným bodom steny plochy; b) ak bod M leží na hrane plochy, riešení je nekonečne mnoho; c) ak bod M je vonkajším bodom plochy, existujú práve dve riešenia; d) ak je bod M vnútorným bodom vzhľadom na plochu, riešenie neexistuje.

Úloha 5.2. Zostrojte styčné roviny hranolovej plochy $\boldsymbol{H_n}(P_n \subset \alpha;\ l)$ rovnobežné s danou priamkou m $(m \nparallel l)$.

Riešenie

1. *Rozbor.* Ak existuje rovina τ požadovaných vlastností, platí: $\tau \parallel l \wedge \tau \parallel m$. Množina všetkých rovín rovnobežných s danou dvojicou nerovnobežných priamok m, l je osnova navzájom rovnobežných rovín. Ich priesečnice s rovinou α určujúceho n-uholníka P_n patria do osnovy navzájom rovnobežných priamok roviny α. Stačí teda zostrojiť jednu rovinu z danej osnovy rovín; zostrojme napr. rovinu $\overline{\tau}$ $(m \subset \overline{\tau} \wedge \overline{\tau} \parallel l)$[39]. Jednou priamkou hľadanej styčnej roviny τ je styčná priamka t n-uholníka P_n rovnobežná s priamkou $\overline{\tau} \cap \alpha$. Touto priamkou je styčná rovina určená.

2. (*Konštrukcia*) Zvoľme si ľubovoľný bod M na priamke m. Týmto bodom zostrojme osnovovú priamku l^M $(M \in l^M \wedge l^M \parallel l)$. Priamky m, l^M sú navzájom rôznobežné a určujú rovinu; označme ju $\overline{\tau}$.
Ďalej stačí zostrojiť priesečnicu $\overline{t}$ rovín $\overline{\tau}$ a α a zostrojiť styčnú priamku t určujúceho n-uholníka P_n tak, aby bola rovnobežná s priamkou $\overline{t}$. Styčná rovina τ je určená priamkou t a ľubovoľnou jej priečkou rovnobežnou s osnovovou priamkou l.) (Obr. 5.6)



Obr. 5.6

3. (*Diskusia*) Pretože vždy existujú práve dve styčné priamky daného n-uholníka P_n rovnobežné s ľubovoľnou priamkou jeho roviny, úloha má vždy práve dve riešenia. (V špeciálnom prípade, ak priamka m je rovnobežná s rovinou α, tak každá rovina ňou prechádzajúca a pretínajúca rovinu α ju pretína v priamke rovnobežnej s priamkou m, t.j. $t = (\tau \cap \alpha) \parallel m$.) Roviny, ktoré sú riešením, môžu obsahovať dve steny plochy alebo stenu a hranu plochy alebo dve nesusedné hrany plochy $\boldsymbol{H_n}$. Na obr. 5.6 nastane druhá z možností.

[39]Konštrukcia roviny $\overline{\tau}$ je zrejmá z vyriešenej úlohy 3.2 v paragrafe 3.2.

Na záver sa urobí klasifikácia vzájomnej polohy priamky s hranolovou plochou. Vyjadruje ju nasledujúca veta.

Veta 5.7

Priamka a má s hranolovou plochou $\boldsymbol{H_n}(P_n \subset \alpha;\ l)$ jednu z nasledujúcich vzájomných polôh:

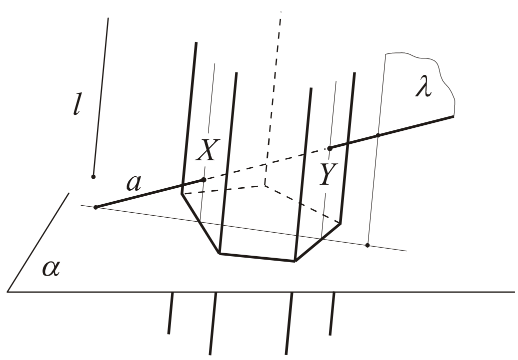
- **a)** Priamka a je osnovovou priamkou a: a_1) je tvoriacou priamkou plochy; a_2) nemá s hranolovou plochou $\boldsymbol{H_n}$ žiaden spoločný bod.
- **b)** Priamka a nie je osnovovou priamkou a: b_1) nemá s plochou žiaden spoločný bod; b_2) obsahuje bod hrany alebo úsečku v stene plochy $\boldsymbol{H_n}$; b_3) pretína plochu $\boldsymbol{H_n}$ v dvoch rôznych bodoch.

Dôkaz

a) V prípadoch, keď priamka a je osnovová, je dôkaz zrejmý, preto sa ponecháva čitateľovi.

b) Dokážme vetu pre prípady, ak priamka a nie je osnovová. Vzájomnú polohu priamky s telesom určíme pomocou ľubovoľnej roviny prechádzajúcej danou priamkou. Najvýhodnejšou je osnovová rovina plochy $\boldsymbol{H_n}$, označme ju λ. Stačí zistiť vzájomnú polohu roviny λ s plochou $\boldsymbol{H_n}$. Platí: $a \cap \boldsymbol{H_n} = (a \cap \lambda) \cap \boldsymbol{H_n} = a \cap (\lambda \cap \boldsymbol{H_n})$. Potom: 1. Ak $(\lambda \cap \boldsymbol{H_n}) = \emptyset$, tak rovina λ nemá s plochou $\boldsymbol{H_n}$ žiaden spoločný bod (veta 5.6). V tom prípade ani priamka a nemá s plochou žiaden spoločný bod. 2. Ak $(\lambda \cap \boldsymbol{H_n})$ je hrana alebo stena plochy $\boldsymbol{H_n}$, tak priamka a má s touto hranou spoločný práve jeden bod alebo so stenou spoločnú úsečku, teda aj s hranolovou plochou má spoločný práve bod hrany alebo úsečku v stene plochy $\boldsymbol{H_n}$.

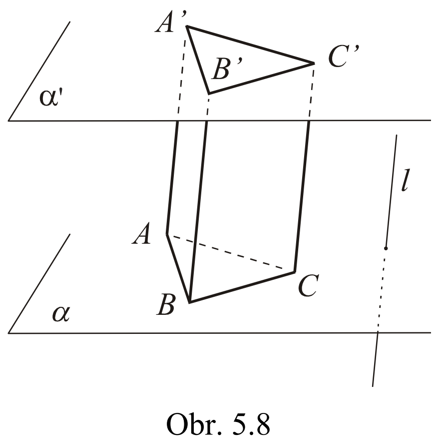
3. Ak prienikom $(\lambda \cap \boldsymbol{H_n})$ sú dve tvoriace priamky, tak priamka a pretína každú z týchto tvoriacich priamok v jednom bode, teda priamka a pretína hranolovú plochu $\boldsymbol{H_n}$ v dvoch rôznych bodoch. (Obr. 5.7)



Obr. 5.7

Definícia 5.7

- *Hranolom* (n-bokým) nazývame prienik n-bokého hranolového priestoru $\overline{H}$ a priestorovej vrstvy[40] určenej dvojicou navzájom rovnobežných rovín $\alpha, \alpha' \neq \alpha$, ktoré nie sú osnovové roviny hranolového priestoru $\overline{H}$. (Obr. 5.8)
- *Podstavami hranola* nazývame n-uholníky s ich vnútrom, ktoré sú prienikom hranolového priestoru $\overline{H}$ a rovín α, α'.
- *Vrcholmi hranola* sú vrcholy oboch podstáv hranola.
- *Bočnými stenami* hranola nazývame časti stien príslušnej hranolovej plochy $\boldsymbol{H_n}$ patriace hranolu. *Stenami hranola* nazývame bočné steny a obe podstavy hranola.
- *Bočnými hranami* hranola nazývame časti hrán príslušnej hranolovej plochy $\boldsymbol{H_n}$ patriace hranolu.
- *Podstavnými hranami* hranola nazývame strany jeho podstáv.
- *Výškou hranola* nazývame vzdialenosť rovín jeho postáv.
- *Rovnobežnostenom* nazývame hranol, ktorého podstavou je rovnobežník.
- *Kolmým hranolom* nazývame hranol, ktorého bočné hrany sú kolmé na roviny podstáv, v inom prípade ho nazývame *šikmým hranolom*. Analogicky hovoríme o kolmej/šikmej hranolovej ploche.
- *Pravidelným hranolom* nazývame kolmý hranol, ktorého podstavou je pravidelný mnohouholník a spojnicu stredov jeho podstáv nazývame jeho *osou*.
- *Kvádrom* nazývame kolmý hranol, ktorého podstavou je pravouholník.



Obr. 5.8

[40] Priestorovou vrstvou nazývame prienik dvoch polpriestorov s hraničnými rovinami v dvoch navzájom rôznych rovnobežných rovinách α, β, ktorá je množinou všetkých bodov otvorených úsečiek XY ($X \in \alpha$, $Y \in \beta$).

Dôsledok 5.2

a) Obe podstavy n-bokého hranola sú navzájom zhodné n-uholníky s navzájom rovnobežnými stranami ležiacimi v tej istej bočnej stene telesa.

b) Všetky bočné steny hranola sú rovnobežníky s ich vnútrom.

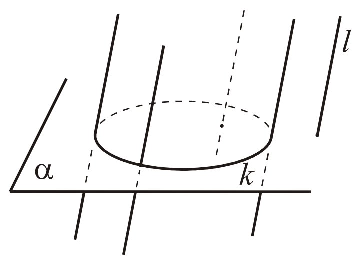
c) Pre každý hranolový priestor/hranolovú plochu, ktoré prislúchajú danému hranolu je každá rovina kolmá na tvoriace priamky rovinou súmernosti. (Tieto roviny nazývame *normálovými rovinami* príslušného hranolového priestoru/hranolovej plochy. Hovoríme i o normálových rovinách daného hranola.)[41]

Celkom analogicky s hranolovou plochou sa definuje kružnicová valcová plocha. Pojem určujúceho n-uholníka nahradí pojem určujúcej kružnice plochy. Zachováva sa pojem tvoriacej priamky, na druhej strane sa pochopiteľne stráca pojem hrany, či steny plochy. Z hranolovej plochy prevezmeme i pojem osnovovej roviny plochy a klasifikáciu vzájomnej polohu plochy tak s osnovovou rovinou ako aj s priamkou. Pojem styčnej roviny sa prirodzene nahradí pojmom dotykovej roviny valcovej plochy. Na každej šikmej valcovej ploche existujú dve sústavy navzájom zhodných kružnicových rezov plochy; obe sústavy sú súmerne združené podľa ľubovoľnej normálovej roviny plochy. Analogické, ako v prípade hranolovej plochy, sú i dôkazy všetkých viet, ktoré sa zaoberajú vzájomnou polohou valcovej plochy s priamkou a rovinou. Tieto vety preto uvedieme bez dôkazu.

Definícia 5.8. Nech je k ľubovoľná kružnica roviny α a l ľubovoľná priamka rôznobežná s touto rovinou. Množinu bodov všetkých priamok rovnobežných s priamkou l a pretínajúcich kružnicu k [kružnicu k a jej vnútro] nazývame *kružnicová valcová plocha* [*kružnicový valcový priestor*]. (Obr. 5.9)

a) Kružnica k sa nazýva *určujúcou kružnicou* plochy.

b) *Tvoriacimi priamkami* kružnicovej valcovej plochy nazývame všetky priamky rovnobežné s priamkou l patriace ploche.



Obr. 5.9

[41] Normálové roviny šikmého hranola používame pri konštrukcii jeho siete, ktorá sa získa rozvinutím jeho stien do jednej roviny pozdĺž tzv. normálového rezu telesa (t.j. rovinného rezu príslušnej hranolovej plochy normálovou rovinou), ktorý sa rozvinie do úsečky.

c) Každú priamku [rovinu] rovnobežnú s priamkou *l* budeme nazývať o*snovovou priamkou* [*osnovovou rovinou*] kružnicovej valcovej plochy. Osnovová priamka incidentná so stredom určujúcej kružnice plochy sa nazýva *osou plochy*.

d) *Rotačná valcová plocha* je plocha, ktorej os je kolmá na rovinu určujúcej kružnice plochy. Polomer tejto kružnice sa nazýva *polomerom rotačnej valcovej plochy*. V opačnom prípade hovoríme o *šikmej kružnicovej valcovej ploche*.

e) Rovina kolmá na tvoriace priamky plochy sa nazýva *normálovou rovinou* valcovej plochy.

Poznámka 5.3

1. Z definície konvexného útvaru je zrejmé, že kružnicový valcový priestor je konvexným útvarom, pretože kruh je konvexný útvar.
2. Kružnicová valcová plocha s určujúcou kružnicou *k* v rovine α a osnovovou priamkou *l* sa bude označovať symbolom ***V***$(k \subset \alpha\,;\ l)$; analogicky budeme označovať príslušný kružnicový valcový priestor $\overline{V}\,(k \subset \alpha\,;\ l)$.

Veta 5.8

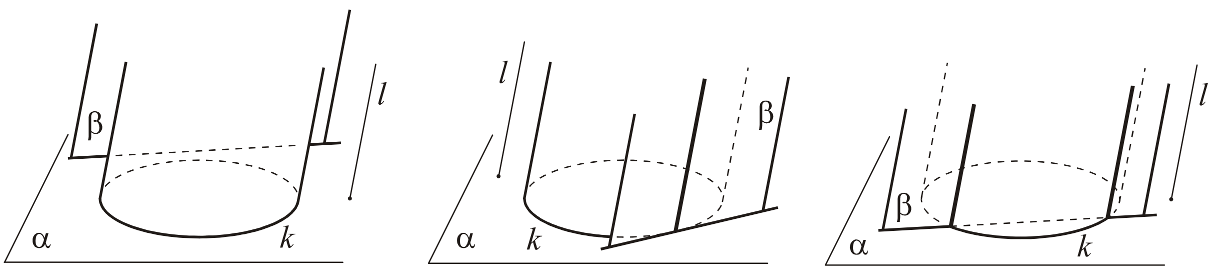
Osnovová rovina β má s kružnicovou valcovou plochou ***V***$(k \subset \alpha\,;\ l)$ jednu z nasledujúcich vzájomných polôh:

a) nemá s plochou žiaden spoločný bod;

b) má s plochou spoločnú práve jednu tvoriacu priamku;

c) má s plochou spoločné práve dve tvoriace priamky;

Rovina, ktorá nie je osnovová, pretína kružnicovú valcovú plochu *V* v kružnici alebo elipse. ([13])



Obr. 5.10

Definícia 5.9

Osnovová rovina kružnicovej valcovej plochy, ktorá má s plochou spoločnú práve jednu tvoriacu priamku, sa nazýva *dotykovou rovinou* kružnicovej valcovej plochy. Každá priamka dotykovej roviny prechádzajúca bodom plochy a rôzna od tvoriacej priamky plochy sa nazýva dotyčnicou plochy v danom bode.[42]

Veta 5.9

Priamka *a* má s kružnicovou valcovou plochou $\boldsymbol{V}(k \subset \alpha\,;\ l)$ jednu z nasledujúcich vzájomných polôh:

a) Priamka *a* je osnovovou priamkou a: a_1) je tvoriacou priamkou plochy; a_2) nemá s kružnicovou valcovou plochou ***V*** žiaden spoločný bod.

b) Priamka *a* nie je osnovovou priamkou a: b_1) nemá s plochou žiaden spoločný bod; b_2) obsahuje bod práve jednej tvoriacej priamky plochy ***V*** (je dotyčnicou plochy v tomto bode); b_3) pretína plochu ***V*** v dvoch rôznych bodoch.

Definícia 5.10

– *Valcom* nazývame prienik kružnicového valcového priestoru $\overline{V}\,(k \subset \alpha\,;\, l)$ a priestorovej vrstvy určenej dvojicou navzájom rovnobežných rovín $\alpha, \alpha' \neq \alpha$, ktoré nie sú osnovovými rovinami valcového priestoru $\overline{V}$.
– *Podstavami valca* nazývame kruhy, ktoré sú prienikom kružnicového valcového priestoru $\overline{V}$ a rovín α, α'. *Podstavnými hranami* valca nazývame kružnice, ktoré sú prienikom kružnicovej valcovej plochy ***V*** a rovín α, α'.
– *Stranou* valca nazývame časť tvoriacej priamky rotačnej valcovej plochy ***V***, ktorá patrí danému valcu.
– *Plášťom* valca nazývame tú časť kružnicovej valcovej plochy ***V***, ktorá je prienikom kružnicovej valcovej plochy ***V*** a priestorovej vrstvy medzi rovinami α, α'.
– *Kolmým valcom* nazývame valec, ktorého všetky tvoriace priamky sú kolmé na roviny podstáv, v inom prípade ho nazývame *šikmým valcom*.
– *Rotačným valcom* nazývame kolmý valec, ktorého podstavami sú kružnice. *Polomer* rotačného valca je polomer jeho podstavy a spojnicu stredov podstáv nazývame jeho *osou*.
– Rotačný valec nazývame *rovnostranný*, ak je strana valca zhodná s priemerom jeho podstavy.
– *Výškou valca* nazývame vzdialenosť rovín jeho postáv.

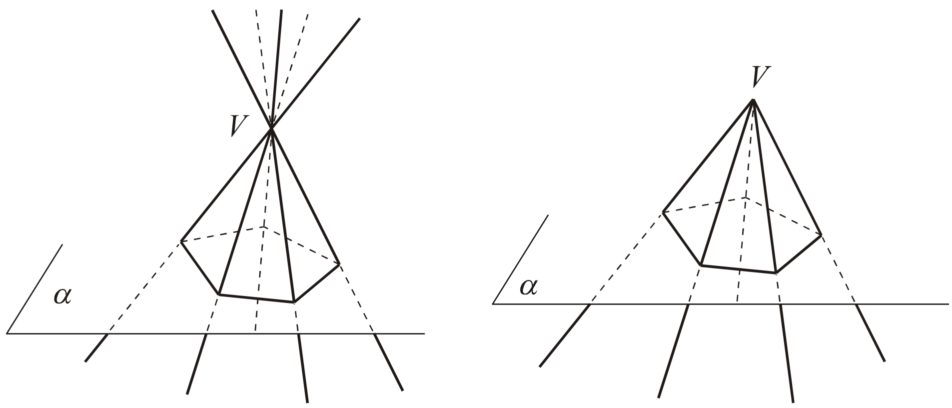
[42]Dotyková rovina pretína rovinu určujúcej kružnice v dotyčnici tejto kružnice.

5.1.3 Ihlanová plocha. Vzájomná poloha plochy s priamkou a rovinou. Ihlan

Definícia 5.11

Nech je P_n ľubovoľný konvexný n-uholník roviny α a V ľubovoľný bod neležiaci v rovine α. Množinu bodov všetkých priamok prechádzajúcich bodom V [polpriamok so začiatkom v bode V], ktoré pretínajú n-uholník P_n, resp. n-uholník P_n s jeho vnútrom, nazývame *úplná n-boká ihlanová plocha* [*jednoduchá n-boká ihlanová plocha*], resp. *úplný* [*jednoduchý*] *n-boký*[43] *ihlanový priestor*. (Obr. 5.11)

- **a)** n-uholník P_n sa nazýva *určujúcim n-uholníkom* ihlanovej plochy a bod V *vrcholom plochy*.
- **b)** Všetky priamky [polpriamky] patriace ihlanovej ploche nazývame *tvoriacimi priamkami* [*tvoriacimi polpriamkami*] plochy. Tvoriace priamky [polpriamky] incidentné s vrcholmi určujúceho n-uholníka sú *hranami* úplnej [jednoduchej] ihlanovej plochy.
- **c)** *Stenou* úplnej [jednoduchej] ihlanovej plochy sa nazýva množina bodov všetkých tvoriacich priamok [polpriamok] plochy, ktoré pretínajú jednu stranu určujúceho n-uholníka P_n.
- **d)** Každá priamka/rovina prechádzajúca vrcholom plochy sa nazýva *vrcholová priamka/rovina* plochy.[44]



Obr. 5.11

[43] V ďalšom texte budeme pri ihlanovej ploche/priestore pre stručnosť zápisu vynechávať pojem „n-boká/ý“.

[44] Všetky pojmy definované v a-d sa vzťahujú aj na príslušný ihlanový priestor.

Poznámka 5.4

1. Ihlanovú plochu, resp. ihlanový priestor s určujúcim n-uholníkom P_n v rovine α a vrcholom V budeme označovať $\boldsymbol{I_n}(P_n \subset \alpha;\ V)$, resp. $\overline{I}_n\,(P_n \subset \alpha;\ V\,)$. Z kontextu bude zrejmé, či ide o úplnú alebo jednoduchú ihlanovú plochu (alebo ihlanový priestor).

2. V súlade s dohovorom (poznámka 5.2) berieme do úvahy len *konvexné* určujúce n-uholníky ihlanovej plochy. Potom je zrejmé, že jednoduchý ihlanový priestor je konvexným útvarom; vtedy budeme hovoriť aj o *konvexnej* jednoduchej ihlanovej ploche, i keď táto nie je konvexným útvarom. Úplný ihlanový priestor (s konvexným určujúcim n-uholníkom) je nekonvexným útvarom.

3. Pod *vnútorným bodom* ihlanovej plochy budeme rozumieť ľubovoľný bod príslušného ihlanového priestoru (jednoduchého alebo úplného), ktorý nie je bodom jemu prislúchajúcej[45] ihlanovej plochy. Body nepatriace ihlanovému priestoru sú jeho vonkajšími bodmi a nazývame ich i *vonkajšími bodmi* príslušnej ihlanovej plochy. Množina všetkých vnútorných bodov ihlanového priestoru/plochy sa nazýva *vnútrom* ihlanového priestoru/ihlanovej plochy.

Ďalej sa budeme zaoberať vzájomnou polohou priamky a roviny s ihlanovou plochou. Dôkazy nasledujúcich tvrdení sú celkom analogické s dôkazmi tvrdení o hranolovej ploche. Osnovovú rovinu bude všade zastupovať vrcholová rovina ihlanovej plochy. Klasifikácia vzájomnej polohy vrcholovej roviny a ihlanovej plochy analogicky vyplýva z klasifikácie vzájomnej polohy priesečnice vrcholovej roviny plochy s rovinou určujúceho n-uholníka. Preto môže byť dôkaz nasledujúcej vety zaradený do cvičení (cvičenie 6, par. 5.2.5).

Veta 5.10

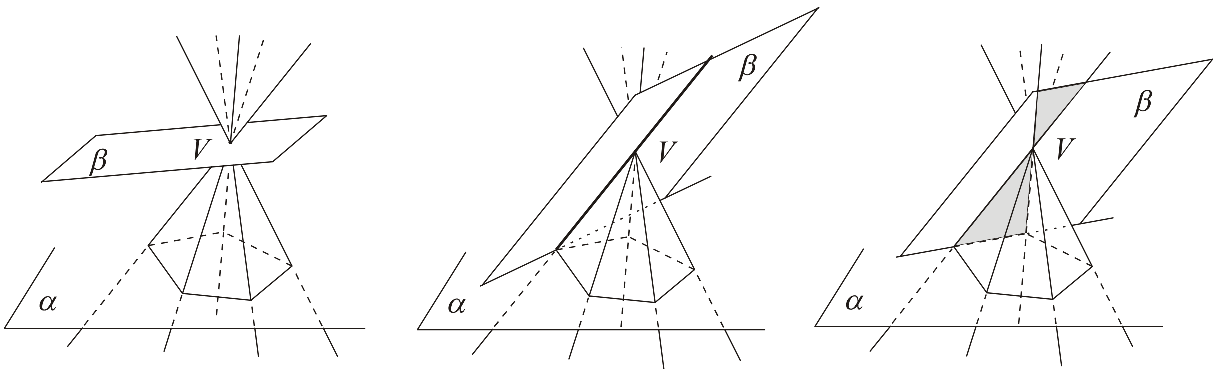
Vrcholová rovina β má s úplnou [jednoduchou] ihlanovou plochou $\boldsymbol{I_n}(P_n \subset \alpha; V\,)$ jednu z nasledujúcich vzájomných polôh:

a) má s plochou spoločný len vrchol;

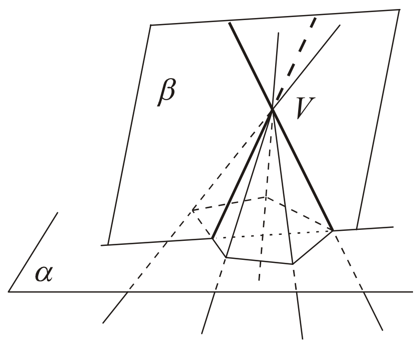
b) obsahuje práve jednu hranu alebo stenu plochy;

[45] O jednoduchej/úplnej ihlanovej ploche hovoríme, že je prislúchajúcou (príslušnou) k danému jednoduchému/úplnému ihlanovému priestoru, ak sú incidentné (t.j. dané tým istým určujúcim n-uholníkom a vrcholom).

c) pretína plochu v dvoch (rôznych) tvoriacich priamkach [polpriamkach].



Obr. 5.12 a – d



Zo vzájomnej polohy vrcholovej roviny s ihlanovou plochou môžeme odvodiť vzájomnú polohu ľubovoľnej priamky s plochou. Ak táto priamka nie je vrcholovou priamkou, preložíme ňou vrcholovú rovinu plochy a klasifikáciu vzájomnej polohy priamky (ktorá neprechádza vrcholom) a plochy môžeme urobiť ako dôsledok vety 5.10. Platí nasledujúca veta.

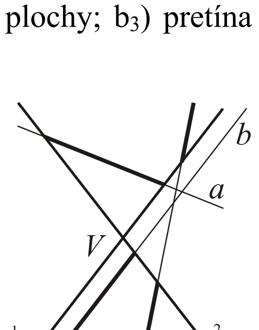
Veta 5.11

Priamka má s úplnou [jednoduchou] ihlanovou plochou jednu z nasledujúcich vzájomných polôh:

a) Priamka je vrcholovou priamkou plochy a: a_1) je tvoriacou priamkou [polpriamkou] plochy; a_2) má s plochou spoločný len vrchol plochy.

b) Priamka nie je vrcholovou priamkou plochy a: b_1) nemá s plochou žiaden spoločný bod; b_2) obsahuje bod hrany rôzny od vrcholu, úsečku alebo jednu polpriamku alebo dve polpriamky [úsečku alebo jednu polpriamku] v stene plochy; b_3) pretína plochu v dvoch (rôznych) bodoch.

Na obr. 5.13 priamky a, b, c ležia v rovine jednej steny úplnej ihlanovej plochy s hranami ${}^1a, {}^2a$.



Obr. 5.13

Definícia 5.12

Vrcholová rovina ihlanovej plochy obsahujúca hranu alebo stenu plochy sa nazýva *styčnou rovinou* ihlanovej plochy.

Je zrejmé, že priesečnica styčnej roviny ihlanovej plochy $\boldsymbol{I_n}(P_n \subset \alpha; V)$ s rovinou α je styčnou priamkou *n*-uholníka P_n. Z tohoto poznatku vyplýva riešenie úloh o konštrukcii styčnej roviny ihlanovej plochy, ktorá má požadované vlastnosti. V riešení nasledujúcich úloh urobíme len rozbor úlohy; vykonanie konštrukcie je triviálne z rozboru úlohy. Čitateľovi sa nechá vykonanie diskusie analogicky s vyriešenou úlohou 5.1.

Úloha 5.3. Zostrojte styčné roviny ihlanovej plochy $\boldsymbol{I_n}(P_n \subset \alpha; V)$ prechádzajúce daným bodom M $(M \neq V)$.

(*Rozbor úlohy*) Ak existuje styčná rovina ${}^{i}\tau$ požadovaných vlastností, tak v tejto rovine leží vrcholová priamka $\overleftrightarrow{VM}$. Priesečnica ${}^{i}\tau \cap \alpha$ je styčnou priamkou určujúceho *n*-uholníka P_n, ktorá prechádza bodom $\overleftrightarrow{VM} \cap \alpha$ alebo v prípade rovnobežnosti priamky *VM* s rovinou α je táto priamka rovnobežná s priamkou *VM*. (Prečo?)

Úloha 5.4. Zostrojte styčné roviny ihlanovej plochy $\boldsymbol{I_n}(P_n \subset \alpha; V)$ rovnobežné s danou priamkou m $(V \notin m)$.

(*Rozbor úlohy*) Ak existuje styčná rovina ${}^{i}\tau$ požadovaných vlastností, tak musí obsahovať priamku $l(V \in l \wedge l \parallel m)$. Priesečnica ${}^{i}\tau \cap \alpha$ je styčnou priamkou určujúceho *n*-uholníka P_n, ktorá prechádza bodom $l \cap \alpha$ alebo je s priamkou l rovnobežná v prípade $l \parallel \alpha$.

Dôsledok 5.3

Rovina, ktorá nie je vrcholová ani rovnobežná so žiadnou tvoriacou priamkou plochy, t.j. pretínajúca všetky tvoriace priamky ihlanovej plochy $\boldsymbol{I_n}(P_n \subset \alpha; V)$, pretína plochu v konvexnom *n*-uholníku. Ak sú dva rovinné rezy plochy *n*-uholníky v navzájom rovnobežných rovinách, tak sú tieto *n*-uholníky podobné alebo zhodné (dva zhodné *n*-uholníky ležia v rovinách súmerne združených podľa vrcholu plochy).

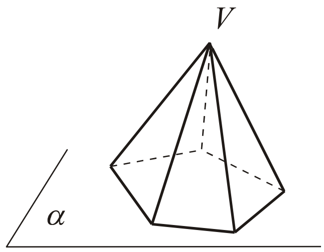
Poznámka 5.5

Medzi určujúcim n-uholníkom úplnej ihlanovej plochy a rovinným rezom plochy rovinou, ktorá nie je vrcholová, je vzťah perspektívnej kolineácie. Stredom tejto kolineácie je vrchol plochy, osou je priesečnica roviny určujúceho n-uholníka plochy s rovinou rovinného rezu a dvojica bodov vzor-obraz sa dostane na tej istej tvoriacej priamke plochy v oboch rezových rovinách. Na zistenie toho, či existujú tvoriace priamky ihlanovej plochy rovnobežné s rovinou rezu je potrebné overiť vzájomnú polohu vrcholovej roviny plochy (rovnobežnej s rovinou rezu) s touto plochou. Ak existujú takéto tvoriace priamky, musia ležať v spomenutej vrcholovej rovine. Pre rovnobežné priemety určujúceho n-uholníka a rovinného rezu platí, že sú vo vzťahu homológie, ktorej stredom je priemet stredu a osou priemet osi spomenutej perspektívnej kolineácie. Tieto pojmy však nemôžu patriť medzi poznatky získané vo vyučovaní matematiky na úrovni, keď sa študenti začínajú oboznamovať s výstavbou stereometrie (stredná škola, prvé ročníky na vysokej škole). Preto sú všetky príklady a cvičenia o ihlanových plochách formulované pre jednoduché ihlanové plochy tak, aby ich študenti mohli vykonať na základe známych poznatkov zo stereometrie.

Definícia 5.13

a) *Ihlanom* nazývame prienik jednoduchého ihlanového priestoru $\overline{I}_n\,(P_n \subset \alpha;\ \ V)$ a polpriestoru $\overset{\mapsto}{\alpha V}$.
Hovoríme aj o jednoduchom ihlane.

b) *Podstavou ihlana* nazývame n-uholník P_n s jeho vnútrom; *vrchol ihlana* je vrchol ihlanovej plochy $\boldsymbol{I_n}$.



Obr. 5.14

c) *Bočnými stenami* [*hranami*] ihlana nazývame časti stien [hrán] príslušnej ihlanovej plochy $\boldsymbol{I_n}$ patriace ihlanu. *Podstavnými hranami* ihlana nazývame strany podstavy ihlana.

d) *Stenami ihlana* nazývame bočné steny a podstavu ihlana.

Poznámka 5.6

1. Je zrejmé, že bočné steny jednoduchého ihlana sú trojuholníky.

2. V prípade úplného ihlanového priestoru $\overline{I}$, keď nahradíme polpriestor $\overset{\mapsto}{\alpha V}$ v definícii 5.15 priestorovou vrstvou určenou rovinami α, α', pre ktorú je bod V vnútorným bodom, hovoríme o dvojihlane.

Na záver by sme mali definovať úplnú [jednoduchú] kružnicovú kužeľovú plochu a priestor a zvyšné súvisiace pojmy na základe práve uvedených pojmov týkajúcich sa ihlanovej plochy tak, jako to bolo urobené v prípade zrejmej analógie pojmov týkajúcich sa hranolovej a kružnicovej valcovej plochy. Ovládanie vybudovaných pojmov je zárukou samostatného utvorenia pojmov súvisiacich s kružnicovou kužeľovou plochou/priestorom vrátane riešenia úloh 5.3 a 5.4 o styčných rovinách ihlanovej plochy, ktoré budú dotykovými rovinami kružnicovej kužeľovej plochy. Na základe poznámky 5.5 sa o rovinných rezoch kružnicovej kužeľovej plochy rovinami, ktoré neprechádzajú jej vrcholom, nebudeme zmieňovať.

Definícia 5.14

Nech je k ľubovoľná kružnica roviny α a V ľubovoľný bod nepatriaci tejto rovine. Množinu bodov všetkých priamok prechádzajúcich bodom V a pretínajúcich kružnicu k [kružnicu k a jej vnútro] nazývame *úplná kružnicová kužeľová plocha* [*úplný kružnicový kužeľový priestor*]. Označujeme $\boldsymbol{K}\,(k \subset \alpha\,;\,V)$ [$\overline{K}\ \,(k \subset \alpha\,;\,V)$].

a) Kružnicu k nazývame *určujúcou kružnicou* plochy.

b) Bod V nazývame *vrcholom* kružnicovej kužeľovej plochy.

c) *Tvoriacimi priamkami* kužeľovej plochy nazývame všetky priamky prechádzajúce vrcholom a patriace kužeľovej ploche.

Poznámka 5.7

Jednoduchou kružnicovou kužeľovou plochou [*jednoduchým* kružnicovým kužeľovým priestorom] nazývame množinu bodov všetkých polpriamok so začiatkom v bode V a pretínajúcich kružnicu k [kružnicu k a jej vnútro].

Definícia 5.15

Vrcholovou priamkou [*rovinou*] nazývame každú priamku [*rovinu*], ktorá prechádza vrcholom kužeľovej plochy.

Veta 5.12

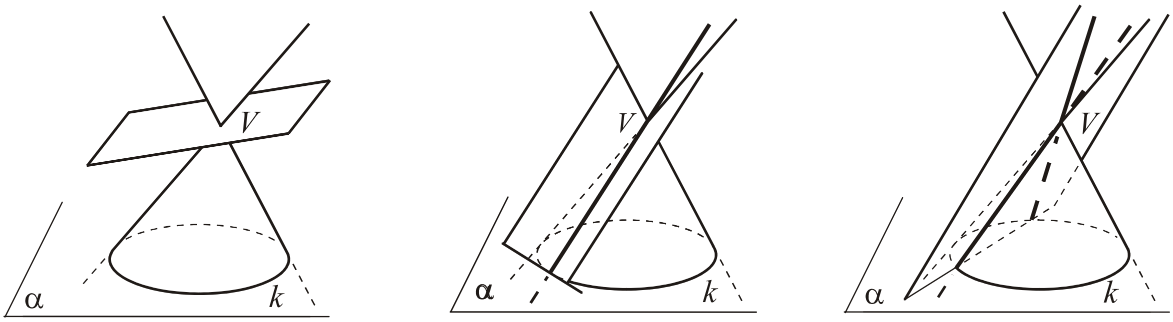
Vrcholová rovina β má s úplnou kužeľovou plochou $\boldsymbol{K}(k \subset \alpha\,;\,V)$ jednu z nasledujúcich vzájomných polôh:

a) má s plochou spoločný práve jeden bod, je ním vrchol plochy;

b) obsahuje práve jednu tvoriacu priamku plochy;

c) má s plochou spoločné práve dve tvoriace priamky.

Rovina, ktorá nie je vrcholová, pretína kružnicovú kužeľovú plochu v kužeľosečke alebo v kružnici.



Obr. 5.15 a - c

Veta 5.13

Priamka a má s úplnou kužeľovou plochou $\boldsymbol{K}(k \subset \alpha\,;\ V\,)$ jednu z nasledujúcich vzájomných polôh:

a) Priamka a je vrcholovou priamkou a: a_1) je tvoriacou priamkou plochy; a_2) má s úplnou kužeľovou plochou spoločný práve jeden bod, je ním vrchol plochy.

b) Priamka a nie je vrcholovou priamkou a: b_1) nemá s plochou žiaden spoločný bod; b_2) obsahuje bod tvoriacej priamky plochy; c) pretína plochu v dvoch rôznych bodoch.

Definícia 5.16

Dotykovou rovinou kužeľovej plochy $\boldsymbol{K}$ nazývame takú vrcholovú rovinu, ktorá obsahuje práve jednu tvoriacu priamku plochy.[46]

Definícia 5.17

a) *Kužeľom* nazývame prienik jednoduchého kužeľového priestoru $\overline{K}\,(k \subset \alpha\,;\ V)$ a polpriestoru $\overset{\mapsto}{\alpha V}$. Hovoríme aj o jednoduchom kuželi.

b) *Podstavou kužeľa* nazývame kružnicu k s jej vnútrom; *vrcholom kužeľa* je vrchol príslušnej kružnicovej kužeľovej plochy $\boldsymbol{K}$.

c) *Podstavnou hranou* kužeľa nazývame kružnicu k.

d) *Plášťom kužeľa* nazývame tú časť kružnicovej kužeľovej plochy $\boldsymbol{K}$, ktorá je prienikom jednoduchej kužeľovej plochy $\boldsymbol{K}\,(k \subset \alpha\,;\ V\,)$ a polpriestoru $\overset{\mapsto}{\alpha V}$.

---

[46] Dotyková rovina pretína rovinu α v dotyčnici kružnice k.

5.1.4 Guľová plocha. Vzájomná poloha roviny a priamky s plochou

V nasledujúcom texte sa bude definovať guľová plocha a súvisiace pojmy a urobíme klasifikáciu vzájomnej polohy priamky a roviny s guľovou plochou. Pri zobrazovaní plochy vo voľnom rovnobežnom premietaní by sa mohlo brať do úvahy nanajvýš premietanie pravouhlé a v ňom zobrazenie niektorých – v istom zmysle význačných – kružníc guľovej plochy (napríklad zobrazenie kružníc plochy v navzájom rovnobežných rovinách a v priemerových rovinách k nim kolmých). To si však tiež vyžaduje prinajmenšom ovládanie konštrukcie pravouhlého priemetu kružnice v rovine, ktorá má všeobecnú polohu vzhľadom na priemetňu. Tento poznatok sa však nedá predpokladať u študentov, ktorí sa oboznamujú so základmi stereometrie. S ohľadom na rozsah práce bude obsahom tohoto paragrafu len to, čo je deklarované v jeho názve.

Definícia 5.18

Nech je S ľubovoľný bod trojrozmerného euklidovského priestoru $\boldsymbol{E_3}$ a nech r je ľubovoľné kladné číslo. Množinu všetkých bodov priestoru, ktoré majú od daného bodu S vzdialenosť, ktorá sa rovná danému číslu r, nazývame *guľovou plochou*.

a) Bod S sa nazýva *stred* a kladné reálne číslo r *polomer* guľovej plochy. *Priemerom* guľovej plochy nazývame číslo $2r$.

b) Bod, ktorého vzdialenosť od stredu guľovej plochy je menšia než číslo r, nazývame *vnútorným bodom* guľovej plochy a bod, ktorého vzdialenosť od stredu guľovej plochy je väčšia než číslo r, nazývame *vonkajším bodom* guľovej plochy. Množina všetkých vnútorných bodov danej guľovej plochy sa nazýva jej vnútrom. Guľovú plochu s jej vnútrom nazývame *guľou*.

c) Priamka/rovina prechádzajúca stredom guľovej plochy sa nazýva *priemerovou priamkou/priemerovou rovinou* guľovej plochy.

Poznámka 5.8

1. Z definície 5.18 a planimetrických poznatkov o kružnici je zrejmé, že každá priemerová priamka guľovej plochy má s plochou spoločné práve dva body. Tieto body sú krajnými bodmi úsečky, ktorú tiež nazývame priemerom guľovej plochy. Zrejmé je tiež, že každá priemerová rovina má s danou guľovou plochou $\boldsymbol{G}(S;\, r)$ spoločnú kružnicu so stredom S a polomerom r. Takúto kružnicu nazývame *hlavnou kružnicou* guľovej plochy.

2. Na základe poznatkov z planimetrie ide jednoducho dokázať, že guľa je konvexným geometrickým útvarom, čo znamená, že každá guľová plocha rozdeľuje priestor na dve oblasti: jedna z oblastí je konvexná (ide o vnútro guľovej plochy), druhá oblasť je doplnok gule v priestore $\boldsymbol{E_3}$, čo je nekonvexná oblasť. Dôkaz, že doplnok gule je oblasťou, je celkom analogický s planimetrickým dôkazom pre kružnicu.

3. Guľovú plochu [guľu] so stredom *S* a polomerom *r* budeme označovať **G** (*S*; *r*) [$\overline{G}(S;r)$].

Veta 5.14

Rovina má s guľovou plochou **G** (*S*; *r*) jednu z nasledujúcich vzájomných polôh:

a) nemá s plochou žiaden spoločný bod;

b) má s plochou spoločný práve jeden bod;

c) má s plochou spoločnú kružnicu.

Dôkaz

Nech $\alpha \subset \boldsymbol{E_3}$ je ľubovoľná rovina a **G** (*S*; *r*) guľová plocha. Klasifikáciu urobíme analogicky s klasifikáciou vzájomnej polohy priamky a kružnice. Pre rovinu α nastane práve jedna z možností: a) $|S\alpha| > r$, b) $|S\alpha| = r$, c) $|S\alpha| < r$.

a) Vzdialenosť bodu *S* od roviny α sa rovná dĺžke úsečky *SP*, kde *P* je päta kolmice z bodu *S* na rovinu α. Odtiaľ je zrejmé, že pre každý ďalší bod *X* roviny α je $SX > SP > r$, tj. $\alpha \cap \boldsymbol{G} = \emptyset$. (Obr. 5.16 a)

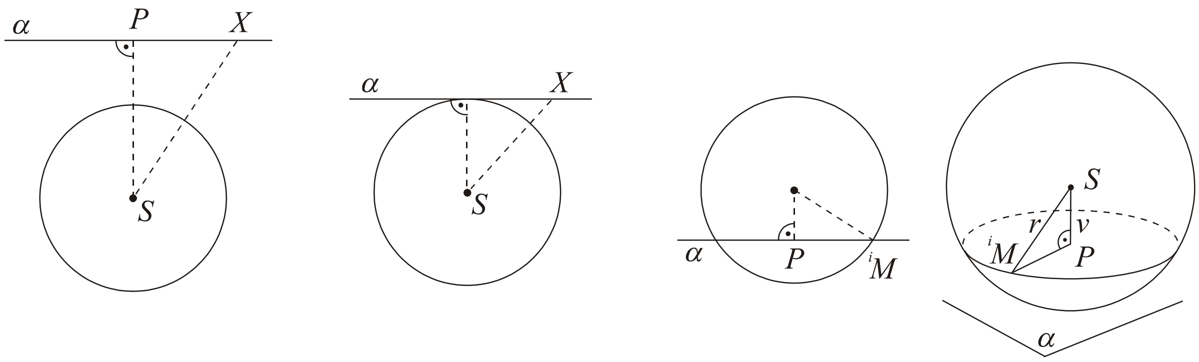
b) Pri označení ako v bode a) platí analogicky: $SX > SP = r$ ($X \in \alpha, X \neq P$), odkiaľ vyplýva $\alpha \cap \boldsymbol{G} = \{P\}$. (Obr. 5.16 b)

c) Nech platí $|S\alpha| = |SP| < r$. V prípade $S = P$ je rovinným rezom $\alpha \cap \boldsymbol{G}$ hlavná kružnica guľovej plochy (poznámka 5.8, bod 1). Skúmajme prienik pre $S \neq P$. Je zrejmé, že bod *P* je vnútorným bodom guľovej plochy. V rovine α existuje nekonečne mnoho bodov ${}^1X, {}^2X, \ldots,$ ktoré sú vonkajšími bodmi guľovej plochy **G**. Každá spojnica ${}^iXP$ má s danou guľovou plochou spoločné práve dva body (dôsledok axióm spojitosti). Bodov prieniku $\alpha \cap \boldsymbol{G}$ je teda nekonečne mnoho. Nech ${}^iM$ je ľubovoľný z nich. Platí:

1. Trojuholník ${}^iMPS$ je pravouhlým trojuholníkom s pravým uhlom pri vrchole *P*, ktorého prepona má dĺžku *r* a odvesna *SP* je konštantná pre všetky body ${}^iM$. Ak označíme $|SP| = v$, dostaneme: $|P\,{}^iM| = \sqrt{r^2 - v^2}$, čo je pre danú rovinu α konštanta. To znamená, že každý z bodov ${}^iM$ je bodom kružnice $k\,(S; \sqrt{r^2 - v^2}\,)$ v rovine α.

2. Obrátene je zrejmé, že pre každý bod $M' \in k$ platí: $|M'S|^2 = r^2 - v^2 + v^2 = r^2$, t.j. bod M' je bodom guľovej plochy **G**.

Z bodov 1, 2 je zrejmé: $\boldsymbol{G} \cap \alpha = \{k\}$. (Obr. 5.16 c)



Obr. 5.16 a - c

Poznámka 5.9

1. V prípade b) rovinu α nazývame *dotykovou rovinou* guľovej plochy v bode P (*dotykový bod*). Každá priamka dotykovej roviny α incidentná s dotykovým bodom P má s guľovou plochou spoločný práve bod P. Preto túto priamku nazývame dotyčnicou guľovej plochy.
2. Klasifikáciu vzájomnej polohy priamky m s guľovou plochou $\boldsymbol{G}(S; r)$ urobíme jednoducho pomocou priemerovej roviny α, ktorá je s danou priamkou incidentná; v prípade $S \in m$ je každá rovina priemerová, v opačnom prípade $\alpha = \overleftrightarrow{mS}$. Potom platí: $m \cap \boldsymbol{G} = m \cap (\alpha \cap \boldsymbol{G}) = \; = m \cap k$, kde k je priemerovou kružnicou guľovej plochy. Priamka m buď nemá s kružnicou k spoločný žiaden bod alebo je dotyčnicou kružnice k alebo pretína kružnicu k práve v dvoch bodoch. To nastane práve vtedy, keď: $m \cap \boldsymbol{G} = \emptyset$ alebo $m \cap \boldsymbol{G} = \{T\}$ alebo $m \cap \boldsymbol{G} = \{M, N \neq M\}$. V prvom prípade zrejme platí $|Sm| > r$ a priamku m nazývame *nesečnicou* guľovej plochy. V druhom prípade $|Sm| = r$ a priamka m je *dotyčnicou* plochy. V treťom prípade $|Sm| < r$ a priamku m nazývame *sečnicou* plochy. Dokázali sme:

Veta 5.15

Nech je m priamka a $\boldsymbol{G}$ guľová plocha. Potom platí: Priamka m je alebo nesečnicou alebo dotyčnicou alebo sečnicou guľovej plochy $\boldsymbol{G}$.

5.2 ROVNOBEŽNÉ PREMIETANIE

V tretej kapitole sme poznamenali, že riešenie stereometrických úloh sa bude ilustrovať na základných telesách v metóde voľného rovnobežného premietania. Voľné rovnobežné

premietanie nie je zobrazovacou metódou v zmysle zobrazovacej metódy definovanej v deskriptívnej geometrii. Nejde v ňom o bijektívne zobrazenie množiny bodov priestoru $\boldsymbol{E_3}$ na určité útvary (najčastejšie usporiadané dvojice bodov) nákresne.
Obrazom geometrického útvaru ***U*** vo voľnom rovnobežnom premietaní bude geometrický útvar, ktorý pozostáva z rovnobežných priemetov všetkých význačných bodov, ktorými je útvar ***U*** určený (bez súvisu s nejakým súradnicovým štvorstenom $OE^xE^yE^z$ priestoru). Aby sme mohli na obraze útvaru *U* riešiť ľubovoľnú polohovú úlohu, musí byť tento obraz úplný (vzhľadom na riešenie polohových úloh). Znamená to, že ku obrazu ľubovoľného bodu útvaru je možné zostrojiť obraz jeho pomocného priemetu do niektorej z jeho stien; napríklad pri hranoloch ide o pomocné rovnobežné premietanie určené rovinou niektorej z podstáv (priemetňa), pričom do osnovy premietania patria bočné hrany plochy. To isté platí o obrazoch ďalších útvarov, ktoré do úlohy vstupujú pri jej riešení. V prípade ihlana je pomocným premietaním stredové premietanie z hlavného vrcholu ihlana do roviny jeho podstavy.[47]

Základom zobrazovania útvarov vo voľnom rovnobežnom premietaní je teda *rovnobežné premietanie* útvarov euklidovského priestoru *do* jednej *roviny*. V nasledujúcich paragrafoch uvedieme pojem rovnobežného premietania, odvodíme jeho najdôležitejšie vlastnosti, špeciálne vlastnosti premietania pravouhlého/ortogonálneho. Ďalej uvedieme základnú vetu šikmej axonometrie, ktorá je teoretickým východiskom pre zobrazovanie telies vo voľnom rovnobežnom premietaní. Paragraf o zobrazovaní základných telies uzatvára túto kapitolu diplomovej práce.

5.2.1 Princíp a základné vlastnosti rovnobežného premietania

Definícia 5.19

a) Nech sú dané pevná priamka l a pevná s ňou rôznobežná rovina π trojrozmerného euklidovského priestoru $\boldsymbol{E_3}$. Zobrazenie f množiny všetkých bodov priestoru $\boldsymbol{E_3}$, ktoré každému bodu A priradí priesečník priamky l^A $(A \in l^A \wedge l^A \parallel l)$ s rovinou π nazývame *rovnobežné premietanie* do roviny π (označenie $f_{(\pi,\, l)}$). $f : \boldsymbol{E_3} \to \pi$, $f : A \mapsto l^A \cap \pi = A'$
Priamku l^A nazývame *premietacia priamka bodu A*, rovinu π *priemetňa* a osnovu priamky l *osnova premietania f*. Bod $A' = f(A)$ sa nazýva *rovnobežným priemetom bodu A* v danom rovnobežnom premietaní *f*. (Obr. 5.17a)

---

[47] S pojmom úplnosti obrazu útvaru ***U*** sa možno zoznámiť v [12].

b) *Rovnobežným priemetom* ***U'*** ľubovoľného geometrického útvaru ***U*** sa bude nazývať množina rovnobežných priemetov všetkých bodov útvaru ***U***.

c) *Premietacím útvarom daného geometrického útvaru* ***U*** nazývame množinu bodov premietacích priamok všetkých bodov útvaru ***U*** (označenie *P*(***U***)). *Obrysom* geometrického útvaru ***U*** v danom rovnobežnom premietaní budeme nazývať viditeľnú časť[48] prieniku hranice premietacieho útvaru *P*(***U***) s útvarom ***U***.

d) Nech p je ľubovoľná priamka, ktorá je s priemetňou rôznobežná. Jej priesečník s priemetňou budeme nazývať *stopník priamky p* (označenie $P^{\,p}$). Analogicky priesečnicu ľubovoľnej roviny $\alpha\,(\alpha \nparallel \pi)$ s priemetňou budeme nazývať stopou roviny α (označenie p^{α}).

e) V prípade kolmosti priamky l danej osnovy premietania s priemetňou hovoríme o *kolmom* (*pravouhlom* alebo *ortogonálnom*) *premietaní*.

Dôsledok 5.4

1. Rovnobežný priemet útvaru ***U*** je prienikom príslušného premietacieho útvaru *P*(***U***) s priemetňou.
2. Všetky body priemetne π sú totožné so svojimi priemetmi.
3. Rovnobežné premietanie zachováva incidenciu geometrických útvarov.

Veta 5.16

a) Rovnobežným priemetom priamky, ktorá nepatrí do osnovy premietania, je priamka.
b) Rovnobežným priemetom priamky, ktorá patrí do osnovy premietania, je bod.

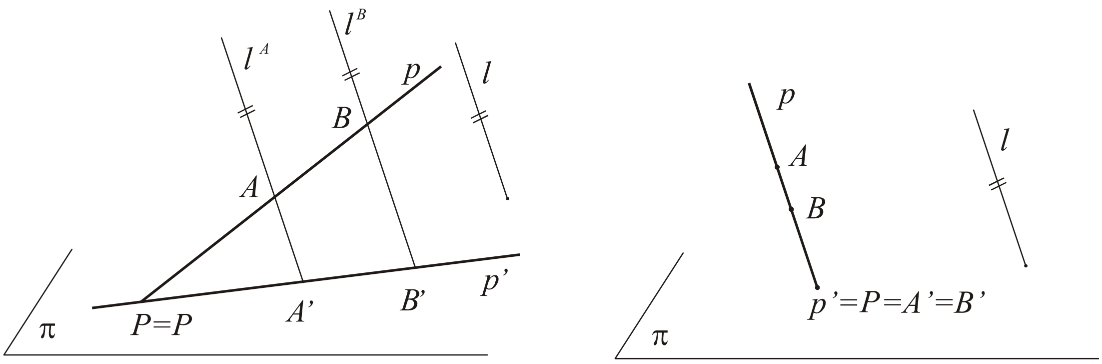
Dôkaz

a) Nech priamka p nepatrí do osnovy premietania. Jej premietacím útvarom je v tomto prípade rovina $\sigma^{p}\,(\,p \in \sigma^{p} \wedge \sigma^{p} \parallel l\,)$[49] a podľa dôsledku 5.1 je rovnobežným priemetom p' priamky p priesečnica tejto roviny s priemetňou ($p' = \sigma^{p} \cap \pi$). (Obr. 5.17 a)

b) Nech priamka p patrí do osnovy premietania . Potom priemety všetkých jej bodov sú totožné s jej stopníkom P, ktorý je priemetom priamky p, teda $p' = P$. (Obr. 5.17 b)

[48] Pojem viditeľnosti útvaru ***U*** v danom rovnobežnom premietaní sa vysvetlí v riešení úloh v záverečnom podparagrafe 5.2.4 práce.

[49] Úloha 3, kapitola 3.



Obr. 5.17 a, b

Poznámka 5.10

1. Rovinu σ^p z dôkazu predchádzajúcej vety nazývame *premietacia rovina priamky p*. Rovina σ^p je zjednotením premietacích priamok všetkých bodov priamky *p*.
2. Každá rovina $\lambda\,(\lambda \parallel l)$ je premietacou rovinou každej svojej priamky, ktorá nepatrí do osnovy premietania. Preto budeme takúto rovinu nazývať *premietacia rovina*. Rovnobežným priemetom premietacej roviny je priamka (priesečnica roviny s priemetňou).
3. Nech *p* je priamka, ktorá nepatrí do osnovy premietania. Ak je stopník *P* priamky dostupným bodom, stačí zostrojiť rovnobežný priemet jedného bodu *A* ($A \neq P$). Potom $p' = \overleftrightarrow{A'P'}$ ($P = P'$). V opačnom prípade je potrebné zostrojiť priemet B' ďalšieho bodu priamky. Ak je priamka *p* s priemetňou rovnobežná a neleží v nej, tak jej rovnobežný priemet p' je priamka s ňou rovnobežná a stačí zostrojiť priemet jedného jej bodu.[50]

Je zrejmé, že rovnobežným priemetom roviny, ktorá nie je *premietacou rovinou*, je celá priemetňa. V tomto prípade ide o perspektívnu afinitu medzi danou rovinou a priemetňou [13]. Keďže každá rovina je určená dvojicou priamok, ktoré sú alebo rovnobežné alebo rôznobežné, budeme sa v ďalšom zaoberať rovnobežným priemetom dvojíc priamok. Najprv vezmeme do úvahy dvojice priamok, z ktorých žiadna nie je premietacia.

Veta 5.17

Nech z priamok *a*, *b* ($b \neq a$) nepatrí žiadna do osnovy premietania. Potom pre ich rovnobežné priemety a', b' platí:

1. $a \parallel b \Rightarrow a' \parallel b' \vee a' = b'$

[50] Rovnobežnosť priamok p, p' je dôsledkom vety 2.1 (kritérium rovnobežnosti priamky a roviny).

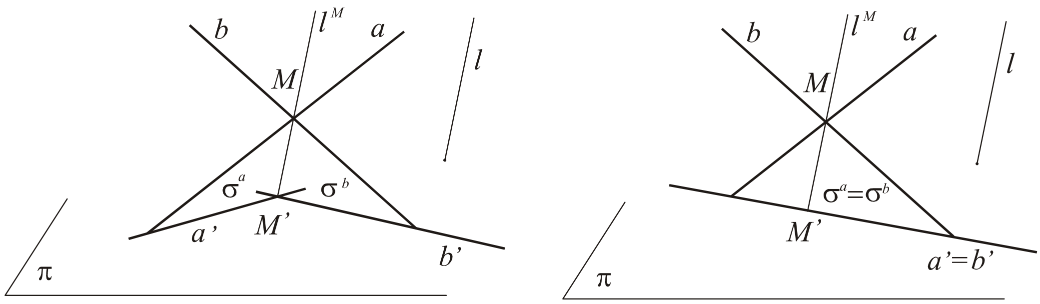
2. Ak sú priamky a, b rôznobežné, tak priamky a', b' sú alebo navzájom rôznobežné alebo $a' = b'$.

3. Ak sú priamky a, b navzájom mimobežné, tak sú priamky a', b' alebo rôznobežné alebo sú to dve navzájom rôzne rovnobežky.

Dôkaz

1. V prípade $a \parallel b$ je zrejmé, že premietacie roviny σ^a, σ^b sú navzájom rovnobežné[51]. Ak sú tieto roviny navzájom rovnobežné rôzne, tak aj ich priesečnice s priemetňou sú navzájom rôzne rovnobežky[52]. V prípade $\sigma^a = \sigma^b$ je $a' = b'$.

2. V prípade rôznobežiek sú premietacie roviny σ^a, σ^b navzájom rôznobežné, alebo $\sigma^a = \sigma^b$. V prvom prípade majú roviny σ^a, σ^b spoločnú premietaciu priamku l^M spoločného bodu $M = a \cap b$. Zrejme platí: $a' \cap b' = \{M'\}$. V prípade $\sigma^a = \sigma^b$ je $a' = b'$. (Obr. 5.18 a, b)

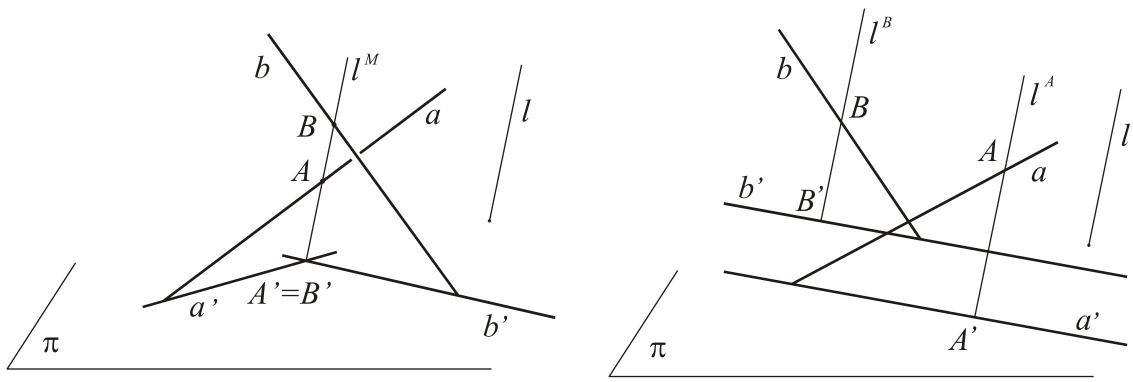


Obr. 5.18 a, b

3. Premietacie roviny mimobežných priamok a, b môžu byť alebo navzájom rôznobežné alebo navzájom rovnobežné rôzne, teda aj ich priesečnice a', b' s priemetňou sú alebo rôznobežné priamky alebo $a' \parallel b'$ ($a' \neq b'$). V prvom prípade priesečník priamok a', b' je priemetom niektorého bodu A priamky a a niektorého bodu $B \neq A$ priamky b. Priamka AB je teda spoločnou premietacou priamkou bodov A, B a priesečnicou premietacích rovín priamok a, b (obr. 5.19a).

[51] Kritérium rovnobežnosti dvoch rovín, veta 2.5.

[52] Veta 2.8.



Obr. 5.19 a, b

Veta 5.18

Nech z priamok a, b $(b \neq a)$ priamka a patrí do osnovy premietania. Potom pre ich rovnobežné priemety a', b' platí:

a) Ak sú priamky a, b rovnobežné, tak a', b' je dvojica navzájom rôznych bodov.

b) Ak sú priamky a, b navzájom rôznobežné, tak a' je bod a b' je priamka s ním incidentná.

c) Ak sú priamky a, b navzájom mimobežné, tak a' je bod a b' je priamka s ním neincidentná.[53]

Z planimetrických poznatkov vyplývajú nasledujúce vlastnosti rovnobežného premietania:

Veta 5.19[54]

Nech A, B sú dva rôzne body priamky, ktorá nepatrí do osnovy premietania a nech A', B' sú rovnobežné priemety bodov A, B. Potom platí:

a) Rovnobežným priemetom úsečky AB je úsečka $A'B'$.

b) Rovnobežným priemetom polpriamky AB je polpriamka $A'B'$.

c) Rovnobežné premietanie zachováva usporiadanie na priamke.

Veta 5.20

a) Ak M je neprázdna konvexná množina bodov, potom aj jej rovnobežným priemetom M' je neprázdna konvexná množina bodov.

[53] Dôkaz tvrdení vety 5.18 sa pre jednoduchosť necháva čitateľovi.

[54] Dôkaz tvrdenia 5.19a sa ničím nelíši od analogického planimetrického tvrdenia (veta 3.2.5, [15]), kde je dokázaná i vlastnosť 5.19c. Skompletizovanie dôkazu sa necháva čitateľovi.

b) Rovnobežným priemetom konvexného n-uholníka, ktorý neleží v premietacej rovine, je konvexný n-uholník.

c) Rovnobežným priemetom konvexného n-uholníka, ktorého rovina je premietacia, je úsečka.

Veta 5.21

Nech nenulová úsečka AB je časťou priamky p, ktorá je rovnobežná s priemetňou. Potom jej rovnobežným priemetom je úsečka s ňou zhodná.

Dôkaz

Ak priamka $\overleftrightarrow{AB}$ leží v priemetni, nie je čo dokazovať. Ak priamka p neleží v priemetni, tak je rovnobežná so svojím priemetom p', t.j. $AA' \| BB'$. Útvar $ABB'A'$ je rovnobežník, odkiaľ vyplýva záver tvrdenia.

Veta 5.22

Rovnobežné premietanie roviny α do priemetne π je zhodnostným zobrazením roviny α na rovinu π práve vtedy, keď rovina α je rovnobežná s priemetňou π alebo rovina α je súmerne združená s priemetňou π podľa ľubovoľnej roviny λ kolmej na osnovu premietania.[55]

Dôkaz

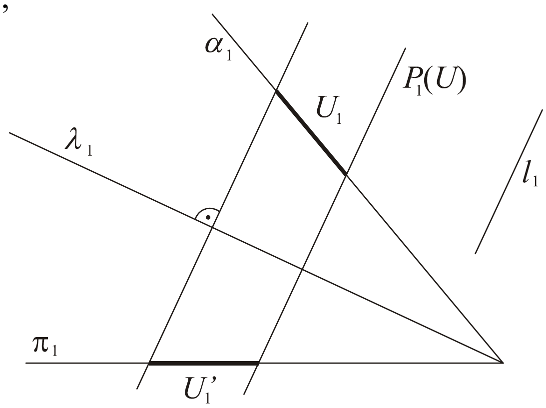
I. (*dostačujúca podmienka*)

Nech A, B, C sú ľubovoľné nekolineárne body roviny α ($\alpha \| \pi$) a A', B', C' ich rovnobežné priemety. Podľa vety 5.19 sú trojuholníky $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$ navzájom zhodné (sss). Pretože platí: $AA' \uparrow\uparrow BB' \uparrow\uparrow CC' \wedge AA' \cong BB' \cong CC'$, je uvažované rovnobežné premietanie posunutím.

Nech je α ľubovoľná rovina, ktorá nie je rovnobežná s rovinou π. Zostrojme rovinu λ, ktorá je jednou z rovín súmernosti roviny α a priemetne a zvoľme si osnovu premietania $\{l\}$ tak, aby priamka l bola kolmá na rovinu λ. (Na obr. 5.20 sú všetky objekty zobrazené v kolmom premietaní do roviny kolmej na priesečnicu rovín π a α. Keďže touto priamkou

[55] S vlastnosťami zhodnostných zobrazení euklidovského priestoru $\boldsymbol{E_3}$ sa možno oboznámiť v prednáške z Geometrie 2 (analytický prístup) alebo v [11]. S ohľadom na rozsah tejto práce sa syntetické štúdium izometrií priestoru $\boldsymbol{E_3}$ vynechalo. Považujú sa za známe pojmy: posunutie, súmernosť podľa roviny, otáčanie jednej roviny do druhej okolo spoločnej priesečnice a otáčanie okolo priamky.

prechádzajú všetky tri roviny π, α, λ, priemetňu si tak môžeme vždy zvoliť; kolmé priemety všetkých rovín zväzku s osou $(\alpha \cap \pi)$ do tejto pomocnej priemetne sú priamky. Ak označíme „1" index priemetov útvarov, platí: $\sphericalangle \lambda\alpha \cong \sphericalangle \lambda\pi \cong \sphericalangle \lambda_1\alpha_1 \cong \sphericalangle \lambda_1\pi_1$.) Nech $\boldsymbol{U} \subset \alpha$ je ľubovoľný geometrický útvar roviny α a $f_{\pi,\,l}$ rovnobežné premietanie.Premietací útvar $P(\boldsymbol{U})$ (prislúchajúci útvaru $\boldsymbol{U}$ v premietaní $f_{\pi,\,l}$) je súmerne združený podľa roviny λ, t.j. obraz i vzor každého bodu premietacieho útvaru $P(\boldsymbol{U})$ v súmernosti φ_λ podľa roviny λ leží na útvare $P(\boldsymbol{U})$. Podľa konštrukcie je $(\alpha') = \varphi_\lambda((\alpha))$, kde (α') je rovinné pole súmiestne s rovinným poľom (π). Platí teda: $\varphi_\lambda : P(\boldsymbol{U}) \mapsto P(\boldsymbol{U})$ a $\varphi_\lambda : (\alpha) \mapsto (\alpha')$, t.j. $\varphi_\lambda : P(\boldsymbol{U}) \cap \alpha \mapsto P(\boldsymbol{U}) \cap \pi$. Pretože $P(\boldsymbol{U}) \cap \alpha = \boldsymbol{U}$, $P(\boldsymbol{U}) \cap \pi = \boldsymbol{U'}$ a φ_λ je zhodnostné zobrazenie, útvary $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{U'}$ sú navzájom zhodné.



Obr. 5.20

II. (*nutná podmienka*)

V prípade roviny rovnobežnej s priemetňou niet čo dokazovať. Stačí dokázať, že ak je rovina α rôznobežná s priemetňou a pre ľubovoľný útvar $\boldsymbol{U} \subset \alpha$ obsahujúci aspoň tri nekolineárne body je rovnobežný priemet tohto útvaru v premietaní $\varphi_{\pi,l}$ útvar $\boldsymbol{U'}$ s ním zhodný, tak je osnova $\{l\}$ premietania kolmá na jednu z rovín súmernosti rovín α a π. Rovnobežné premietanie $\varphi_{\pi,l}$ zúžené na rovinu α je perspektívnou afinitou medzi rovinami α, π s bodovo samodružnou rovinou λ, ktorá obsahuje priamku $\alpha \cap \pi$. Ale *perspektívna afinita* v priestore $\boldsymbol{E_3}$ je izometriou práve vtedy, keď je súmernosťou podľa roviny (vyplýva to z klasifikácie izometrií); rovina λ je zrejme jednou z rovín súmernosti rovín α, π a $l \perp \lambda$.

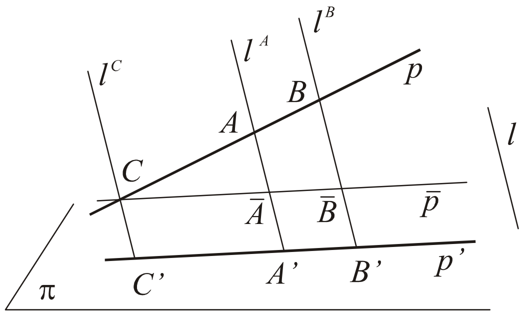
Na záver tohto podparagrafu uvedieme ešte jednu dôležitú vlastnosť rovnobežného premietania, a to zachovanie deliaceho pomeru usporiadanej trojice navzájom rôznych kolineárnych bodov (ak sa nejedná o body priamky patriacej do osnovy premietania). Dokážeme nasledujúcu vetu

Veta 5.23

Nech A, B, C sú tri rôzne body priamky, ktorá nepatrí do osnovy premietania a A', B', C' sú ich rovnobežné priemety (v danom poradí). Potom A', B', C' sú navzájom rôzne kolineárne body, pre ktoré platí: $(ABC) = (A'B'C')$.

Dôkaz

Rovnobežným priemetom p' priamky p je priamka (veta 5.1) (obr. 5.21). Označme $\overline{p}$ priamku, pre ktorú platí $C \in \overline{p} \wedge \overline{p} \parallel p'$ (ak $C \neq C'$)[56]. Priesečníky osnovových priamok l^A, l^B bodov A, B s priamkou $\overline{p}$ označme v danom poradí $\overline{A}, \overline{B}$. O trojuholníkoch $C\overline{A}A$, $C\overline{B}B$ platí, že sú podobné (veta *uu*), teda pre pomery dĺžok ich strán platí: $\left|\overline{A}C\right| : \left|\overline{B}C\right| = \left|AC\right| : \left|BC\right|$. Pomer $\left|\overline{A}C\right| : \left|\overline{B}C\right|$ je absolútnou hodnotou deliaceho pomeru ($\overline{A}\overline{B}C$) a analogicky $\left|AC\right| : \left|BC\right|$ = $\left|(ABC)\right|$. Ale usporiadanie bodov priamky sa rovnobežným premietaním zachováva (veta 5.4), teda pri ľubovoľnom usporiadaní bodovej trojice A, B, C platí: (ABC) = ($\overline{A}\overline{B}C$). Navyše $\left|C\overline{A}\right| = \left|C'A'\right|$, $\left|C\overline{B}\right| = \left|C'B'\right|$, teda z rovnosti $\left|\overline{A}C\right| : \left|\overline{B}C\right| = \left|A'C'\right| : \left|B'C'\right|$ vyplýva ($\overline{A}\overline{B}C$) = ($A'B'C'$). Dokázali sme ($ABC$) = ($\overline{A}\overline{B}C$) = ($A'B'C'$), teda aj ($ABC$) = ($A'B'C'$).



Obr. 5.21

Pripomeňme si definíciu *deliaceho pomeru usporiadanej trojice navzájom rôznych kolineárnych bodov A*, *B*, *C*. Rozumieme ním reálne číslo λ ($\lambda \neq 0, \lambda \neq 1$), ktorého absolútna hodnota sa rovná pomeru dĺžok úsečiek AC a BC, a ktoré je kladné v prípade súhlasnej a záporné v prípade nesúhlasnej orientácie úsečiek AC, BC.

$$|\lambda| = \frac{|AC|}{|BC|}$$

[56] V prípade $C = C'$ možno dôkaz urobiť bez konštrukcie priamky $\overline{p}$.

Zobrazenie množiny všetkých bodov priamky AB (s výnimkou bodov A, B ($B \neq A$) na množinu $R - \{0, 1\}$ je bijektívnym priradením. Znamená to, že každý ďalší bod C priamky AB je svojím deliacim pomerom vzhľadom na *základné body* A, B (t.j. reálnym číslom $\lambda = (ABC)(\lambda \neq 0, \lambda \neq 1)$) jednoznačne určený. To nám umožňuje pohodlnú formuláciu stereometrických úloh, kde je spravidla určené nejaké referenčné teleso a geometrické útvary sú uvažované napríklad bodmi jeho hrán alebo bodmi priamok v stenách, telesových uhlopriečok a pod.

Na záver urobíme zhrnutie najdôležitejších vlastností rovnobežného premietania a jeho invariantov. Pod invariantnou vlastnosťou rovnobežného premietania rozumieme vlastnosť útvarov, ktorá sa v tomto premietaní zachováva; invariantom rozumieme reálne číslo priradené útvaru (alebo viacerým útvarom), ktoré sa taktiež v (každom) rovnobežnom premietaní zachováva. Niektoré vlastnosti sú jednoduchými dôsledkami už uvedených viet, preto sa nebudú dokazovať. Platí teda:

Základnými invariantnými vlastnosťami rovnobežného premietania sú: a) incidencia útvarov, b) rovnobežnosť priamok[57] nepatriacich do osnovy premietania. *Základným invariantom* rovnobežného premietania je deliaci pomer usporiadanej trojice navzájom kolineárnych bodov.

Dôsledok 5.5

1. Ďalšie (odvodené) invariantné vlastnosti útvarov vzhľadom na rovnobežné premietanie sú (priamka alebo rovina incidentná s útvarom nie je premietacia): vlastnosť byť rovnobežníkom; byť lichobežníkom; byť stredom úsečky; delenie úsečky na n zhodných úsečiek; dvojica bodov A, B oddeľovaná dvojicou bodov C, D (A, B, C, D je usporiadaná štvorica navzájom rôznych kolineárnych bodov); dvojica priamok a, b oddeľovaná dvojicou priamok c, d (a, b, c, d je usporiadaná štvorica navzájom rôznych priamok jedného zväzku priamok); zachovanie usporiadania trojice navzájom rôznych kolineárnych bodov a následne trojice navzájom rôznych priamok jedného zväzku; vlastnosť byť konvexným n-uholníkom, jeho vnútorným či vonkajším uhlom; konvexnosť ľubovoľnej bodovej množiny a ďalšie.

2. Ďalšími invariantmi rovnobežného premietania sú (priamka alebo rovina incidentná s útvarom nie je premietacia): dvojpomer usporiadanej štvorice navzájom rôznych

[57]Pod rovnobežnými priamkami rozumieme i totožné priamky ($a \| b \Rightarrow a' \| b'$, kde v prípade spoločnej premietacej roviny priamok a, b je $a' = b'$).

kolineárnych bodov; pomer dĺžok úsečiek na rovnobežných priamkach; koeficient rovnoľahlosti dvoch rovnoľahlých útvarov roviny; pomer obsahov rovinných útvarov a pod.[58]

5.2.2 Pravouhlé premietanie

Pravouhlé premietanie je špeciálnym prípadom rovnobežného premietania, preto má všetky vlastnosti rovnobežného premietania. Formuláciu viet vyjadrujúcich tieto vlastnosti nebudeme uvádzať. Stačí ju upraviť na základe toho, že osnova priamky l je kolmá na priemetňu π. Ako príklad uvedieme formuláciu vety 5.1

a) Pravouhlým priemetom priamky, ktorá nie je kolmá na priemetňu, je priamka.

b) Pravouhlým priemetom priamky, ktorá je kolmá na priemetňu, je bod.

Čitateľ si ľahko upraví formuláciu ďalších viet a dôsledkov uvedených v predchádzajúcom paragrafe. Ďalej uvedieme len najdôležitejšie vlastnosti, ktoré sú špeciálnymi vlastnosťami pravouhlého premietania.

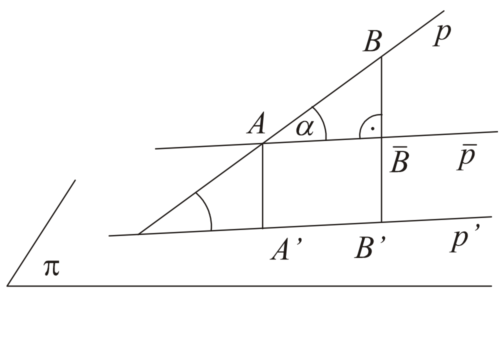
Veta 5.24

Dĺžka pravouhlého priemetu $A'B'$ úsečky AB ($AB \not\perp \pi$) sa rovná $|AB|.\cos|\alpha|$, kde α je uhol zhodný s uhlom priamky AB s priemetňou ($0^\circ \leq |\alpha| < 90^\circ$).

Dôkaz

Predpokladajme, že úsečka AB nie je rovnobežná s priemetňou ($0^\circ \leq |\alpha| < 90^\circ$) (obr. 5.22). Potom pravouhlým priemetom úsečky AB je úsečka $A'B'$. Zostrojme jedným z krajných bodov úsečky priamku p rovnobežnú s priemetňou (napr. $A \in p$); jej priesečník s premietacou priamkou l^B bodu B, označme $\overline{B}$.

V pravouhlom trojuholníku $\triangle A\overline{B}B$, v ktorom je uhol α pri vrchole A zhodný s uhlom priamky AB s priemetňou (def. 4.4), odtiaľ vyplýva: $|A\overline{B}| = |AB|.\cos|\alpha|$ a následne $|A'B'| = |AB|.\cos|\alpha|$. (Útvar $A'B'\overline{B}A$ je pravouholník.)



Obr. 5.22

[58] Podrobné dôkazy spomenutých vlastností čitateľ nájde v [8].

Ak $|\alpha| = 0$, tak $AB \parallel \pi$. Podľa vety 5.6 potom $|A'B'| = |AB|.\cos 0$, t.j. $|A'B'| = |AB|$. V prípade rovnobežnosti priamky s priemetňou je uhol priamky s priemetňou nulovým uhlom, pre veľkosť ktorého funkcia kosínus nadobúda hodnotu 1. Platí teda $A'B' \cong AB$, čo je v súlade s vetou 5.6.

Dôsledok 5.6

Pre dĺžku pravouhlého priemetu $A'B'$ úsečky AB platí $|A'B'| \leq |AB|$, pričom rovnosť nastane práve vtedy, ak priamka AB je rovnobežná s priemetňou.

Veta 5.25

Pravouhlé premietanie roviny ρ na rovinu π je zhodnostným zobrazením práve vtedy, keď je rovina ρ rovnobežná s priemetňou.

Nakoniec uvedieme jednu z najdôležitejších vlastností pravého uhla vzhľadom na ortogonálne premietanie, ktoré má význam predovšetkým v zobrazovacích metódach deskriptívnej geometrie, v ktorých jednou zložkou je pravouhlé premietanie.

Veta 5.26

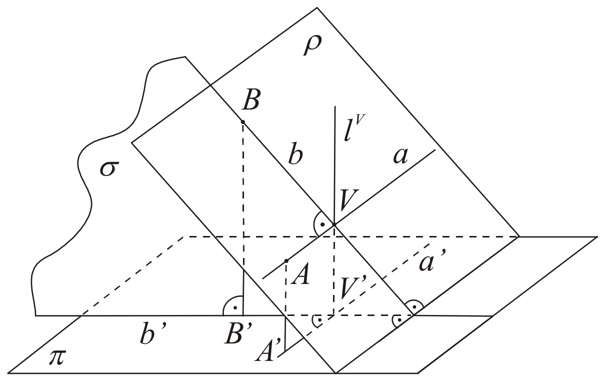
Nech je uhol $\sphericalangle AVB$ zhodný s pravým uhlom, pričom žiadne z jeho ramien nepatrí do osnovy premietania a uhol leží v rovine ρ rôznobežnej s priemetňou, ktorá nie je premietacou rovinou ($\rho \not\perp \pi \wedge \rho \nparallel \pi$). Potom platí: ortogonálnym priemetom uhla $\sphericalangle AVB$ je pravý uhol práve vtedy, ak jedno z jeho ramien je rovnobežné s priemetňou.

Dôkaz

Nech žiadne z ramien uhla nepatrí do osnovy premietania a rovina uhla má požadovanú vlastnosť. Pravouhlé priemety ramien VA, VB uhla sú polpriamky $V'A'$, $V'B'$. (Obr. 5.23) Označme *a*, *b* priamky, ktoré sú nositeľkami ramien VA, VB daného uhla (v tomto poradí).

a) (*nutnosť*) Najprv dokážeme, že z predpokladu $a \perp b$, $a \parallel \pi$ vyplýva $a' \perp b'$. Premietacia priamka l^V vrcholu V daného uhla je kolmá na priemetňu a nie je incidentná so žiadnym z jeho ramien. Platí: $a \perp b \wedge a \perp l^V$, t.j. priamka a je kolmá na premietaciu rovinu $\sigma^b = \overleftrightarrow{bl^V}$ priamky *b*. Priamka a je kolmá na všetky priamky roviny σ^b, teda aj na jej priesečnicu b' s priemetňou ($b' = \sigma^b \cap \pi$), teda $a \perp b'$. Zrejme platí $a' \parallel a$, a teda $a' \perp b'$.

b) (*dostatočnosť*) Dokážeme, že z predpokladu $a \perp b$, $a' \perp b'$ vyplýva, že jedno z ramien $\overrightarrow{VA}$, $\overrightarrow{VB}$ daného pravého uhla je rovnobežné s priemetňou. Označme l^V priesečnicu premietacích rovín σ^a, σ^b priamok *a*, *b* (je to zrejme premietacia priamka vrcholu uhla. Z predpokladov vo vete je zrejmé, že aspoň jedna z priamok *a*, *b* je rôznobežná s priemetňou; nech je ňou priamka *b*. Z kolmosti priamky b' na rovinu $\sigma^a = \overleftrightarrow{al^V}$ $(b' \perp a', b' \perp l^V)$ vyplýva i kolmosť priamky b' na priamku *a* tejto roviny. Navyše platí: $b \perp a$ (predpoklad). Teda priamka *a* je kolmá na rôznobežné priamky b, b' premietacej roviny σ^b priamky *b*, odkiaľ je zrejmá jej kolmosť na túto rovinu. Zároveň platí: $a' \perp \sigma^b$, t.j. $a \parallel a'$, čo je dostačujúcou podmienkou pre rovnobežnosť priamky *a* s priemetňou.



Obr. 5.23

5.2.3 Veta Pohlke – Schwarzova

O vete Pohlkeho-Schwarzovej vieme, že je základnou vetou zobrazovacej metódy šikmej axonometrie. Základom tejto zobrazovacej metódy je rovnobežné premietanie do axonometrickej priemetne za predpokladu, že je v axonometrickej priemetni daný rovnobežný [= axonometrický] priemet bázy ortonormálnej súradnicovej sústavy $\langle O; E^x, E^y, E^z \rangle$. Obrazom každého bodu *M* priestoru je usporiadaná dvojica bodov (M_K, M_{1K}) – axonometrický priemet a axonometrický pôdorys bodu, ktoré alebo ležia na prvej ordinále, alebo sú totožné. Jednou z výhod takéhoto zobrazenia je jeho názornosť a možnosť merania základných rozmerov objektu z jeho rovnobežného priemetu pri vhodnom umiestnení objektu vzhľadom na bázu súradnicovej sústavy. Usporiadanou dvojicou bodov (M_K, M_{1K}) je určený tzv. určujúci rovnobežnosten bodu *M* (v prípade ortonormálnej súradnicovej sústavy kváder), z ktorého možno priamo stanoviť súradnice daného bodu. Jediným problémom, ktorý zostáva vyriešiť je otázka voľby *axonometrickej súradnicovej sústavy* $\langle O; E^x, E^y, E^z \rangle$.

Z histórie dôkazu Pohlkeho-Schwarzovej vety

O vyriešenie problému voľby axonometrickej súradnicovej sústavy sa ako prvý pokúsil Karl Pohlke (1810 – 1876), profesor deskriptívnej geometrie na technickej vysokej škole v Berlíne. Prvé znenie vety Pohlke vyslovil už r. 1853 ako učiteľ stavebnej akadémie v Berlíne. Pretože formulácia nebola celkom korektná a Pohlke neuviedol dôkaz tvrdenia, vznikli pochybnosti o jeho pravdivosti. To primälo autora výroku k podrobnejšiemu skúmaniu podmienok, ktoré musí spĺňať štvorica komplanárnych bodov na to, aby ju bolo možné považovať za rovnobežný priemet bázy $\langle O; E^x, E^y, E^z \rangle$ ortonormálnej súradnicovej sústavy. Znenie *základnej vety šikmej axonometrie* uviedol Pohlke do prvého dielu svojej učebnice *Deskriptívna geometria* (r. 1860, Berlín) bez dôkazu a s upozornením, že elementárny dôkaz vety pravdepodobne neexistuje, a preto sa odkladá (pre náročnosť) do druhého dielu učebnice. Ešte pred druhým vydaním prvého dielu učebnice sa objavili tri dôkazy vety, z ktorých úplným a geniálne jednoduchým bol dôkaz mladého H. Schwarza, Pohlkeho žiaka. Tento dôkaz sa dodnes uvádza vo všetkých učebniciach deskriptívnej geometrie. Pohlkeho dôkaz uverejnený nebol a zostal ešte viac než desaťročie neznámym. Schwarzov dôkaz bol – po dohode s Pohlkem – uverejnený v druhom vydaní prvého dielu Pohlkeho učebnice deskriptívnej geometrie.

Schwarz (1843 – 1921) dokázal zovšeobecnené tvrdenie v tvare „*Ľubovoľné tri komplanárne úsečky $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ s vlastnosťou, že najviac tri z bodov O', X', Y', Z' sú kolineárne, možno považovať za rovnobežný priemet troch úsečiek OX, OY, OZ (neležiacich v jednej rovine), pre ktoré sú známe pomery ich dĺžok a vzájomné uhly*“. V priebehu ďalšieho polstoročia vyšli mnohé dôkazy Pohlkeho originálneho i Schwarzovho zovšeobecneného tvrdenia. Pripomenieme dôkaz Karla Pelza (1845 – 1903), vynikajúceho českého geometra svetového mena, uverejneného v spise „*O novom dôkaze Pohlkeho vety*“ vo Viedni r. 1877. H. Schwarz v ňom rozpoznal originálny Pohlkeho dôkaz, s ktorým bol oboznámený, ale ho nedokázal reprodukovať a Pohlke v tom čase už nežil. Ďalší vrcholný český matematik svojej doby, Jan Sobotka, riešil problém analyticky („*K matematickému štúdiu axonometrie*“, Praha 1900). Analytický algebrik a geometer Arthur Cayley uviedol r. 1875 elegantný analytický dôkaz. O význame vety nasvedčuje i fakt, že sám Felix Klein (1849 – 1925), geniálny nemecký matematik (profesor univerzity v Erlangene a

Goettingene)[59] uverejnil analytický dôkaz vety v knihe „*Elementárna matematika z vyššieho hľadiska, Geometria II.*" (Berlín1908), adresovanej predovšetkým stredoškolským učiteľom geometrie. Treba pripomenúť, že Klein sa na prelome 19. a 20. storočia priamo angažoval za prestavbu obsahu stredoškolského štúdia matematiky a v tejto súvislosti za didaktickú transpozíciu najnovších vedeckých výsledkov v matematike do obsahu vysokoškolskej a stredoškolskej výučby matematiky.

Náčrt Schwarzovho dôkazu zovšeobecnenej Pohlkeho vety

Veta 5.27. (Základná veta šikmej axonometrie): *Vrcholy každého rovinného štvoruholníka možno považovať za rovnobežný priemet vrcholov štvorstena vopred zvoleného tvaru* (t.j. podobného ľubovoľnému zvolenému štvorstenu).

Základom dôkazu vety je fakt, že na každej trojbokej hranolovej ploche ${}^{3}H$ existujú všetky druhy trojuholníkov. Vyjadrené exaktne: Ku každej ploche ${}^{3}H$ existuje rovina, ktorej prienik s plochou je trojuholník podobný ľubovoľnému trojuholníku. Jednoduchým dôsledkom je nasledujúce tvrdenie.

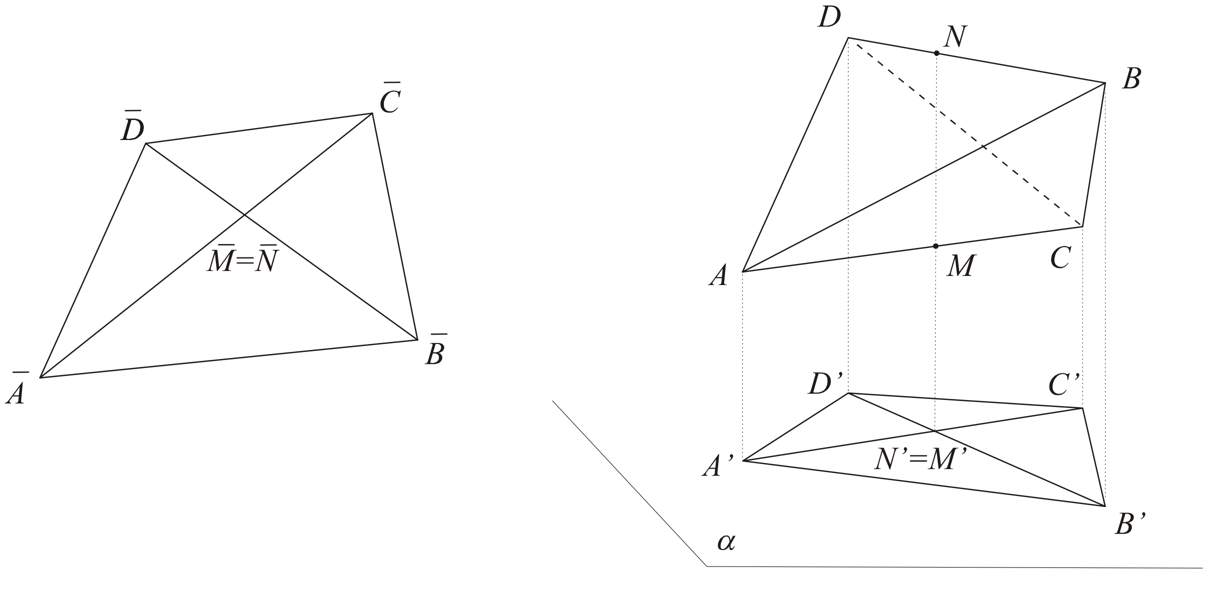
Veta 5.28. Nech ${}^{n}H$ je n-boká hranolová plocha a P_n ľubovoľný rovinný n-uholník, ktorý je afinný[60] s určujúcim n-uholníkom plochy ${}^{n}H$. Potom existuje rovina, ktorej prienik s danou plochou je n-uholník podobný n-uholníku P_n.

Je zrejmé, že stačí dokázať modifikované tvrdenie vety 5.27, a to, že existuje rovnobežné premietanie, v ktorom priemetom (do roviny) vrcholov ľubovoľne zvoleného štvorstena $ABCD$ sú vrcholy štvoruholníka $A_1B_1C_1D_1$ podobného ľubovoľnému danému štvoruholníku $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$. Ak existuje rovnobežné premietanie požadovaných vlastností, tak do priesečníka uhlopriečok predpokladaného štvoruholníka $A_1B_1C_1D_1$ priemetne (dolný index „1" označuje priemet rovnomenného bodu) sa premietnu dva body: bod M hrany AC a bod N hrany BD (s ňou mimobežnej). Pritom platí: $(A_1C_1M_1) = (\overline{A}\overline{C}\overline{M})$ a $(B_1D_1N_1) = (\overline{B}\overline{D}\overline{N})$

[59] F. Klein sa stal všeobecne známym tzv. Erlangenským programom, v ktorom načrtol program výstavby geometrie podľa charakteristických grúp transformácií.

[60] Dva n-uholníky nazývame afinnými, ak existuje afinita (bijektívne afinné zobrazenie) zobrazujúca jeden z nich do zvyšného.

(podobné štvoruholníky) a $(A_1C_1M_1) = (ACM)$ a $(B_1D_1N_1) = (BDN)$ (invariantnosť deliaceho pomeru v rovnobežnom premietaní). Ak teda zostrojíme body M, N tak, aby $(ACM) = (\overline{A}\overline{C}\overline{M})$ a $(BDN) = (\overline{B}\overline{D}\overline{N})$, osnova rovnobežného premietania požadovaných vlastností je určená priamkou MN (obr. 5.24). Premietacie priamky vrcholov štvorstena $ABCD$ sú hranami štvorbokej hranolovej plochy ${}^4H$, ktorá je hranicou premietacieho útvaru daného štvorstena. Ľubovoľný rovinný rez plochy rovinou α rôznobežnou s priamkou MN je štvoruholník $A'B'C'D'$ afinný s daným štvoruholníkom $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$. Platí totiž: $(ACM) = (A'C'M') = (\overline{A}\overline{C}\overline{M})$ a $(BDN) = (B'D'N') = \; = (\overline{B}\overline{D}\overline{N})$; posledné rovnosti vo výrazoch vyjadrujú nutnú i dostačujúcu podmienku pre to, aby štvoruholníky $A'B'C'D'$ a $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$ boli afinnými. Podľa vety 5.28 existuje rovina β, ktorej prienik s hranolovou plochou ${}^4H$ je štvoruholník $A_1B_1C_1D_1$ podobný štvoruholníku $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$.



Obr. 5.24

Ak si pozorne prečítame zovšeobecnené Schwarzovo tvrdenie (veta 5.27), musí nám byť zrejmé, že Pohlkeho veta je nielen fundamentálnou vetou zobrazovacej metódy šikmej axonometrie, ale aj zobrazovania základných telies[61] vo voľnom rovnobežnom premietaní. Možno povedať, že metóda šikmej axonometrie je teoretickým zázemím pre zobrazovanie priestorových geometrických útvarov vo voľnom rovnobežnom premietaní. V záverečných

[61] Z úvah musíme vylúčiť guľovú plochu, pre ktorú nie je konštrukcia obrysu priemetu z priemetu jej troch navzájom kolmých polpriemerov v rovnobežnom premietaní (ktoré nie je pravouhlé) elementárna a je pre stredoškolskú stereometriu neprijateľná. Guľová plocha sa preto zobrazuje v riešení stereometrických úloh v pravouhlom premietaní, kde obrysom jej priemetu je kruh.

poznámkach poukážeme na niektoré problémy súvisiace s konštrukciou obrazov geometrických útvarov vo voľnom rovnobežnom premietaní v riešení stereometrickej úlohy.

Poznámky 5. 11

1. Mimoriadne dôležitým problémom je správne zadanie úlohy (z hľadiska základnej klasifikácie stereometrických úloh na úlohy zaoberajúce sa vzájomnou polohou geometrických útvarov - *polohové úlohy a na metrické úlohy*). Na to je potrebné byť oboznámený s pojmom *úplnosti obrazu* daného *geometrického útvaru* vzhľadom na riešenie polohových, či metrických úloh. Napríklad obraz hranola je *vzhľadom na riešenie polohových úloh úplný*, ak sú dané: rovnobežné priemety troch vrcholov jednej podstavy a priemet jedného z vrcholov druhej podstavy (ležiaceho s jedným z troch vybraných bodov na tej istej hrane telesa) a „tvar" podstavového *n*-uholníka (t.j. *n*-uholník, ktorý je podobný podstavovému *n*-uholníku) v prípade $n > 3$[62]. Analogicky je obraz ihlana úplný vzhľadom na riešenie polohových úloh, ak sú dané: priemety troch vrcholov podstavy, priemet hlavného vrcholu telesa a tvar podstavového *n*-uholníka. Rovnobežné priemety spomenutých štyroch bodov si možno zvoliť ľubovoľne *vhodne* (veta *Pohlkeho-Schwarzova*). Každý ďalší geometrický útvar (priamka, rovina, atď.), vystupujúci v zadaní úlohy musí však byť určený bodmi pevne spojenými s telesom (t.j. môžu to byť body ležiace na priamkach incidentných s hranami alebo v rovinách incidentných so stenami, prípadne s ľubovoľnými dvoma bočnými hranami telesa, atď.) Podstatné je, že každý bod *M* budeme môcť dourčiť usporiadanou dvojicou bodov, a to jeho rovnobežným priemetom M' a rovnobežným priemetom M'_1 pomocného priemetu M_1 bodu *M* do roviny podstavy telesa. Toto pomocné (*vnútorné*) premietanie je v prípade hranolov určené osnovou *bočných hrán* a v prípade ihlanov ide o stredové premietanie so stredom *v hlavnom vrchole* telesa. Pri valcových a kužeľových plochách trojicu vrcholov podstavy nahradí stred podstavy a krajné body dvoch jej kolmých polpriemerov.

Aj odpoveď na otázku *úplnosti obrazu útvaru U vzhľadom na riešenie metrických úloh* (vrátane úloh súvisiacich s kolmosťou základných geometrických útvarov) dáva zobrazovacia metóda šikmej axonometrie: *treba poznať* rovnobežný priemet takzvaného *ortonormálneho štvorstena* (t.j. štvorstena, v ktorom sú všetky hrany incidentné s tým istým vrcholom

[62]Užitočným je nácvik doplnenia zvolenej trojice priemetov vrcholov podstavy tak, aby útvar po doplnení mohol byť považovaný za rovnobežný priemet pravidelného päť - či šesťuholníka alebo lichobežníka daného tvaru (príklad a cvičenia v závere kapitoly 5).

navzájom kolmé a zhodné), ktorý je pevne spojený s útvarom U[63]. Tento poznatok vyjasňuje, prečo sú *kocka*, *kváder* daných rozmerov alebo *pravidelný ihlan* s danou hranou a výškou (teda implicitne tiež kocka), tak obľúbenými telesami pri ilustrácii riešenia metrických (i polohových) stereometrických úloh. Vyhnúť sa neželanému stereotypu by umožnilo a) v riešení polohových úloh viac pracovať s rovnobežnostenmi, šikmými hranolmi, ľubovoľnými ihlanmi (s predpísanou pravidelnou podstavou alebo podstavou daného tvaru) vrátane štvorstenov[64]; b) v riešení metrických úloh by nacvičovanie algoritmov riešenia úloh o základných geometrických útvaroch mohlo štartovať z daného rovnobežného priemetu súradnicového štvorstena.

2. Po oboznámení sa s Pohlkeho vetou si iste každý uvedomuje nenáležitosť požiadaviek, či príkazov na narysovanie „*správneho*“ rovnobežného priemetu kocky (dodržiavaním nezmyselných pravidiel na „skracovanie“ hrán kolmých na priemetňu, používaním uhlomeru na nameranie predpísaného uhla, a pod.). Rovnako neprípustným je vyžadovať od žiaka rozpoznanie objektu z jeho – síce úplného obrazu vzhľadom na riešenie polohových, no neúplného vzhľadom na riešenie metrických úloh.

3. Treba si uvedomiť a osvojiť, že vo voľnom rovnobežnom premietaní nejde o premietanie pravouhlé. Konštrukcia kolmého priemetu troch navzájom kolmých zhodných úsečiek so spoločným krajným bodom (vo všeobecnej polohe) nie je totiž celkom elementárna a vyžaduje hlbšie poznatky[65].

5.2.4 Zobrazovanie základných telies vo voľnom rovnobežnom premietaní

Posledný paragraf práce – v nadväznosti na oba predchádzajúce – by nám mal dať odpoveď na otázku, s akou voľnosťou si môžeme zvoliť priemety význačných bodov určujúcich teleso požadovaných vlastností, napr. vrcholov n-bokého hranola/ihlana. Priamym dôsledkom Pohlkeho vety je, že rovnobežné priemety vrcholov ľubovoľného štvorstena si môžeme voliť ľubovoľne tak, aby tieto boli vrcholmi štvoruholníka v nákresni. Nepripustenie kolineárnej trojice bodov (spomedzi priemetov vrcholov štvorstena) má svoj význam najmä vo vyučovaní stereometrie na školskej úrovni, kde voľné rovnobežné premietanie by malo

[63]Požiadavka úplnosti útvaru ***U*** vzhľadom na riešenie polohových úloh je splnená automaticky. Zrejmá je výhodnosť voľby jednej steny základného telesa (prípadne viacerých stien) v rovine steny (stien) spomenutého štvorstena.

[64]Štvorsten si zasluhuje pozornosť už tým, že je najjednoduchším základným telesom (analógom trojuholníka v planimetrii). Pozoruhodné sú i metrické vlastnosti niektorých špeciálnych druhov štvorstenov.

[65] [14], [12], a i.

slúžiť nielen na konštrukciu z geometrického hľadiska správnych obrazov, ale by malo spĺňať ďalšie dve významné požiadavky didaktickej povahy: prvou je zabezpečenie názornosti obrazov objektov, ktorá by mala napomáhať rozvoju priestorovej predstavivosti študentov. Každý učiteľ stereometrie by si však mal uvedomiť, že základňou pre rozvoj priestorovej predstavivosti je exaktné teoretické zázemie na úrovni zodpovedajúcej vedomostným predpokladom a psychickej vyspelosti študentov, ktoré sa nedá nahradiť žiadnymi „názornými“ obrázkami, pokiaľ ich tvorba a algoritmy riešenia úloh nie sú osvojené na primeranej úrovni. Druhou, nemenej významnou požiadavkou je požiadavka jednoduchosti konštrukcií. Preto sa nielen v didaktickej, ale i technickej praxi uprednostňujú zobrazovacie metódy založené na rovnobežnom premietaní.

a) Zobrazenie n-bokého hranola *H* $({}^1A\,{}^2A\ldots{}^nA\subset\alpha;{}^1\overline{A})$, kde ${}^1A\,{}^2A\ldots{}^nA$ je jedna z podstáv telesa a ${}^1\overline{A}$ je vrchol druhej podstavy, ktorý leží s vrcholom ${}^1A$ na tej istej hrane. Z hľadiska konštrukcie obrazu vrcholov hranola vo voľnom rovnobežnom premietaní si môžeme zvoliť ľubovoľne priemety vrcholov ${}^1A, {}^2A, {}^3A, {}^1\overline{A}$ (Pohlkeho veta). Ak ide o všeobecný hranol, o ktorom nemáme žiadne informácie, zvolíme si priemety ďalších vrcholov ${}^4A,\ldots,{}^nA$ ľubovoľne tak, aby priemety ${}^1A_1, {}^2A_1,\ldots,{}^nA_1$ všetkých vrcholov jednej podstavy boli vrcholmi konvexného n-uholníka (podľa dohody je daný hranol ***H*** konvexným útvarom). Ak však poznáme tvar podstavného n-uholníka ${}^1A\,{}^2A\ldots{}^nA$ tak o jeho obraze vo voľnom rovnobežnom premietaní musí platiť, že je afinným útvarom k danému n-uholníku. Teda platí: ${}^1A_1\,{}^2A_1\ldots{}^nA_1 = f({}^1A\,{}^2A\ldots{}^nA)$, kde f je označenie spomenutej afinity. Afinita je určená napr. trojuholníkom ${}^1A\,{}^2A\,{}^3A$ a jeho obrazom ${}^1A_1\,{}^2A_1\,{}^3A_1$, ktorý sme si zvolili ľubovoľne. Doplnenie priemetov vrcholov druhej podstavy je zrejmé: z platnosti ${}^1A\,{}^1\overline{A}\uparrow\uparrow{}^2A\,{}^2\overline{A}\uparrow\uparrow\ldots\uparrow\uparrow{}^nA\,{}^n\overline{A}$ a ${}^1A\,{}^1\overline{A}\cong{}^2A\,{}^2\overline{A}\cong\ldots\cong{}^nA\,{}^n\overline{A}$ vyplýva platnosť tých istých vzťahov pre rovnobežný priemet, t.j. všetky vzťahy zostanú platné, ak ku každému bodu pridáme index „1“ pravouhlého priemetu.

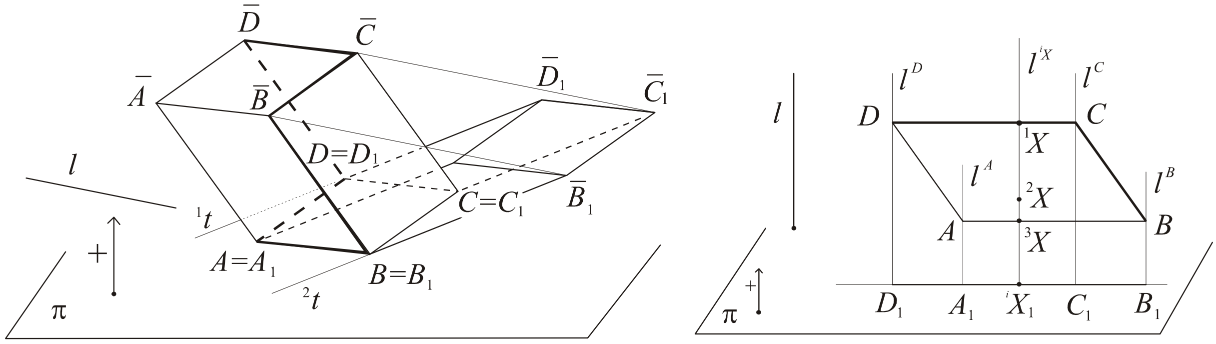
Pri rozhodovaní o obryse priemetu a následne obryse hranola ***H*** je výhodné tento považovať za množinu zhodných rovnobežných úsečiek ${}^iX\,{}^i\overline{X}$ s úsečkou ${}^1A\,{}^1\overline{A}$, pričom bod ${}^iX$ je ľubovoľný bod podstavového n-uholníka a jeho vnútra. Pre naše účely budeme predpokladať, že úsečka ${}^1A\,{}^1\overline{A}$ nepatrí do osnovy premietania. Premietacím útvarom úsečky ${}^iX\,{}^i\overline{X}$ je rovinný pás. Navyše možno predpokladať, že podstava ${}^1A\,{}^2A\ldots{}^nA$ telesa leží v priemetni, t.j. ${}^{i}A_1 = {}^{i}A$ ($i = 1, 2, ..., n$). Dve z rovín, ktoré obsahujú spomenuté rovinné pásy sú styčnými rovinami príslušnej hranolovej plochy k danému hranolu. Rovnobežným priemetom telesa bude konvexný obal množiny všetkých úsečiek ${}^{i}X_1 {}^{i}\overline{X}_1$. Hranicu rovnobežného priemetu teda (za daných podmienok) tvoria: priemety niektorých vrcholov podstavy ${}^{1}A\,{}^{2}A \ldots {}^{n}A$ telesa, niektoré („doplnkové“) priemety vrcholov druhej podstavy a priemety tých bočných hrán telesa, ktoré ležia v styčných premietacích rovinách príslušnej hranolovej plochy. Pri praktickej konštrukcii zostrojíme zvyčajne priemety všetkých vrcholov oboch podstáv telesa; priemety bočných hrán, ktoré tvoria časť obrysu priemetu telesa ležia na styčných priamkach priemetov oboch podstáv, ktoré sú rovnobežné s priemetom jednej z bočných hrán (napr. ${}^{1}A\,{}^{1}\overline{A}$). Priamka ${}^{i}A\,{}^{i}\overline{A}$ je stopou premietacej roviny obsahujúcej hranu ${}^{i}A\,{}^{i}\overline{A}$ telesa.

Na obr. 5.25a je daný rovnobežnosten $ABCD\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$ s podstavou v rovine π a jeho rovnobežný priemet v premietaní $f_{\pi,l}$. Pre podstavu $ABCD$ platí: $A = A_1$, $B = B_1$, $C = C_1$, $D = D_1$; konštrukcia priemetov vrcholov druhej podstavy, za predpokladu, že poznáme napr. priemet C vrcholu $\overline{C}$ je zrejmá. Styčné priamky oboch rovnobežníkov ležia na stopách ${}^{i}t$ styčných rovín ${}^{i}\tau$ telesa ($i = 1, 2$) a vo zvolenom prípade prechádzajú vrcholmi $B_1\overline{B}_1$ a $D_1\overline{D}_1$. Obrysom priemetu telesa je šesťuholník $A_1B_1\overline{B}_1\overline{C}_1\overline{D}_1D_1$. Obrysom hranola $\boldsymbol{H}$ v premietaní $f_{\pi,l}$ sa nazýva prienik (alebo časť prieniku) hranice premietacieho útvaru $P(\boldsymbol{H})$ s telesom. Vo zvolenom prípade je vzťah medzi bodmi hranice priemetu a ich vzormi na hranách telesa bijekciou (žiadna stena telesa neleží v premietacej rovine. Preto môžeme určiť bez ďalšieho uvažovania čiaru, ktorá je obrysom – je to lomená čiara $AB\overline{B}\overline{C}\overline{D}D$. Hranicou premietacieho útvaru $P(\boldsymbol{H})$ je šesťboká hranolová plocha s určujúcim 6-uholníkom $A_1B_1\overline{B}_1\overline{C}_1\overline{D}_1D_1 \subset \pi$ a osnovovou priamkou l).

O niečo komplikovanejšiu situáciu dostaneme, ak niektorá zo stien telesa leží v premietacej rovine. Podľa definície 5.1 obrysom útvaru $\boldsymbol{U}$ v danom rovnobežnom premietaní nazývame viditeľnú časť prieniku hranice premietacieho útvaru $P(\boldsymbol{U})$ s útvarom $\boldsymbol{U}$ ($P(\boldsymbol{U}) \cap \boldsymbol{U}$). Pri určovaní viditeľnosti musíme orientovať oba polpriestory s hranicou π, t.j. jeden si zvolíme za kladný. Princíp viditeľnosti je nasledovný:

Z dvoch bodov X, Y na tej istej premietacej priamke je viditeľný ten, pre ktorý je väčšia orientovaná vzdialenosť tohto bodu od jeho priemetu. Keďže sme si podstavu telesa zvolili v priemetni, môžeme si vybrať za kladný polpriestor ten, v ktorom leží teleso; v tomto polpriestore sú všetky orientované vzdialenosti bodov od ich priemetov kladné, teda pre body X, Y stačí overiť, ktorá z úsečiek XX_1, YY_1 je väčšia.

Na obr 5.25b má zobrazované teleso rovnobežníkovú stenu $ABCD$ v styčnej premietacej rovine. (Na obrázku je zobrazená len táto stena s jej priemetom $A_1B_1C_1D_1$.) Ktoré z hrán tejto

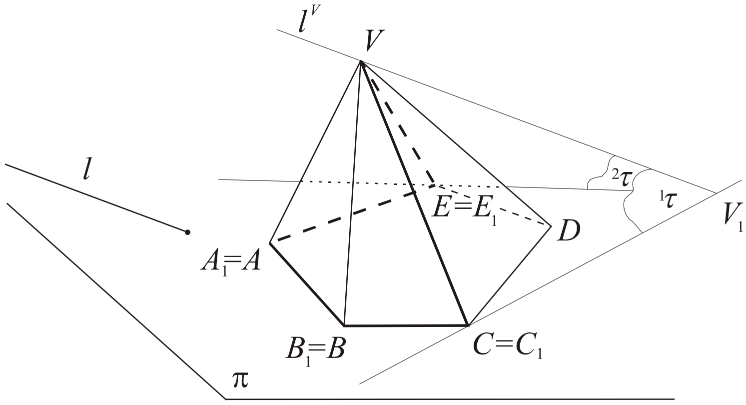


Obr. 5.25 a, b

steny patria do obrysu telesa? Orientujme oba polpriestory s hranicou π; v kladnom z nich nech leží rovnobežník $ABCD$. Je zrejmé, že pre body ${}^iX$ na premietacej priamke v stene $ABCD$ platí: $\left|{}^1X\,{}^1X_1\right| > \left|{}^2X\,{}^2X_1\right| > \ldots > \left|{}^nX\,{}^nX_1\right|$, teda z bodov ${}^iX$ je viditeľný práve bod ${}^1X$ hrany CD; analogickým postupom overíme viditeľnosť hrany BC. Teda ak uvažujeme len o zvolenom rovnobežníku $ABCD$, platí: *premietacím útvarom* rovnobežníka je *rovinný pás* (l^D, l^B); *rovnobežným priemetom rovnobežníka* je *úsečka* B_1D_1 (prienik premietacieho útvaru s priemetňou) a *obrysom rovnobežníka* je *lomená čiara BCD* (viditeľná časť prieniku premietacieho útvaru s daným rovnobežníkom a jeho vnútrom).

b) Pri **zobrazení ihlana *I*** (${}^1A\,{}^2A\ldots{}^nA \subset \alpha$; V) postupujeme analogicky. Priemetňu π si znovu zvoľme tak, aby obsahovala podstavu ${}^1A\,{}^2A\ldots{}^nA$ telesa. Pri zobrazovaní telesa vo voľnom rovnobežnom premietaní si môžeme ľubovoľne zvoliť priemety troch vrcholov podstavy a hlavného vrcholu telesa. O doplnení priemetov ďalších vrcholov podstavy platí to isté, čo pri zobrazení hranola.

Pri konštrukcii obrysu priemetu ihlana stačí zostrojiť rovnobežný priemet vrcholov podstavy a hlavného vrcholu telesa. Obrys priemetu tvorí hranica konvexného obalu množiny bodov všetkých úsečiek X_1V_1, kde bod X prebieha všetky body podstavového n-uholníka s jeho vnútrom. Premietacím útvarom úsečky XV je rovinný pás; každá z rovín všetkých rovinných pásov obsahuje premietaciu priamku l^V vrcholu V plochy (vrcholové premietacie roviny). Ak premietacia priamka l^V má s príslušným ihlanovým priestorom spoločný len vrchol, budú do obrysu priemetu telesa okrem jeho podstavných hrán patriť aj priemety bočných hrán, ktoré ležia v styčných premietacích rovinách telesa. Na obr. 5.26 je daný päťboký ihlan s podstavou $ABCDE \subset \pi$ a hlavným vrcholom V a jeho priemet v rovnobežnom premietaní $f_{\pi,\, l}$. Obrysom priemetu ihlana je päťuholník $A_1B_1C_1V_1E_1$.



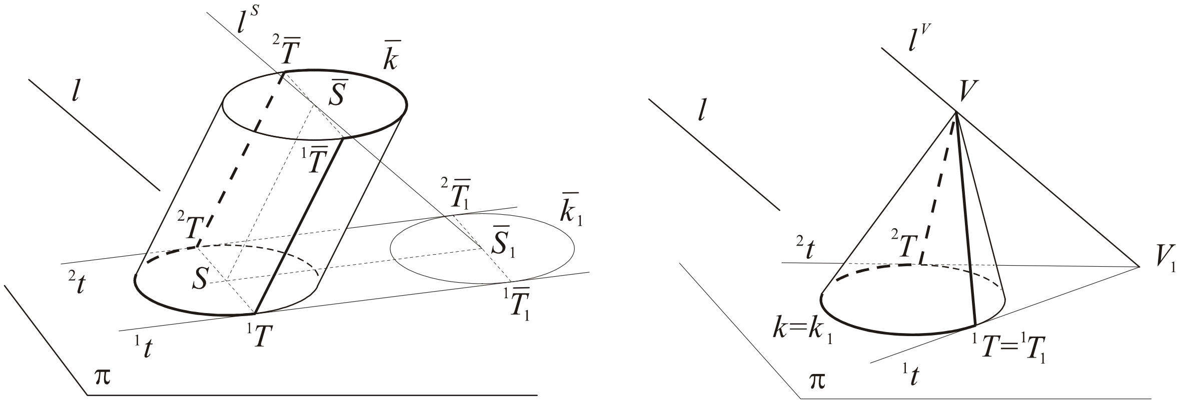
Obr. 5.26

Pretože žiadna zo stien telesa neleží v premietacej rovine, je vzťah medzi týmto päťuholníkom a zjednotením príslušných hrán telesa bijekciou a obrys telesa možno určiť priamo z rovnobežného priemetu. Je ním priestorový (nerovinný) päťuholník $ABCVE$. Obrys telesa oddeľuje viditeľnú časť jeho povrchu od neviditeľnej časti. Ak by ležala jedna bočná stena ihlana v premietacej rovine, tak by z troch hrán telesa v tejto rovine bola viditeľná práve jedna alebo dve (v závislosti od polohy priemetu V_1 hlavného vrcholu telesa a podstavovej hrany, s ktorej nositeľkou je incidentný).

c) Pri **zobrazovaní kruhového valca alebo kužeľa**, ktorých podstavy neležia v premietacích rovinách a spojnica $S\overline{S}$ stredov podstáv valca nie je premietacou priamkou [premietacia priamka vrcholu V kužeľa má s kužeľom spoločný len vrchol], obrys priemetu valca pozostáva z dvoch polelíps (incidentných s elipsami, ktoré sú hranicami priemetov jeho podstáv) a dvoch úsečiek, ktoré sú priemetmi strán valca na tvoriacich priamkach ležiacich v dotykových premietacích rovinách (t.j. ležia na spoločných dotyčniciach elíps, ktoré sú rovnobežné s priemetom $S_1\overline{S}_1$ spojnice stredov podstáv) (obr. 5.27a).

V prípade kužeľa tvorí obrys priemetu časť priemetu kružnice podstavy telesa a úsečiek ${}^iT_1V_1$ ($i = 1,2$), ktoré sú priemetmi úsečiek na tvoriacich priamkach príslušnej kužeľovej plochy, ktoré ležia v dotykových premietacích rovinách ${}^i\tau$ ($i = 1,2$) a patria danému kužeľu.

Úsečky ${}^{i}T_1V_1$ ležia na stopách dotykových rovín ${}^{i}\tau$; sú to dotyčnice ${}^{i}t$ elipsy, ktorá je priemetom kružnice ohraničujúcej podstavu kužeľa. (Obr. 5.27b)



Obr. 5.27 a, b

5.2.5 Príklady a cvičenia

Príklady a cvičenia uvedené v tejto časti považujeme len za náčrt ďalšej témy, o ktorú by bolo vhodné rozšíriť zbierku úloh zo stereometrie. S uvedenými príkladmi úzko súvisia stereometrické úlohy, súčasťou riešenia ktorých je konštrukcia priamky kolmej na ľubovoľne zvolenú rovinu. Táto rovina musí byť pevne viazaná na referenčné teleso, pre ktoré sú explicitne alebo implicitne dané priemety troch navzájom kolmých zhodných úsečiek (kocka, kváder daných rozmerov, pravidelné ihlany daných rozmerov, a pod.), čo umožňuje riešenie metrických úloh v rovinách dvojíc týchto úsečiek. Nasledujúci príklad demonštruje riešenie metrickej úlohy v rovine na rovnobežných priemetoch útvarov tejto roviny za predpokladu, že je známy rovnobežný priemet jedného štvorca roviny.

Príklad 5.1. Rovnobežník *ABCD* je rovnobežným priemetom štvorca. Ďalej sú dané rovnobežné priemety *p*, *l* dvoch priamok roviny daného štvorca. Zostrojte priemety ľubovoľných priamok tej istej roviny, ktoré sú kolmé na originály priamok *p*, *l*.[66]

[66] V riešení stereometrických úloh sa originálne útvary z didaktických dôvodov označujú tým istým symbolom ako obrazy týchto útvarov vo voľnom rovnobežnom premietaní. Rigorózne znenie úlohy 1 je napríklad nasledovné: „Rovnobežník *ABCD* je rovnobežným priemetom štvorca *A′B′C′D′*. Zostrojte priemety ľubovoľných priamok roviny *A′B′C′* kolmých na priamky *p′* a *l′* tejto roviny, ak sú dané ich rovnobežné priemety *p*, *l*.“

Riešenie

1. (*Rozbor*) Rovnobežné premietanie zobrazujúce štvorec do rovnobežníka *ABCD* je afinitou medzi dvoma rovinami, a to rovinou originálneho štvorca a priemetňou. Podľa základnej vety ([13], veta 1.3) a jej dôsledku možno každú afinitu vyjadriť v tvare kompozície perspektívnej afinity a podobnosti, a to v ľubovoľnom poradí a nekonečne mnoho spôsobmi (os afinity si v príslušnom rovinnom poli možno zvoliť ľubovoľne).

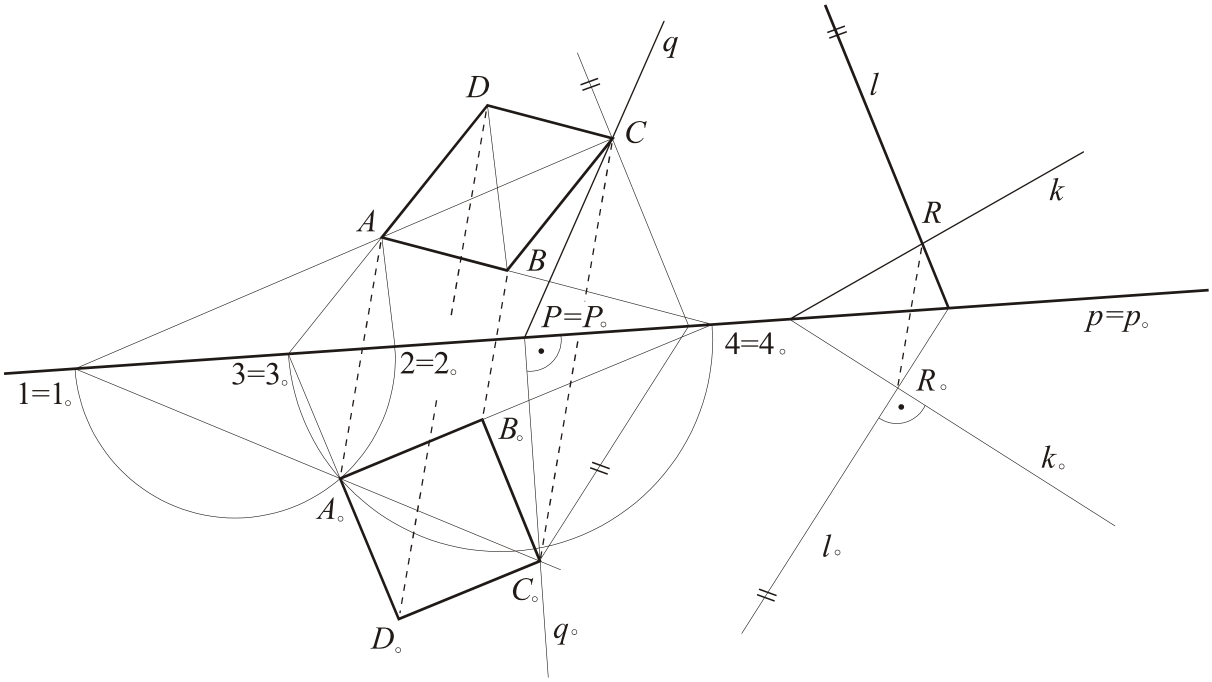
Dôsledkom je, že v rovinnom poli rovnobežníka *ABCD* (t.j. v priemetni) existuje perspektívna afinita *f* s osou v ľubovoľnej (vhodnej) priamke, ktorá tento rovnobežník zobrazí do štvorca $A_oB_oC_oD_o$. *f*: $A, B, C \mapsto A_o, B_o, C_o$. Veta 1.3 zaručuje, že rovinné pole (A_o, B_o, C_o, ...) je podobné s rovinným poľom originálneho štvorca, ktorého rovnobežným priemetom je rovnobežník *ABCD*. Teda v rovinnom poli (A_o, B_o, C_o, ...) sú riešiteľné všetky metrické úlohy o útvaroch roviny originálneho štvorca, až na podobnosť. Podobnosť zachováva všetky uhly, odkiaľ vyplýva nasledujúca konštrukcia.

2. (*Konštrukcia*) Zvoľme si za os afinity *f* danú priamku *p* ($p = p_o$). Afinitu *f* dourčíme tak, aby $f(ABCD) = A_oB_oC_oD_o$ bol štvorec. K tomu stačí umiestniť do bodu *A* ramená dvoch uhlov, ktoré sa zobrazia do pravých uhlov.

Vo štvorci sú navzájom kolmé jeho strany a uhlopriečky, t.j. do pravých uhlov sa zobrazia uhly $\sphericalangle 1A2$ a $\sphericalangle 3A4$ ($AC \cap p = 1$, $A2 \parallel BD$; $AD \cap p = 3$, $AB \cap p = 4$; body 1, 2, 3, 4 sú samodružné body príslušných priamok). Potom platí: $\sphericalangle 1_oA_o2_o \cong \sphericalangle 3_oA_o4_o \cong R$ (pravý uhol), t.j. bod A_o leží na kružnici s priemerom $1_o2_o = 12$, ako aj na kružnici $3_o4_o = 34$. Afinita *f* je určená (*f*: $B, C, D \to B_o, C_o, D_o$; $A_oB_oC_oD_o$ je štvorec). (Obr. 5.28) Takéto afinity existujú dve; z nich vyberieme tú, pre ktorú sa neprekrývajú obrazy útvarov s ich vzormi.

Na záver zostrojíme v rovinnom poli (A_o, B_o, C_o, ...) priamky q_o, k_o požadovanej vlastnosti, t.j. $q_o \perp p_o$, $k_o \perp l_o$ ($l_o = f(l)$). Konštrukcia obrazov prvkov v afinite *f* sa nepopisuje ([13]). Priamku q_o kolmú na os afinity sme zostrojili bodom C_o. Päta kolmice je jej samodružným bodom $P = P_o$, t.j. $q = \overleftrightarrow{PC}$. Priamka k_o je zvolená ľubovoľne a jej vzor $f^{-1}(k_o) = k$ je určený samodružným bodom a vzorom päty R_o kolmice k_o ($R_o = k_o \cap l_o$).

Riešením úlohy sú priamky q, k. Dvojice priamok p, q; k, l sú rovnobežnými priemetmi dvojice kolmých priamok roviny štvorca, ktorého priemetom je daný rovnobežník.[67]



Obr. 5.28

Cvičenia

1. Daná elipsa k je rovnobežným priemetom kružnice. Zvoľte si (mimo elipsy k) ľubovoľný trojuholník ABC, ktorý je priemetom trojuholníka roviny tejto kružnice. Zostrojte priemet V ortocentra zvoleného trojuholníka, ako aj jeho tvar (t.j. určte trojuholník podobný zvolenému trojuholníku).

2. Daný je všeobecný trojuholník ABC priemetne, ktorý je rovnobežným priemetom rovnostranného trojuholníka. Zostrojte priemet kružnice opísanej originálnemu trojuholníku.

3. Nech je daný priemet ABC trojuholníka a priemet V jeho ortocentra (bod V nie je ortocentrum trojuholníka ABC). Zostrojte trojuholník, ktorý je s originálnym trojuholníkom podobný.

[67] Ako by vyzeralo riešenie úlohy, keby sme v jej zadaní nahradili rovnobežník $ABCD$ elipsou k (určenou osami alebo združenými priemermi), ktorá je rovnobežným priemetom kružnice? (Cvičenie 1)

4. Je daný štvorsten *ABCD*. Existuje rovnobežné premietanie, v ktorom sú priemety jeho vrcholov vrcholmi rovnobežníka?

5. Dané ľubovoľné tri nekolineárne body *A*, *B*, *C* sú rovnobežným priemetom troch vrcholov pravidelného šesťuholníka. Doplňte jeho rovnobežný priemet i priemet kružnice šesťuholníku opísanej.

6. V rovine šesťuholníka z cvičenia 5 zostrojte priamku kolmú na ľubovoľnú inú priamku tejto roviny (tj. zostrojte rovnobežné priemety týchto útvarov). (Návod: príklad 5.1)

ZÁVER

Verím, že táto diplomová práca by mohla byť stimulom pre ďalšie rozvíjanie stereometrických poznatkov. Niektoré témy vhodné na spracovanie už boli spomenuté. Ďalšími by mohli byť napríklad syntetické štúdium grupy zhodnostných zobrazení, význačné množiny bodov, zhodnosť trojhranov, geometria na guľovej ploche, konvexné pravidelné a polopravidelné mnohosteny, mocnosť bodu vzhľadom na guľovú plochu, inverzia vzhľadom na guľovú plochu a ďalšie.

POUŽITÁ LITERATÚRA

[1] Božek, M. a kol.: *Matematika pre 2. ročník gymnázií a SOŠ*. OPI, Bratislava 1998, ISBN 80-7158-049-X

[2] Božek, M. a kol.: *Matematika pre 2. ročník gymnázií a SOŠ* (*Zbierka úloh*). OPI, Bratislava 1998, ISBN 80-7158-053-8

[3] Čech, E.: *Geometria pre II. Triedu gymnázií*. Štátne nakladateľstvo, Bratislava 1951

[4] Čenek, G. – Medek, V.: *Deskriptívna geometria I*. SVTL, Bratislava 1956

[5] Drábek, K. – Harant, F. – Setzer: *Deskriptivní geometrie I*. SNTL/ALFA, Praha 1982

[6] Hecht – Sklenáriková, Z.: *Metódy riešenia matematických úloh*. SPN, Bratislava 1992

[7] Kadeřávek, F. – Klíma, J. - Kounovský, J.: *Deskriptivní geometrie I*. NČSAV, Praha 1954

[8] Kraemer, E.: *Zobrazovací metody I, II*. SPN, Praha 1991, ISBN 80-04-21778-8

[9] Medek, V. – Šedivý, O.: *Deskriptívna geometria pre gymnáziá*. SPN, Bratislava 1986

[10] Pémová, M.: *Perspektívna afinita medzi dvoma rovinami* (*cvičenia*). Internetová stránka katedry algebry, geometrie a didaktiky matematiky UK v Bratislave

[11] Perepjolkin, D., I.: *Kurs elementarnoj geometrii II*. Gos. Iz. Tech. Teor. Lit., Moskva 1949

[12] Piják, V. a kol.: *Konštrukčná geometria*. SPN, Bratislava 1985

[13] Sklenáriková, Z.: *Perspektívna afinita medzi dvoma rovinami*. Internetová stránka katedry algebry, geometrie a didaktiky matematiky UK v Bratislave

[14] Sklenáriková, Z.: *Zobrazovacie metódy II*. MFF UK, Bratislava 1980, 1976 (vysokoškolské skriptum)

[15] Sklenáriková, Z. – Čižmár, J.: *Elementárna geometria euklidovskej roviny*. Skriptum, vyd. UK, Bratislava 2002, ISBN 80 – 223 – 1585 – 0

[16] Sklenáriková, Z. – Pémová, M.: *Pohlkeho veta a jej význam v didaktike matematiky*. In: Zborník prednášok z medzinárodnej vedeckej konferencie „ Matematika vo výučbe, výskume a praxi 2005“, Katedra matematiky FEM SPU, Nitra 2005, ISBN 80-8069-549-0

[17] Urban, A.: *Deskriptivní geometrie I*. STNL, Praha 1957, 1982