ZOBRAZOVACIE METÓDY 1

(prvý ročník, zimný semester; prednáška 3 hod., cvičenie 2 hod. / týž.; 6 kreditov, 40 / 60)

Predmet „**Zobrazovacie metódy 1–4**“ je profilujúcim predmetom v študijnom bloku Deskriptívna geometria študijného odboru Učiteľstvo všeobecnovzdelávacích predmetov v prvých dvoch ročníkoch štúdia. Deskriptívna geometria sa študuje v kombinácii s matematikou (študijný blok Matematika).

Čo je to *zobrazovacia metóda* v deskriptívnej geometrii? Pokúsime sa vymedziť tento pojem. V nasledujúcej definícii sa objavia ďalšie pojmy, ktoré sa na základe stredoškolských poznatkov z geometrie síce budú zdať *intuitívne* jasnými, avšak takto vymedzené pojmy by zaiste nesplnili očakávanie ani vyspelejšieho študenta strednej školy, tým menej študenta vysokoškolského. Značná časť štúdia v prvom semestri bude musieť byť preto venovaná tzv. *geometrickým základom* deskriptívnej geometrie. Do geometrických základov deskriptívnej geometrie patrí v prvom rade *Stereometria* alebo *Elementárna geometria trojrozmerného euklidovského priestoru* E_3 a poznatky o *osovej* (*perspektívnej*) *afinite* medzi dvoma rovinami priestoru E_3 (zatiaľ) – o zobrazení, bez ktorého je štúdium zobrazovacích metód nepredstaviteľné, a ktoré má mnoho prekvapujúcich aplikácií v geometrii vôbec. Pomocným predmetom pre deskriptívnu geometriu (no nielen pre ňu!), možno povedať jej *dvojčaťom*, je *Projektívna geometria*, ktorá je zaradená do druhého semestra štúdia.

Definícia. Pod *zobrazovacou metódou* budeme rozumieť bijektívne zobrazenie útvarov trojrozmerného euklidovského (Euklidovho) priestoru E_3 do jednej roviny tohto priestoru, ktorú budeme nazývať nákresňa.

Jednou zložkou každej zobrazovacej metódy je premietanie do roviny (priemetne), a to rovnobežné alebo stredové. (Pojem rovnobežného a stredového premietania sa vysvetlí v stereometrii.) Je zrejmé, že žiadne z nich nie je bijektívnym priradením a preto budeme musieť priradiť k priemetu bodu ešte nejakú ďalšiu zložku, aby sa bijektívnosť dosiahla. Budeme sa zaoberať len tzv. *lineárnymi zobrazovacími metódami*, v ktorých sa bodu priestoru priradí usporiadaná dvojica bodov (ako obrazov jeho rozličných dvoch priemetov do zvolených rovín priestoru) alebo bod a reálne číslo. Pod obrazom ľubovoľného geometrického útvaru sa bude – ako obvykle – považovať množina obrazov všetkých bodov daného útvaru. Rôzne zobrazovacie metódy sa od seba líšia práve spôsobom zabezpečenia bijekcie, teda voľbou premietania a príslušnej priemetne. *E. Müller* (1861 – 1927) (vrcholný deskriptívny geometer „viedenskej geometrickej školy“) rozdelil lineárne zobrazovacie metódy podľa dvoch princípov – princíp metódy *dvoch stôp* a princíp metódy *dvoch obrazov*. Štúdium týchto princípov presahuje rámec základnej prednášky. V našom kurze sa budeme zaoberať štúdiom nasledujúcich zobrazovacích metód: *kótované zobrazenie*, *Mongeova metóda*, *metóda šikmého premietania*, *metóda pravouhlej a šikmej axonometrie* a *metóda stredového premietania*.

Program prvého semestra (Zobrazovacie metódy 1): I *Stereometria*, II *Perspektívna afinita medzi dvoma rovinami*, III *Kótované zobrazenie*
Cieľ: Ovládanie kótovaného zobrazenia (princíp metódy, riešenie základných polohových a metrických úloh v tejto zobrazovacej metóde, konštrukcia obrazov základných plôch a telies vrátane riešenia polohových úloh na týchto objektoch na základe poznatkov zo stereometrie a afinity).
Literatúra je uvedená v závere každej z kapitol I – III. Základom – vzhľadom na úvodný ročník štúdia – je *prednáška*.

Geometrické základy deskriptívnej geometrie

(Stereometria a perspektívna afinita)

I Stereometria

OSNOVA PREDNÁŠKY

1. Stereometria – elementárna geometria trojrozmerného euklidovského priestoru $\mathbf{E_3}$. Didaktický systém axióm stereometrie.
2. Vzájomná poloha základných geometrických útvarov (úplná klasifikácia). Rovnobežnosť, vety o rovnobežnosti základných geometrických útvarov, kritériá rovnobežnosti. Vzájomná poloha troch rovín.
3. Štruktúra riešenia konštrukčnej stereometrickej úlohy. Polohové úlohy. Vzájomná poloha priamky a roviny. Priečky mimobežných priamok.
4. Hranolová [kružnicová valcová] plocha a priestor, ihlanová [kružnicová kužeľová] plocha a priestor, hranol [valec], ihlan [kužeľ]. Osnovová [vrcholová] rovina vzhľadom na príslušnú plochu a jej vzájomná poloha s plochou. Vzájomná poloha všeobecnej roviny [priamky] s plochou. Konštrukcie rovinných rezov základných telies. Guľová plocha, vzájomná poloha roviny [priamky] s plochou.
5. Uhol dvoch priamok. Kolmosť priamky a roviny, kritérium. Existenčné vety o priamke [rovine] incidentnej s bodom a kolmej na danú rovinu [priamku]. Uhol dvoch rovín. Kolmosť dvoch rovín (kritérium). Uhol priamky s rovinou. Metrické vlastnosti základných telies.

II Rovnobežné premietanie. Perspektívna afinita

OSNOVA PREDNÁŠKY

1. Stredové a rovnobežné premietanie útvarov priestoru $\mathbf{E_3}$ do roviny. Základné pojmy (stred premietania, osnova premietania, premietacia priamka bodu, priemet bodu; premietací útvar geometrického útvaru *U*, obrys útvaru *U* v danom premietaní, priemet útvaru *U*, obrys priemetu útvaru *U*). Vlastnosti rovnobežného premietania. Rovnobežný priemet priamky, úsečky, trojice kolineárnych bodov, dvojice priamok. Rovnobežné priemety základných telies. Pohlkeho veta. Riešenie polohových a metrických úloh na jednoduchých telesách vo voľnom rovnobežnom premietaní.
2. Definícia afinity medzi dvoma rovinami, vlastnosti. Perspektívna (osová) afinita dvoch nesúmiestnych [súmiestnych] rovinných polí. Základné pojmy a vlastnosti, samodružné prvky, invarianty. Elipsa ako obraz kružnice v afinite. Vlastnosti elipsy (stred, priemer, dotyčnice, združené priemery, osi elipsy). Bodové afinné konštrukcie elipsy (trojuholníková, prúžková, priečková, Rytzova konštrukcia osí elipsy zo združených priemerov). Konštrukčné využitie osovej afinity v riešení úloh o elipse (dotyčnice, priesečníky s priamkou a pod.).
3. Elipsa ako rovinný rez rotačnej valcovej plochy (veta Quetelet-Dandelinova, Q-D veta). Rovnobežný priemet guľovej plochy. Ohniskové vlastnosti elipsy (ohniská, určujúca priamka prislúchajúca ohnisku). Určujúca a vrcholová kružnica elipsy ako určité množiny bodov, konštrukcie dotyčníc elipsy požadovaných vlastností.

Perspektívna afinita medzi dvoma rovinami

1 Definícia. Základné pojmy a vlastnosti[1]

Definícia 1.1

Zobrazenie $f:(\alpha)\to(\alpha')$, f: $A \to A' = f(A)$, ktoré každé tri navzájom rôzne kolineárne body A, B, C zobrazí buď do jedného bodu alebo do troch kolineárnych bodov A', B', C' tak, že platí: $(A'B'C')=(ABC)$, sa nazýva *afinné zobrazenie* roviny α na rovinu – alebo do roviny – α'. Bijektívne afinné zobrazenie $f:(\alpha)\to(\alpha')$ sa nazýva afinita medzi rovinami α a α'; v prípade $\alpha = \alpha'$ hovoríme o afinite v rovine α.

Poznámka

1 Množinu bodov, priamok a útvarov nejakej roviny vo vzťahu k danému zobrazeniu f tejto roviny budeme nazývať *rovinné pole*. V zobrazení $f:(\alpha)\to(\alpha')$ je (α) rovinné pole *vzorov* a (α') rovinné pole *obrazov*. Ak pôjde o zobrazenie v tej istej rovine, hovoríme, že rovinné polia sú *súmiestne*, v opačnom prípade hovoríme o *nesúmiestnych* rovinných poliach.

2 Pod obrazom útvaru $\boldsymbol{U}$ v zobrazení f rozumieme množinu obrazov všetkých jeho bodov, t. j. $\boldsymbol{U'} = f(\boldsymbol{U}) = \{X': X \in \boldsymbol{U} \wedge X' = f(X)\}$.

Priamo z definície vyplývajú nasledujúce vlastnosti afinného zobrazenia:

1 Kompozícia konečného počtu afinných zobrazení je afinné zobrazenie.
2 Obraz ľubovoľnej trojice nekolineárnych bodov v afinite je nekolineárna trojica bodov.
3 Inverzné zobrazenie k afinite je afinita.
4 Obrazom priamky v afinite je priamka.
5 Obrazom dvojice rovnobežných priamok v afinite je dvojica rovnobežných priamok.
6 Množina všetkých afinít roviny na seba je grupa.[2]

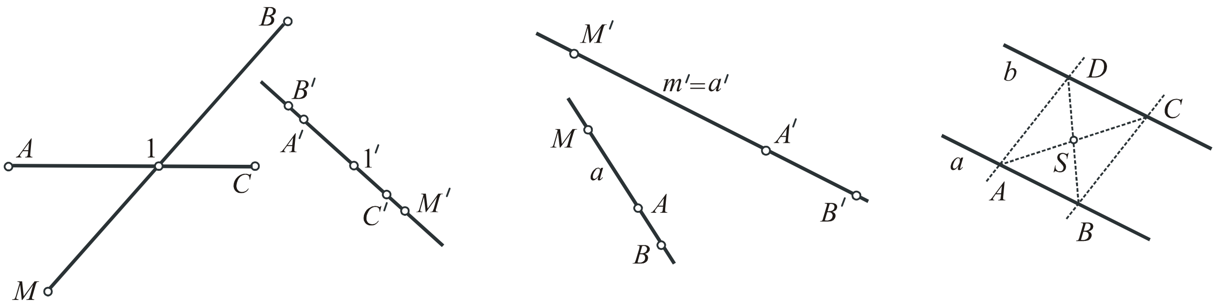
Dôkaz (niektorých z tvrdení 1 – 6):

2. (*sporom*) Nech afinita $f:(\alpha)\to(\alpha')$ zobrazí trojicu nekolineárnych bodov A, B, C na trojicu kolineárnych bodov A', B', C' a $M \in (\alpha)$ je ľubovoľný bod. Ľahko sa dokáže, že obraz $M' = f(M)$ by potom ležal na priamke $A'B'$ (prečo?); do tejto priamky by sa zobrazili všetky body rovinného poľa (α), čo je v rozpore s bijektívnosťou zobrazenia. (Obr. 1a)

4. Nech je $f:(\alpha)\to(\alpha')$ afinita a $a \subset (\alpha)$ ľubovoľná priamka. Zvoľme si na nej ľubovoľné dva navzájom rôzne body A, B; potom sú zrejme navzájom rôzne aj ich obrazy A', B' (priamku nimi určenú označme m'). Nech M je ľubovoľný bod priamky a ($A \neq M \neq B$). Pre jeho obraz $M' = f(M)$ platí: $(A'B'M')=(ABM)$ (prečo?), čo znamená, že bod M' leží na priamke m'. Dokázali sme teda, že obraz priamky a (ako množiny všetkých jej bodov) v danej afinite f je bodovou podmnožinou priamky m', t. j. $a' = f(a) \subset m'$. Pretože podľa 3 je inverzné zobrazenie f^{-1}

[1] Základným priestorom je trojrozmerný euklidovský priestor, štúdiu ktorého je venovaná kapitola I (Stereometria).
[2] S pojmom *grupy geometrických transformácií priestoru* ($\boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{E}_3$) sa študenti učiteľskej aprobácie oboznamujú v predmete Geometria 2. Všeobecnejší prehľad o grupách transformácií geometrických priestorov možno získať v seminári vo vyšších ročníkoch štúdia.

afinitou, analogicky platí: $f^{-1}(m') \subset a$, t. j. $m' \subset f(a) = a'$. Odtiaľ vyplýva záver: $f(a) = m'$. (Obr. 1b)



Obr. 1a – c

5. Nech je $f:(\alpha)\to(\alpha')$ afinita a priamky a, b sú ľubovoľné rôzne rovnobežky rovinného poľa (α). Stačí zostrojiť ľubovoľný rovnobežník $ABCD$ ($AB \subset a$, $CD \subset b$). Ak označíme priesečník jeho uhlopriečok S, tak pre obrazy vrcholov rovnobežníka platí: $(A'C'S') = (B'D'S') = -1$, t. j. i útvar $A'B'C'D'$ je rovnobežník (odôvodnite), odkiaľ vyplýva záver: $a' \parallel b'$. (Obr. 1c) [3]

V prípade afinného zobrazenia dvoch súmiestnych rovinných polí nadobúda zmysel skúmanie tzv. samodružných prvkov zobrazenia, t. j. útvarov, ktoré sú v tomto zobrazení invariantné (ide o útvary $\boldsymbol{U}_i$, pre ktoré $f(\boldsymbol{U}_i) = \boldsymbol{U}_i$); pritom nemusí byť samodružný každý bod útvaru $\boldsymbol{U}_i$.[4]

Definícia 1.2

Bod A sa nazýva *samodružným* (invariantným) bodom zobrazenia $f:(\alpha)\to(\alpha')$, ak platí $A = f(A)$. Analogicky, ľubovoľný útvar $\boldsymbol{U}$, pre ktorý platí $\boldsymbol{U} = f(\boldsymbol{U})$ nazývame *samodružným útvarom* zobrazenia f. Ak je každý bod samodružnej priamky samodružný, hovoríme o *silno samodružnej priamke* zobrazenia f (v opačnom prípade ide o priamku *slabo samodružnú*). Analogicky, ak sú všetky priamky incidentné s daným samodružným bodom samodružné, nazývame tento *silno samodružným bodom* zobrazenia f (v opačnom prípade hovoríme o bode *slabo samodružnom*).

Definícia 1.3

Afinita $f:(\alpha)\to(\alpha')$, v ktorej sú všetky body jednej priamky samodružné, sa nazýva *osová* (*perspektívna*) *afinita*. Priamku samodružných bodov nazývame *osou afinity f*.

Vlastnosti osovej afinity vyjadruje nasledujúca veta:

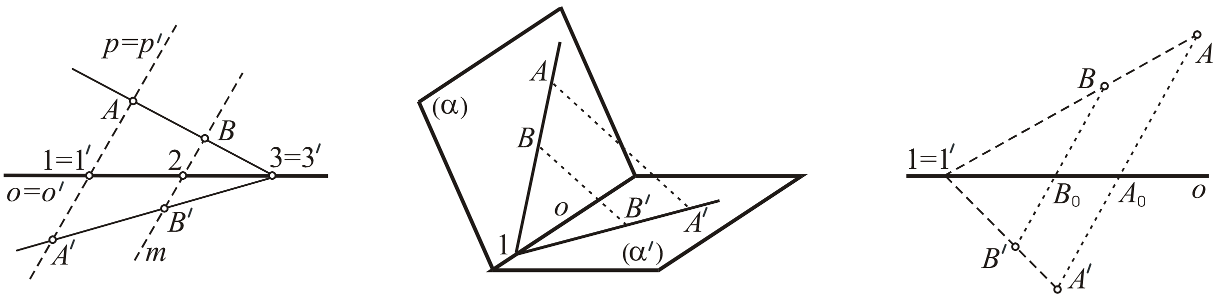
Veta 1.1

1 Nech $f:(\alpha)\to(\alpha')$ je neidentická osová afinita s osou o. Potom všetky priamky AA' ($A \in (\alpha)$, $A' = f(A) \neq A$) patria do tej istej osnovy priamok (sú navzájom rovnobežné).
2 Osová afinita dvoch nesúmiestnych rovinných polí je rovnobežným premietaním.
3 Nech $f:(\alpha)\to(\alpha')$ je neidentická osová afinita súmiestnych rovinných polí rôzna od elácie. Potom deliaci pomer $(A'AA_0)$, kde $A_0 = AA' \cap o$, je konštantný pre všetky body A rovinného poľa (α).

[3] S príkladmi afinných zobrazení sa možno oboznámiť v cvičeniach v závere tohto paragrafu (cvičenia 3, 4).
[4] Napríklad v osovej súmernosti s osou o je samodružná každá kružnica, pre ktorú je os súmernosti priemerovou priamkou; pritom sú samodružné práve dva body takejto kružnice.

Dôkaz

1. a) Predpokladajme, že ide o súmiestne rovinné polia. Pretože afinita f nie je identickým zobrazením ($f \neq I$), existuje bod A rovinného poľa (α), pre ktorý platí: $A' = f(A) \neq A$ (teda $A \notin o$, $A' \notin o$). Označme p priamku incidentnú s bodmi A, A' a 1 jej samodružný bod ($1 = 1'$) (ak nejde o eláciu). Pretože f: $A, 1 \rightarrow A', 1'$, je priamka $p = \overleftrightarrow{A1}$ samodružnou priamkou zobrazenia f. Dokázali sme, že všetky priamky incidentné s bodom a jeho obrazom sú v osovej afinite dvoch súmiestnych rovinných polí slabo samodružnými priamkami zobrazenia; v prípade elácie (definícia 1. 4) tento fakt vyplýva z vlastnosti: $p \parallel o \Rightarrow p' \parallel o$. (Obr. 2a)



Obr. 2a – c

Zvoľme si ďalší bod B ($B \neq A$, $B \notin o$) a skúmajme vlastnosti bodu $B' = f(B)$. Zostrojme priamku m prechádzajúcu bodom B a rovnobežnú s priamkou p. Jej obrazom je priamka rovnobežná s priamkou p prechádzajúca samodružným bodom $m \cap o = 2$, t. j. $m = m'$. Teda všetky priamky incidentné s bodom a jeho obrazom patria navyše do tej istej osnovy priamok. (Dôkaz pre eláciu sa ponecháva čitateľovi.) Zrejmá je konštrukcia obrazu B' bodu B, a to pomocou priamky AB. Ak táto priamka má samodružný bod $3 = 3'$, tak jej obraz v zobrazení f prechádza bodmi A', $3'$ (v prípade rovnobežnosti s osou o je i obraz priamky rovnobežný s osou afinity a prechádza bodom A'). V prípade incidencie bodu B s priamkou p zostrojíme obraz bodu B využitím pomocnej dvojice bodov C, $C' = f(C)$ ($C \notin p$) získanej analogickým postupom.

b) Predpokladajme, že rovinné polia (α), (α') sú nesúmiestne. Vtedy je osou afinity priamka $o = \alpha \cap \alpha'$ a rovnobežnosť priamok AA', BB' je dôsledkom invariantnosti deliaceho pomeru: $(AB1) = (A'B'1')$ ($1 = \overleftrightarrow{AB} \cap o \Rightarrow 1 = 1'$). (Obr. 2b)

Tvrdenie **2** vety 1.1 je dôsledkom bodu 1b dôkazu.

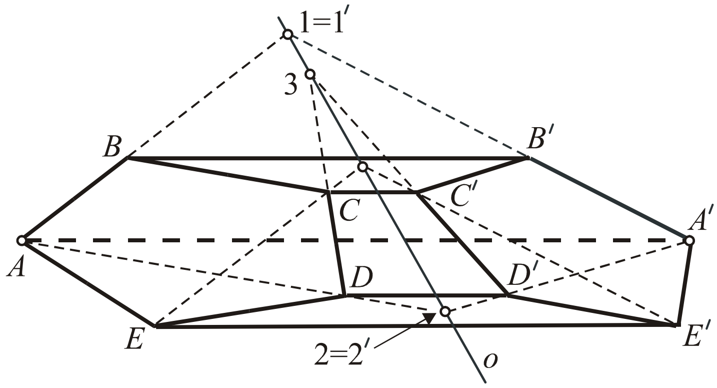
3. Z konštrukcie bodu B' v bode 1 vyplýva: $(B'BB_0) = (A'AA_0)$; stačí použiť vhodné dvojice rovnoľahlých trojuholníkov na obrázku 2c.

Definícia 1.4

Osnovu slabo samodružných priamok incidentných s bodmi a ich obrazmi v danej osovej afinite nazývame *smer afinity*. Ak do tejto osnovy priamok patrí os afinity, hovoríme o *elácii*, ak je smer afinity kolmý na jej os, ide o *pravouhlú osovú afinitu*. Deliaci pomer $(A'AA_0)$ z bodu 3 vety 1.1 sa nazýva *charakteristika osovej afinity*.

Dôsledok

Medzi ľubovoľnými dvoma rovinnými rezmi na tej istej hranolovej ploche alebo kružnicovej valcovej ploche rovinami, ktoré nie sú osnovové ani navzájom rovnobežné, je vzťah *perspektívnej* *afinity*, ktorej osou o je priesečnica rovín rezu. Dvojicu bodov vzor – obraz dostaneme na tej istej tvoriacej priamke plochy[5] ako jej priesečníky s rezovými rovinami. (Na obr. 3 je $o = \alpha \cap \alpha'$)



Obr. 3

Ďalej dokážeme *základnú vetu* o určení afinity dvoch rovinných polí. Z určitých dôvodov, ktoré sa ozrejmia v priebehu dôkazu vety, dokážeme najprv zjednodušené tvrdenie pre perspektívnu afinitu dvoch súmiestnych rovinných polí.

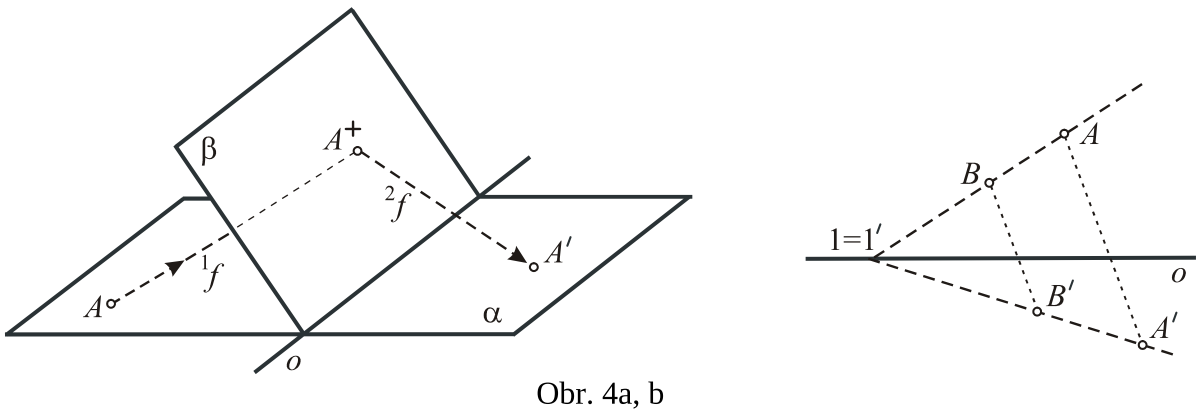
Veta 1.2

Perspektívna afinita roviny na seba je určená osou o a usporiadanou dvojicou navzájom rôznych bodov A, A', z ktorých žiaden neleží na priamke o.

Dôkaz

a) (*existencia*)

Nech o, A, A' sú priamka a body roviny α požadovanej vlastnosti. Najprv dokážeme, že existuje perspektívna afinita f v rovine α, ktorá má os o a zobrazuje bod A do bodu $A' = f(A)$. K tomu stačí urobiť nasledujúcu konštrukciu: 1. zvoľme si ľubovoľnú rovinu β tak, aby mala s rovinou α spoločnú práve jednu priamku, a to priamku o; 2. zvoľme si ľubovoľný bod A^+ roviny β, neležiaci na priamke o. Uvažujme o perspektívnych afinitách ${}^1f$, ${}^2f$, pre ktoré je priamka o osou, ${}^1f(A) = A^+$, ${}^2f(A^+) = A'$ a ${}^1f$: $(\alpha) \to (\alpha^+)$, ${}^2f$: $(\alpha^+) \to (\alpha')$, pričom nositeľkou rovinného poľa (α^+) je rovina β a dvoch zvyšných rovinných polí rovina α (obr. 4a). Kompozícia $f = {}^2f \circ {}^1f$ je afinitou so silno samodružnou priamkou o (o je silno samodružnou priamkou oboch zobrazení ${}^if$ (i = 1, 2)), t. j. f je perspektívna afinita požadovaných vlastností. (Odôvodnite, prečo $f(A) = A'$.)



Obr. 4a, b

[5] Táto dvojica bodov môže ležať na ľubovoľnej osnovovej priamke vzhľadom na danú plochu, nemusí ísť o tvoriacu priamku. Napríklad pri kružnicovej valcovej ploche sa často používajú priesečníky osi plochy s rovinami rezov.

b) (*jednoznačnosť*, t. j. nezávislosť od konštrukcie)

Treba dokázať, že zobrazenie f nezávisí od voľby roviny β a výberu bodu $A^+ \in \beta$. To už vyplýva z konštrukcie v rovine α; obrazom ľubovoľného bodu $B \in (\alpha)$, $B \neq A$ vo všetkých afinitách s osou o, ktoré zobrazujú bod A do bodu A', je bod ten istý bod B' (zostrojený podľa predchádzajúceho (obr. 4b); konštrukcia pri iných polohách bodu B už bola vysvetlená v dôkaze vety 1.1). Perspektívna afinita požadovaných vlastností je preto jediná.

Poznámka. Perspektívnu afinitu určenú osou o a usporiadanou dvojicou bodov vzor – obraz (A, A') budeme všade ďalej označovať $f(o; A, A')$.

Dôsledok. Každú perspektívnu afinitu roviny na seba možno vyjadriť v tvare kompozície dvoch rovnobežných premietaní (nekonečne mnoho spôsobmi).

Veta 1.3 (*základná veta* o určení afinity)

Afinita $f : (\alpha) \rightarrow (\alpha')$ je určená trojicou nekolineárnych bodov A, B, C a trojicou ich obrazov A', B', C' (v danom poradí).

Dôkaz

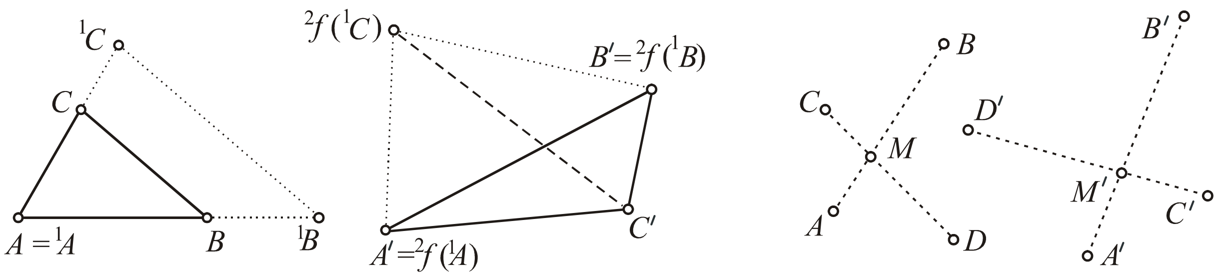
a) (*existencia*)

Nech sú dané: ľubovoľná nekolineárna trojica bodov A, B, C rovinného poľa (α) a ľubovoľná (tiež nekolineárna; prečo?) trojica bodov A', B', C' v rovinnom poli α'. Táto časť dôkazu je konštrukčná; „zostrojíme“ aspoň jedno afinné zobrazenie f tak, aby $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ a $f(C) = C'$.

Nech ${}^1f$ je rovnoľahlosť v rovine α (táto rovina je nositeľka rovnomenného rovinného poľa) so stredom napr. A a koeficientom ${}^1k = |A'B'| : |AB|$. Obrazy bodov v tejto rovnoľahlosti označme ľavým horným indexom „1“. Platí: ${}^1f$: $A, B, C \mapsto {}^1A, {}^1B, {}^1C$ (t. j. $|{}^1A{}^1B| = |A'B'|$) a ${}^1f$: $(\alpha) \rightarrow ({}^1\alpha)$.

Nech ${}^2f$ je „premiestnenie“ rovinného poľa $({}^1\alpha)$ (t. j. zhodnostné zobrazenie) do roviny α' (nositeľka rovinného poľa (α')), pre ktoré platí: ${}^2f({}^1A) = A'$, ${}^2f({}^1B) = B'$ (takéto zhodnosti sú dve; vyberme ktorúkoľvek z nich) (obr. 5a).

Na záver nech ${}^3f$ je perspektívna afinita v rovine α' s osou v priamke $\overleftrightarrow{A'B'}$, v ktorej je obrazom bodu ${}^2f({}^1C)$ bod C'. Je zrejmé, že všetky zobrazenia ${}^if$ (i = 1, 2, 3) sú afinity, odkiaľ vyplýva, že aj ich kompozícia ${}^3f \circ {}^2f \circ {}^1f = f$ je afinitou. Z konštrukcie je zrejmé, že afinita f má požadované vlastnosti.



Obr. 5a, b

b) (*jednoznačnosť*, t. j. nezávislosť zobrazenia f od výberu afinít ${}^if$ (i = 1, 2, 3))

Jednoznačnosť vyplýva z invariantnosti deliaceho pomeru v ľubovoľnej afinite. Vyberme si ľubovoľný bod D rovinného poľa (α). Aspoň jedna spojnica bodu D s niektorým vrcholom trojuholníka ABC pretína spojnicu zvyšných vrcholov; na obr. 5b $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{DC} = M$. Pre obraz bodu D v afinite $f:(\alpha)\to(\alpha')$ platí: $(D'C'M')=(DCM)$, kde bod M' možno zostrojiť na základe rovnosti $(A'B'M')=(ABM)$. Takto zostrojený bod D' je obrazom bodu D vo všetkých afinitách, ktoré zobrazujú v danom poradí body A, B, C do bodov A', B', C', čo znamená, že afinita požadovaných vlastností je práve jedna. [6]

Dôsledok

1. Každú afinitu možno vyjadriť v tvare kompozície osovej afinity a podobnosti, a to v ľubovoľnom poradí a nekonečne mnoho spôsobmi.
2. Medzi rovnobežnými priemetmi dvoch rovinných rezov tej istej hranolovej (kružnicovej valcovej) plochy rôznobežnými rovinami, z ktorých žiadna nie je premietacou ani osnovovou rovinou vzhľadom na danú plochu, je vzťah perspektívnej afinity. Osou afinity je priemet priesečnice rezových rovín a dvojica bodov vzor – obraz je tvorená priemetmi dvoch rôznych priesečníkov ľubovoľnej osnovovej priamky (vzhľadom na danú plochu) s rovinami rezov.[7]

Dôkaz. Podľa dôsledku za definíciou 1.4 k danej ploche $\boldsymbol{P}$ a rovinám α, α' požadovaných vlastností existuje perspektívna afinita f : $\alpha \cap \boldsymbol{P} \to \alpha' \cap \boldsymbol{P}$. Ak označíme g rovnobežné premietanie, vzťah priemetov rovinných rezov vyjadruje nasledujúci diagram:

$$\begin{array}{ccc} (\alpha \cap \boldsymbol{P}) & \xrightarrow{f} & (\alpha' \cap \boldsymbol{P}) \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & {\scriptstyle g}\downarrow \\ (\alpha \cap \boldsymbol{P})_1 & & (\alpha' \cap \boldsymbol{P})_1 \end{array}$$

Pretože roviny α, α' nie sú premietacie, rovnobežné premietanie g zúžené na tieto roviny určuje perspektívnu afinitu medzi každou z nich a jej priemetom do priemetne. Je zrejmé, že kompozícia $(g/\alpha') \circ f \circ (g/\alpha)^{-1}$ je afinitou medzi rovnobežnými priemetmi rovinných rezov plochy $\boldsymbol{P}$ rovinami α a α' (rovnobežné priemety majú dolný index „1“). Silno samodružnou priamkou tejto afinity je priemet priesečnice rovín $\alpha \cap \alpha'$, ide teda o perspektívnu afinitu, čo bolo treba dokázať.

2 Obraz kružnice v afinite

Definícia 2.1

Obraz kružnice v afinite f, ktorá nie je zhodnosťou ani podobnosťou[8], sa nazýva *elipsa*. Obraz priemeru kružnice nazývame *priemer elipsy* a obrazy dvoch navzájom kolmých priemerov kružnice *združené priemery elipsy*. *Dotyčnicou elipsy* nazývame priamku, ktorá má s elipsou práve jeden spoločný bod a *sečnicou elipsy* priamku, ktorá má s elipsou spoločné práve dva body. Obrazom tetivy kružnice je *tetiva elipsy*.

Poznámka

Z vlastností afinity je zrejmé, že dotyčnica, resp. sečnica elipsy k' je obrazom dotyčnice, resp. sečnice kružnice k v afinite f: $k \mapsto k'$.

[6] Ak bod M leží na priamke incidentnej s niektorou stranou trojuholníka ABC, dôkaz je analogický, pozostáva len z jedného kroku.
[7] Touto priamkou môže byť i ľubovoľná tvoriaca priamka alebo os plochy.
[8] Syntetický výklad zhodnostných a podobnostných zobrazení a ich aplikácie v riešení úloh je stručne zhrnutý v učebnom texte [4].

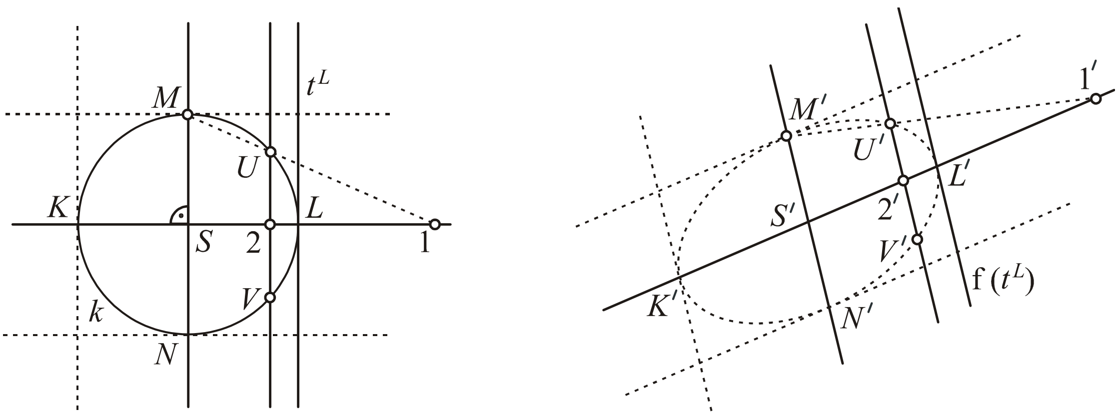
Dôsledok (*priamy dôsledok definície*)

1. Rovinným rezom kružnicovej valcovej plochy rovinou, ktorá nie je osnovovou rovinou vzhľadom na danú plochu, je elipsa alebo kružnica.
2. Rovnobežným priemetom kružnice, ktorej rovina nie je premietacia, je elipsa alebo kružnica.

V ďalšom texte sa budeme venovať odvodeniu vlastností elipsy, jej priemeru, združených priemerov a dotyčníc. Dokážeme, že elipsa je stredová krivka a má dve osi súmernosti prechádzajúce jej stredom. Odvodíme aj niektoré, z rozličných hľadísk dôležité afinné bodové konštrukcie elipsy [9], ohniskovú „definíciu" elipsy pomocou vety Queteletovej-Dandelinovej o rovinných rezoch rotačnej valcovej plochy a poznatok o rovnobežnom priemete guľovej plochy.

Nech $f:(\alpha)\to(\alpha')$ je ľubovoľná afinita a $k\subset(\alpha)$ ľubovoľná kružnica so stredom S. Ak označíme KL ľubovoľný z priemerov kružnice k, tak pre jeho obraz $K'L'$ v danej afinite f platí: $(K'L'S') = (KLS) = -1$. To znamená, že elipsa $k' = f(k)$ má *stred súmernosti*.

Označme ďalej MN priemer kružnice, ktorý je kolmý na priemer KL. (obr. 6). Skúmajme invariantné vlastnosti oboch priemerov vzhľadom na afinitu f. Nech t^L je dotyčnica kružnice k v bode L. Táto dotyčnica je rovnobežná s priamkou MN, čo podľa vlastností 4, 5 afinných zobrazení (vyplývajúcich priamo z definície) znamená, že $f(t^L)$ je dotyčnica elipsy k' rovnobežná s priamkou $f(MN) = \overleftrightarrow{M'N'}$. Úsečky $K'L'$ a $M'N'$ sú združenými priemermi elipsy k', odkiaľ vyplýva vlastnosť dotyčníc v krajných bodoch daného priemeru elipsy uvedená v nasledujúcej vete v bode 2.



Obr. 6a, b

Nech je UV sečnicou kružnice k, ktorá je rovnobežná s priemerom MN a nie je priemerovou priamkou. Potom sú navzájom rovnobežné i priamky $U'V'$ a $M'N'$ [10]. Konštrukcia tetivy $U'V'$ elipsy k' je zrejmá; stačí použiť rovnosť nasledujúcich dvojíc deliacich pomerov (podľa obrázka): $(M'U'1') = (MU1)$, $(U'V'2') = (UV2) = -1$, kde $1 = \overleftrightarrow{MU} \cap \overleftrightarrow{KL}$ a $2 = \overleftrightarrow{UV} \cap \overleftrightarrow{KL}$ (konštrukcia obrazov bodov 1, 2 je triviálna). Z toho vyplývajúci poznatok o množine stredov všetkých tetív elipsy rovnobežných s jedným jej priemerom je sformulovaný v bode 3 nasledujúcej vety.

[9] Prioritným cieľom je aplikácia v deskriptívnej geometrii, predovšetkým poznatky o priemete kružnice a elipsy v rovnobežnom i stredovom premietaní.

[10] ***U′*** znamená všade ďalej obraz útvaru ***U*** v danej afinite *f*.

Veta 2.1

1. Elipsa má *stred súmernosti* (je stredová krivka).
2. Dotyčnice v krajných bodoch priemeru elipsy sú rovnobežné so združeným priemerom.
3. Sečnice elipsy, ktoré sú rovnobežné s jedným z jej priemerov, sú združeným priemerom rozpoľované.

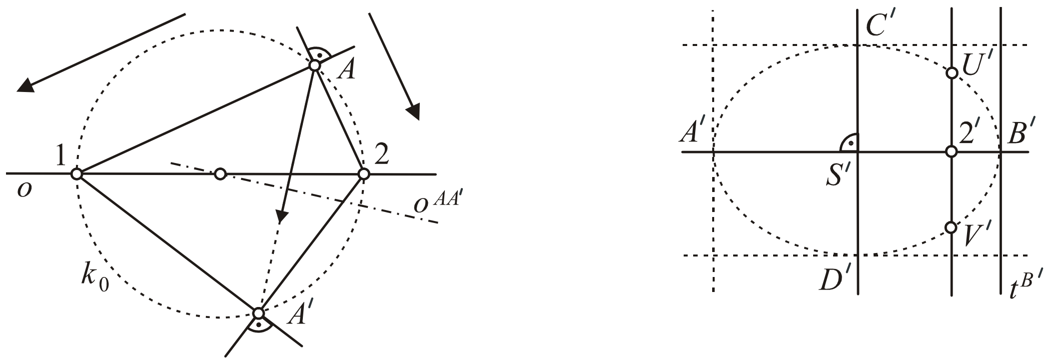
Dokážeme ďalej, že elipsa má dve navzájom kolmé osi súmernosti. K tomu je potrebné uviesť pojem tzv. *hlavných smerov* afinity.

Definícia 2.2

Dve navzájom kolmé osnovy priamok, ktorých obrazy v danej afinite *f* sú navzájom kolmé osnovy priamok, nazývame *hlavné smery* afinity *f*.

Poznámka. Najprv dokážeme korektnosť definície, teda existenciu dvoch osnov priamok požadovaných vlastností. Podľa dôsledku 1 za vetou 1.3 stačí dokázať existenciu hlavných smerov v ľubovoľnej perspektívnej afinite dvoch súmiestnych rovinných polí. Vyplynie to z nasledujúcej konštrukcie.

Nech $f:(\alpha)\to(\alpha')$ je ľubovoľná perspektívna afinita, ktorá nie je pravouhlá ($f(o;\, A,\, A')$). Zostrojíme priamky patriace do hlavných smerov a prechádzajúce bodom *A*. Ak existuje dvojica priamok *m*, *n* požadovanej vlastnosti a označíme ich samodružné body 1, 2, tak platí: $\angle 1A2 \cong \angle 1A'2 \cong$ R (R je označenie pravého uhla). Body *A*, *A′* teda ležia na kružnici k_0 s priemerom v priamke *o*. Táto pomocná kružnica má stred na priamke *o* a na osi úsečky *AA′*, čím je určená. Jej priesečníky s osou *o* afinity *f* sú body 1, 2 a hľadané priamky patriace do hlavných smerov sú priamky $\overleftrightarrow{1A}$, $\overleftrightarrow{2A}$. (Obr. 7)



Obr. 7a, b

V prípade pravouhlej afinity, ktorá nie je osovou súmernosťou, patria do hlavných smerov priamky *o* a $\overleftrightarrow{AA'}$; v prípade osovej súmernosti je takých dvojíc priamok nekonečne mnoho (prečo?).

Ak priemery *KL*, *MN* kružnice *k* (z predchádzajúcej konštrukcie, obr. 6) patria do hlavných smerov afinity *f*, tak vlastnosť 3 elipsy z vety 2.1 znamená, že priamky $\overleftrightarrow{K'L'}$ a $\overleftrightarrow{M'N'}$ sú osami súmernosti elipsy *k′* (ak *f* nie je osovou súmernosťou). Na obr. 7b sú priemery elipsy na jej hlavnej, resp. vedľajšej osi označené $A'B'$, resp. $C'D'$. Môžeme teda definovať:

Definícia 2.3

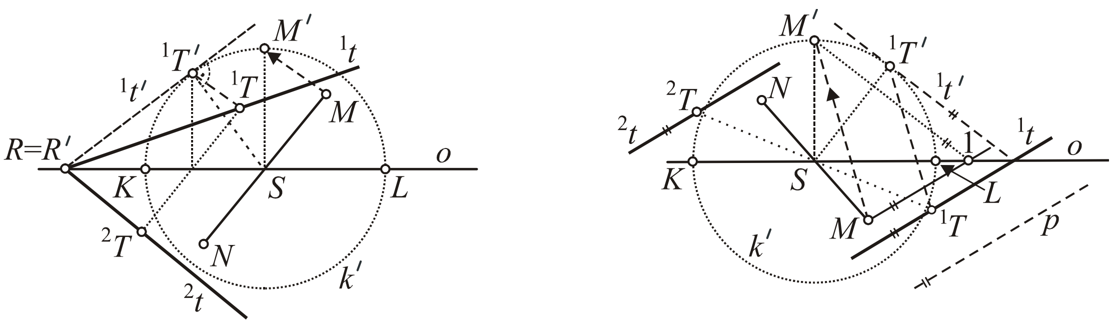
1. Stred súmernosti elipsy nazývame *stredom elipsy*.
2. Osi súmernosti elipsy budeme nazývať *osami elipsy*.
3. *Hlavná os* elipsy sa nazýva tá z oboch osí, pre ktorú priemer s ňou incidentný je väčší; druhá z osí je *vedľajšou osou* elipsy. Pod pojmom hlavná a vedľajšia os elipsy rozumieme niekedy i priemer elipsy na tejto osi ležiaci, hovoríme potom o dĺžke hlavnej a dĺžke vedľajšej osi elipsy.

V riešení nasledujúcich príkladov budeme demonštrovať použitie osovej afinity na riešenie konštrukčných úloh o elipse (konštrukcia dotyčníc elipsy požadovanej vlastnosti, konštrukcia osí elipsy, ak poznáme dvojicu jej združených priemerov, a pod.). Metódou riešenia všetkých úloh bude použitie vhodnej osovej afinity, ktorá zobrazí danú elipsu do kružnice. Toto možno urobiť nekonečne mnoho spôsobmi; za os afinity si možno zvoliť ľubovoľnú priamku rovinného poľa danej elipsy. Vhodný výber osi afinity môže riešenie úlohy značne zjednodušiť.

Príklad 1. Daná je elipsa k dvojicou združených priemerov KL, MN. Zostrojte dotyčnice elipsy k, ktoré: a) prechádzajú daným bodom R priemerovej[11] priamky KL; b) sú rovnobežné s ľubovoľnou danou priamkou p.

Riešenie

a) Zvoľme si osovú afinitu f s osou napr. v priamke $o = \overleftrightarrow{KL}$.[12] Afinitu dourčíme obrazom $f(M) = M'$ bodu M tak, aby obrazom elipsy k bola kružnica k'. Obrazom združených priemerov elipsy musia byť navzájom kolmé priemery kružnice; ak vezmeme do úvahy incidenciu $KL \subset o$, t. j. $K = K'$ a $L = L'$, kružnica k' je určená priemerom $K'L'$. Bod M' kružnice možno vybrať dvoma spôsobmi tak, aby priemer $M'N'$ bol kolmý na os afinity (obr. 8a). Ďalšia konštrukcia je zrejmá z definície a vlastností elipsy. Hľadané dotyčnice sú obrazom dotyčníc kružnice k' prechádzajúcich samodružným bodom $R' = R$ v inverznej afinite f^{-1}. (Zrejme stačí zostrojiť jednu z nich a použiť vlastnosť 3 z vety 2.1.)



Obr. 8a, b

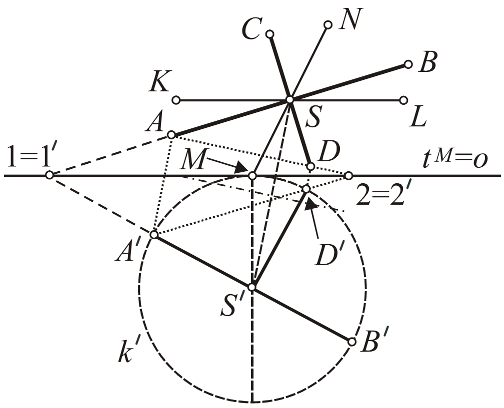
b) Osovú afinitu f si zvoľme analogicky ako v riešení predchádzajúcej úlohy tak, aby $f(k) = k'$ bola kružnica (f ($o = \overleftrightarrow{KL}$; M, M'). Dotyčnice elipsy požadovanej vlastnosti sa v zobrazení f zobrazia do dotyčníc kružnice k', ktoré sú rovnobežné s priamkou $f(p) = p'$. Je preto výhodné umiestniť priamku p do bodu M; jej obraz p' bude určený samodružným bodom $1 = 1'$ tejto priamky a bodom M' (to isté možno dosiahnuť konštrukciou priamky rovnobežnej s priamkou p

[11] Priemerovou priamkou elipsy k nazývame každú priamku incidentnú s ľubovoľným jej priemerom.
[12] Motivácia pre voľbu osi afinity je zrejmá; ležia na nej tri body K, L, R, ktoré sú samodružnými bodmi zobrazenia.

a prechádzajúcej bodom M) (obr. 8b). Riešením úlohy sú obrazy dotyčníc kružnice k' rovnobežných s priamkou $\overleftrightarrow{M'1}$ v inverznej afinite f^{-1}. Navyše sú obe dotyčnice súmerné podľa stredu S elipsy, čo možno pri konštrukcii výhodne použiť.

Príklad 2. Daná je elipsa k dvojicou združených priemerov KL, MN. Zostrojte jej osi AB, CD.
Riešenie

Zvoľme si vhodnú perspektívnu afinitu $f:(\alpha)\to(\alpha')$, ktorá danú elipsu k zobrazí do kružnice k'. Aby sa konštrukcie vzorov a obrazov útvarov neprekrývali, zvoľme si za os afinity dotyčnicu v krajnom bode niektorého z priemerov, napr. v bode M a kružnicu k' zostrojíme v polrovine opačnej k polrovine s hranicou v tejto dotyčnici obsahujúcej danú elipsu. Priamka $t^M = o = o'$ je dotyčnicou hľadanej kružnice, odkiaľ vyplýva konštrukcia jej stredu S'. Priemer tejto kružnice je totiž zhodný s priemerom KL elipsy k ($KL \,||\, o \Rightarrow KL \cong K'L'$) (obr. 9). Priemery $A'B'$, $C'D'$ kružnice k', ktoré sa zobrazia do osí elipsy, ležia na priamkach patriacich do hlavných smerov afinity f, odkiaľ je zrejmá ich konštrukcia (konštrukcia hlavných smerov je vysvetlená v poznámke za definíciou 2.2). Na obrázku je zostrojený len kolmý polpriemer $S'D'$ k priemeru $A'B'$ kružnice k'.



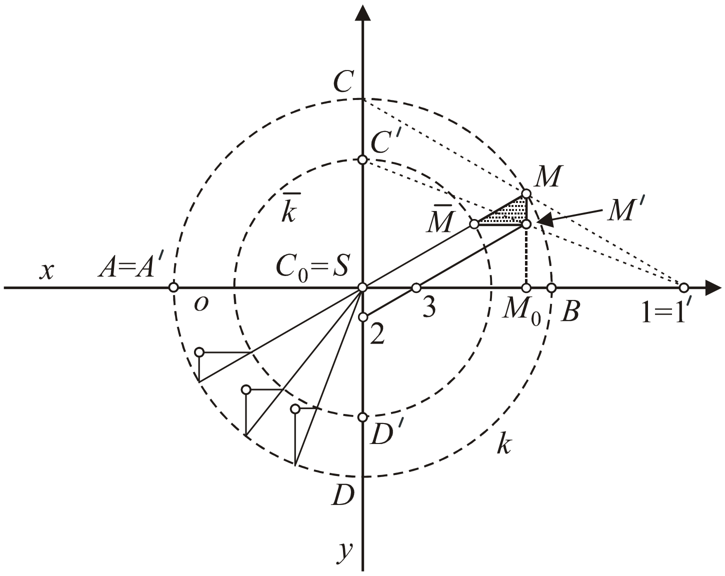
Obr. 9

2.1 Afinné konštrukcie elipsy a jej dotyčníc

V nasledujúcom texte odvodíme niektoré, pre deskriptívnu geometriu veľmi užitočné bodové konštrukcie elipsy a jej dotyčníc. Tieto konštrukcie sú odvodené z perspektívnej afinity medzi kružnicou a elipsou, preto ich nazývame afinnými konštrukciami elipsy. Bude to: *trojuholníková* a *prúžková* bodová konštrukcia, *Rytzova konštrukcia* osí elipsy z dvojice jej združených priemerov, *priečková* konštrukcia a konštrukcia dotyčníc elipsy rovnobežných s danou priamkou. Nejde len o bodové či dotyčnicové konštrukcie elipsy; ukážeme si aj niektoré ich aplikácie v riešení rozmanitých úloh o tejto krivke.

Trojuholníková a prúžková bodová konštrukcia elipsy

Nech $k \subset \alpha$ je ľubovoľná kružnica a AB, $CD \perp AB$ dva jej priemery. Zvoľme si ľubovoľnú pravouhlú perspektívnu afinitu f v rovine α (s osou $o = \overleftrightarrow{AB}$), t. j. $f:(\alpha)\to(\alpha')$, $f(o;\, C, C')$, kde bod C' je vnútorným bodom priemeru CD. Obrazom kružnice k v tejto afinite je elipsa k' s osami $A'B'$, $C'D'$ ($A' = A, B' = B$). Označme si: $|AB| = 2a, |C'D'| = 2b$. Pre obraz M' ľubovoľného bodu M kružnice k platí $(M'MM_0)$ = $(C'CC_0)$ = b/a (charakteristika afinity f). Ale $(C'CC_0)$ = $(\overline{M}MC_0)$, kde $\overline{M} \in C_0M \cap \overline{k}$ ($\overline{k}$ je kružnica s priemerom $C'D'$), t. j. $(\overline{M}MC_0)$ = $(M'MM_0)$, čo platí práve vtedy, keď sú priamky $\overline{M}M'$ a C_0M_0 navzájom rovnobežné. Z toho vyplýva tzv. *trojuholníková bodová konštrukcia elipsy* (na obr. 10 sú vrcholy pravých uhlov niekoľkých vyznačených trojuholníkov bodmi elipsy k'). [13]



Obr. 10

V tej istej konštrukcii zostrojme bod 2 $\in$ CD tak, aby útvar $SMM'2$ bol rovnobežníkom a označme: 3 = $2M' \cap o$. Pretože aj útvar $S\overline{M}M'3$ je rovnobežník, platí: $|M'2| = a, |M'3| = b.$ To znamená, že ak sa pohybuje úsečka dĺžky a (s krajnými bodmi 2, M') tak, že jej krajný bod 2 sa pohybuje po priamke CD a jej vnútorný bod 3, ktorého vzdialenosť od bodu M' sa rovná b, po priamke o, tak druhý krajný bod M' opisuje elipsu k'. Túto bodovú konštrukciu nazývame rozdielová „prúžková“ bodová konštrukcia elipsy (možno ju vykonať pomocou prúžka papiera, na ktorom sú vyznačené body 2, 3, M' požadovaných vlastností).

Rytzova konštrukcia osí elipsy danej dvojicou združených priemerov

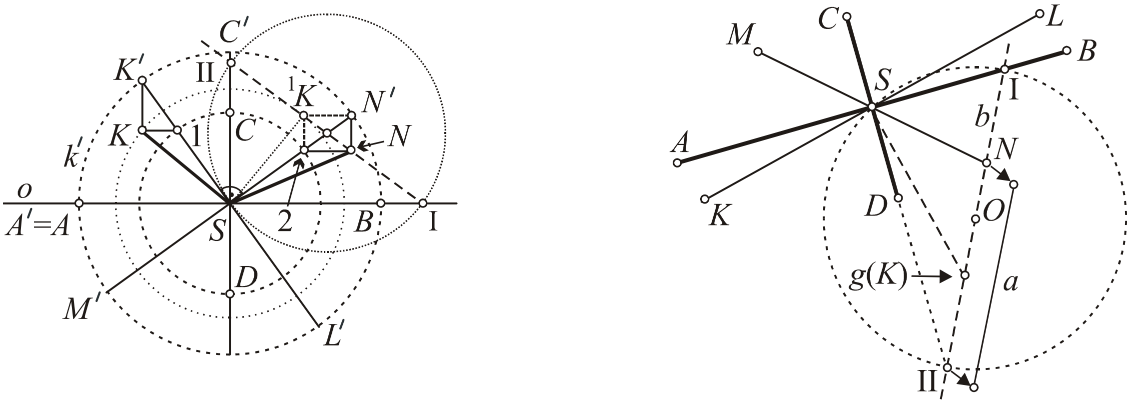
Východiskom konštrukcie je pravouhlá osová afinita $f:(\alpha') \to (\alpha)$ z trojuholníkovej bodovej konštrukcie elipsy: f(o = $A'B'$; C', C). Zvoľme si ľubovoľné kolmé priemery $K'L'$, $M'N'$ kružnice k'; ich obrazy KL, MN v afinite f sú združenými priemermi elipsy k. Na obr. 11a) sú zostrojené pomocou trojuholníkovej konštrukcie len príslušné polpriemery. Budeme hľadať odpoveď na otázku, aký je vzťah združených priemerov KL, MN elipsy k a jej osí AB, CD.

Nech g je otočenie v rovine kružnice so stredom v bode S, pre ktoré $g(K') = N'$, t. j. ide o otočenie o pravý uhol. Platí: $\Delta K'K1 \cong \Delta 2NN'$ (usu) (ide o trojuholníky z trojuholníkovej bodovej konštrukcie bodov K a N elipsy k), t. j. bod $g(K) = {}^1K$ je štvrtým vrcholom obdĺžnika s tromi zvyšnými vrcholmi 2, N, N'. Ak označíme priesečníky jeho uhlopriečky $N\,{}^1K$ s hlavnou, resp. vedľajšou osou elipsy rímskymi číslicami I, resp. II, platí:

---

[13] V ortonormálnej súradnicovej sústave s bázou <O = S; x = o, y> má daná kružnica k rovnicu: $x^2 + y^2 = a^2$ a pravouhlá osová afinita f analytické vyjadrenie: $x' = x$, $y' = (b/a)y$. Odtiaľ jednoducho vyplýva, že pre každý bod M' elipsy k' ($M' = (x_0, y_0)$) platí: $(x_0)^2/a^2 + (y_0)^2/b^2 = 1$ (*). Obrátene, každý bod, ktorého súradnice x_0, y_0 spĺňajú vzťah (*), je bodom elipsy k'. To znamená, že rovnica: $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ je v danej báze rovnicou elipsy k'.

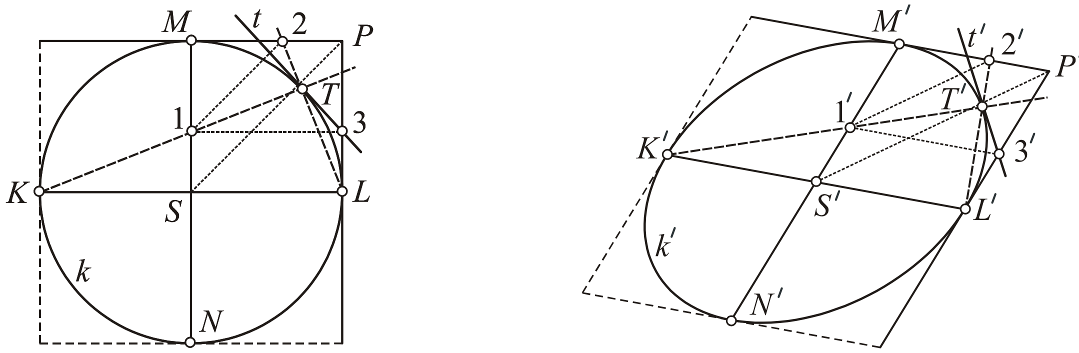
I$N \cong S2 \cong$ II^1K, I$^1K \cong SN' \cong$ IIN, (I II O) = – 1 (O je stred spomenutého obdĺžnika) a $\angle$I S II $\cong$ R.[14] Týmito vzťahmi – pri danej dvojici združených priemerov *KL*, *MN* – je daná konštrukcia bodov I, II ležiacich na hľadaných osiach elipsy. Na obrázku 11b je urobená konštrukcia bez pomocnej kružnice *k´*.



Obr. 11a, b

Priečková bodová konštrukcia elipsy danej dvojicou združených priemerov

Najprv dokážeme správnosť jednej bodovej konštrukcie kružnice *k*, ktorá je daná dvojicou kolmých priemerov *KL*, *MN*. Invariantnosť tejto konštrukcie vzhľadom na ľubovoľnú afinitu zaručuje jej platnosť i pre elipsu. Nech bod *P* je jedným vrcholom štvorca dotýkajúceho sa kružnice *k* v krajných bodoch jej daných kolmých priemerov (obr. 12a). Zvoľme si ľubovoľný vnútorný bod jedného z daných priemerov (okrem stredu *S* kružnice *k*), napr. bod $1 \in MN$ a zostrojme bod $2 \in PM$ tak, aby priamka 12 bola rovnobežná s priamkou *PS*. Potom priesečník *T* priamok *K*1 a *L*2 je bodom kružnice *k* a navyše, priamka *T*3 (kde bod 3 je štvrtým vrcholom rovnobežníka so zvyšnými tromi vrcholmi 1, *S*, *L*) je dotyčnicou kružnice *k* v bode *T*.[15]



Obr. 12a, b

[14] Bod *O* je stredom kružnice s priemerom I II, incidentnej so stredom *S* elipsy *k*.

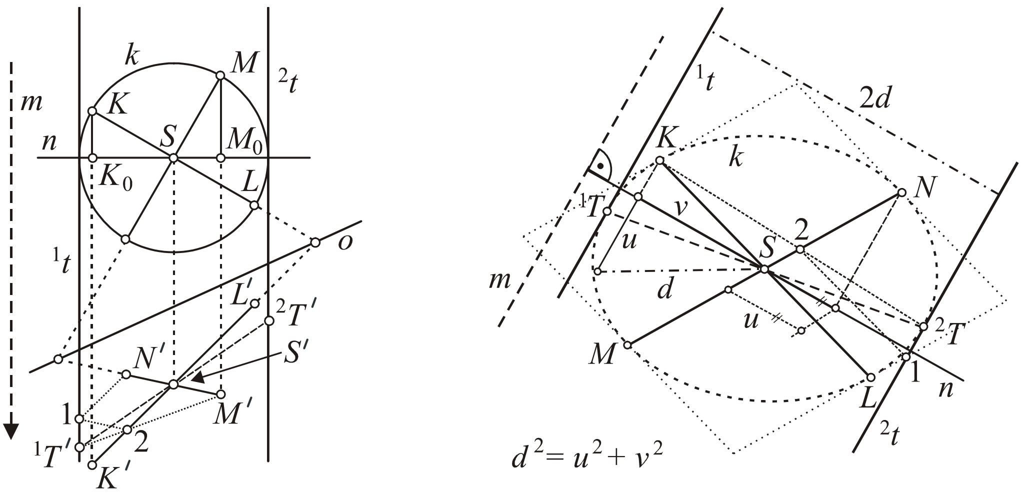
[15] V prvom prípade stačí dokázať, že uhol *KTL* je zhodný s pravým uhlom. To vyplýva z kolmosti dvoch dvojíc strán zhodných pravouhlých trojuholníkov 1*SK* a 2*PL* (veta sus) (prečo?). V druhom prípade rovnobežnosť priamok *K*1, *S*3 implikuje kolmosť priamok *S*3, *TL*; ak vezmeme do úvahy zhodnosť úsečiek *SL*, *ST*, ako aj príslušnosť bodov *L*, *T* k navzájom opačným polrovinám s hranicou $\overleftrightarrow{S3}$, znamená to, že body *L*, *T* sú súmerne združené podľa priamky *S*3. Dôsledkom je zhodnosť uhlov *SL*3 a *ST*3, čo znamená, že priamka *T*3 je dotyčnicou kružnice *k*.

Pomocou osovej afinity možno odvodiť aj nasledujúcu konštrukciu dotyčníc danej elipsy, patriacich do danej osnovy navzájom rovnobežných priamok. Pre jej jednoduchosť ju zaraďujeme medzi najdôležitejšie konštrukcie, s ktorými sa budeme stretať v deskriptívnej geometrii pri zobrazovaní kružnicových valcových plôch v zobrazovacích metódach založených na rovnobežnom premietaní.

Nech $k \subset \alpha$ je ľubovoľná kružnica a KL, $MN \perp KL$ dvojica jej navzájom kolmých priemerov. Zvoľme si ľubovoľnú osovú afinitu f (ktorá nie je zhodnostným zobrazením) v rovine α tak, aby jej os o bola rôznobežná s priamkami KL, MN a smer afinity aby patril do danej osnovy priamok $\{m\}$(priamka m nie je pritom rovnobežná s osou o ani so žiadnym s priemerov KL, MN). Afinita f je určená: $f(o;\ S,\ S')$ $(S' \neq S)$. Budeme hľadať súvislosť medzi dotyčnicami danej kružnice, ktoré sú rovnobežné s priamkou m a dvojicou daných kolmých priemerov kružnice. (Obr. 13a)

Zostrojme priemerovú priamku n kružnice k kolmú na priamku m a kolmé priemety dvoch krajných bodov jej navzájom rôznych priemerov, napr. K, M na priamku n; označme tieto body (v danom poradí) K_0, M_0. Platí: $\Delta KSK_0 \cong \Delta SMM_0$ (usu), t. j. $KK_0 \cong SM_0$ a môžeme vyjadriť vzdialenosť hľadaných dotyčníc kružnice k od jej stredu S takto:

$$d = \sqrt{|SK_0|^2 + |KK_0|^2} = \sqrt{|SK_0|^2 + |SM_0|^2} \qquad (1)$$



Obr. 13a, b

Potom dotyčnice ^it (i = 1, 2) kružnice k (požadovanej vlastnosti) sú slabo samodružnými priamkami perspektívnej afinity f a vzťah (1) vyjadruje i vzdialenosť dotyčníc elipsy $k' = f(k)$ (rovnobežných s priamkou m) od jej stredu S'. Je zrejmé, že konštrukciu dĺžky d môžeme urobiť bez toho, aby sme poznali originálnu kružnicu k; stačí poznať dvojicu združených priemerov $K'L'$, $M'N'$ elipsy k' (kolmé priemety dvoch krajných bodov rôznych priemerov elipsy na priamku n sú totiž tie isté body K_0, L_0, ako v prípade kružnice). Navyše priamku n si môžeme zvoliť tak, aby bola priemerovou priamkou danej elipsy. Dotykové body ^iT elipsy s priamkami ^it (i = 1, 2) zostrojíme pomocou priečkovej bodovej konštrukcie elipsy uvedenej vyššie. (Konštrukcia bez pomocnej kružnice je bez komentára uvedená na obr. 13b. Pre zjednodušenie zápisu sú – v porovnaní s výkladom v a) – označené všetky útvary bez čiarky.)

Veta 2.1

1. (*Veta Queteletova-Dandelinova alebo* Q-D veta) Rovinným rezom rotačnej valcovej plochy rovinou, ktorá nie je osnovovou rovinou vzhľadom na plochu, ani kolmá na os plochy, je elipsa, ktorej ohniská ${}^{i}F$ (i = 1, 2) sú dotykové body guľových plôch vpísaných do danej valcovej plochy s rezovou rovinou. Vedľajšia os elipsy je zhodná s priemerom $2r$ valcovej plochy a hlavná os má dĺžku $2r/\sin\varphi$, kde φ je veľkosť uhla tvoriacich priamok plochy s rovinou elipsy. [16]
2. Elipsa je množina všetkých bodov roviny, ktoré majú od daných dvoch pevných bodov ${}^{i}F$ (i = 1, 2) tejto roviny konštantný súčet vzdialeností (väčší než vzdialenosť pevných bodov).
3. Elipsa je množina všetkých bodov roviny, ktoré majú od pevného bodu ${}^{i}F$ a pevnej priamky ${}^{i}f$ tejto roviny (${}^{i}F \notin {}^{i}f$) (i =1, 2) konštantný podiel vzdialeností, menší než 1.

Pred dôkazom vety definujme niektoré nové pojmy vyskytujúce sa vo vete.

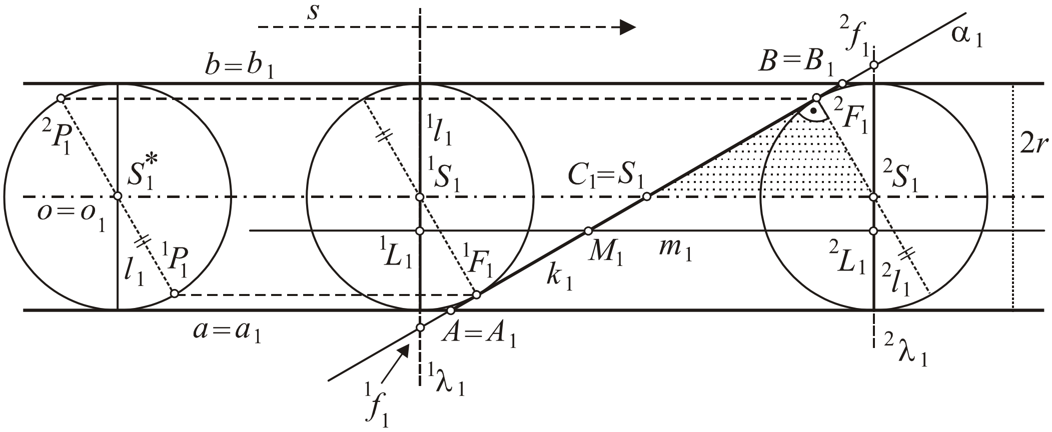
Definícia 2.4

Pevné body ${}^{i}F$ (i = 1, 2) z predchádzajúcej vety sa nazývajú *ohniská elipsy* a pevné priamky ${}^{i}f$ *určujúce* (riadiace) *priamky elipsy*. Hovoríme, že *určujúca priamka* ${}^{i}f$ *prislúcha ohnisku* ${}^{i}F$ elipsy. Dĺžku úsečky ${}^{i}FS$ nazývame *lineárnou excentricitou* elipsy (s obvyklým označením e).[17]

Dôkaz (vety 2.1)

Všetky útvary budeme zobrazovať v pravouhlom premietaní do roviny π; kolmý priemet každého útvaru $\boldsymbol{U}$ do roviny π sa bude označovať indexom „1“, t. j. $\boldsymbol{U}_1$. Priemetňu π si zvoľme tak, aby prechádzala osou o plochy a bola kolmá na rovinu α rovinného rezu. Potom obrysom priemetu valcovej plochy $\boldsymbol{V}(o;\ r)$ sú tvoriace priamky a, b plochy $\boldsymbol{V}$ v priemetni, priemetom roviny α je priamka a priemetom elipsy $k = \boldsymbol{V} \cap \alpha$ je úsečka A_1B_1 ($A = a \cap \alpha$, $B = b \cap \alpha$).

Vpíšme ďalej do valcovej plochy $\boldsymbol{V}$ dve guľové plochy ${}^{i}\boldsymbol{G}$ (${}^{i}S$, r) tak, aby sa dotýkali roviny α a označme: $\boldsymbol{V} \cap {}^{i}\boldsymbol{G} = \{{}^{i}l\}$, ${}^{i}l \subset {}^{i}\lambda$, ${}^{i}\boldsymbol{G} \cap \alpha = {}^{i}F$, ${}^{i}\lambda \cap \alpha = {}^{i}f$ (i = 1, 2). (Obr. 14)



Obr. 14

1) Nech $M \in k$ je ľubovoľný bod a m tvoriaca priamka plochy ním prechádzajúca. Ak označíme $m \cap {}^{i}l = \{{}^{i}L\}$ (i = 1, 2), tak platí: $\left|M\,{}^{1}F\right| + \left|M\,{}^{2}F\right| = \left|M\,{}^{1}L\right| + \left|M\,{}^{2}L\right| = \left|{}^{1}L\,{}^{2}L\right| = \left|{}^{1}L_1\,{}^{2}L_1\right| =$ konštanta, čo je

[16] Ohniská ${}^{i}F$ elipsy sú pevné body z odsekov 2, 3 tejto vety a budú sa definovať ešte pred jej dôkazom.
[17] Ak označíme $2a$, resp. $2b$ dĺžku hlavnej, resp. vedľajšej osi elipsy, tak pre lineárnu excentricitu e danej elipsy zrejme platí vzťah: $e^2 + b^2 = a^2$. Dokážte.

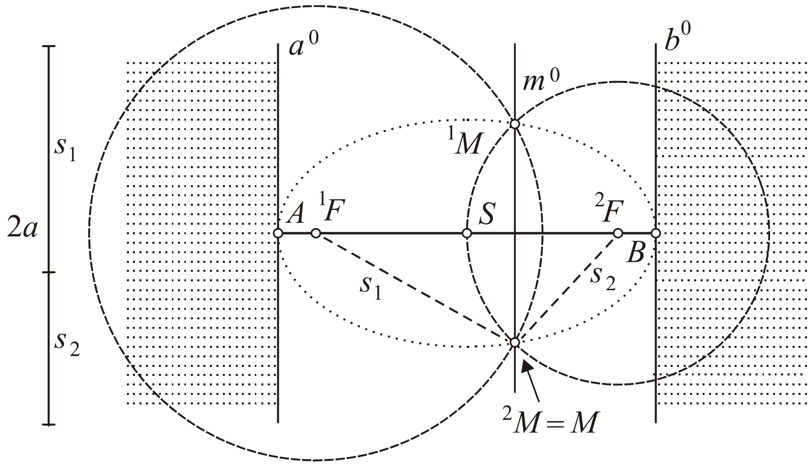
dôsledok rovnobežnosti priamky m s priemetňou. Body A, B taktiež patria elipse k, odkiaľ máme $\left|A^1F\right|+\left|A^2F\right|=\left|B^1F\right|+\left|B^2F\right| \Rightarrow A^1F \cong B^2F \wedge A^2F \cong B^1F$, t. j. $\left|A^1F\right|+\left|A^2F\right|=\left|A^1F\right|+\left|B^1F\right|=\left|AB\right|$. [18]

Je zrejmé, že priamka AB je jednou osou elipsy k; druhá os CD je preto kolmá na priemetňu, t. j. $\left|CD\right|=2r$, odkiaľ vyplýva, že priamka AB je hlavnou osou a príslušnú konštantu môžeme označiť $2a$. Platnosť vzťahu $2a = 2r/\sin\varphi$ je zrejmá z pravouhlých trojuholníkov ${}^iS\,S\,{}^iF$ (i = 1, 2) s preponou dĺžky a a uhlom s veľkosťou φ pri vrchole S.

Ak označíme $\mathbf{M} = \{X;\ X \in \alpha \wedge \left|X\,{}^1F\right|+\left|X\,{}^2F\right|=2a\}$, tak sme zatiaľ dokázali inklúziu $k \subset \mathbf{M}$. V ďalšej časti dokážeme, že i každý bod množiny $\mathbf{M}$ je bodom danej elipsy k.

2) Najprv si odvodíme bodovú konštrukciu množiny **M,** ak sú dané pevné body ${}^1F$, ${}^2F$ a konštanta $2a > |\,{}^1F\,{}^2F\,|$. Konštrukcia bodov A, B množiny **M** na priamke ${}^1F\,{}^2F$ je zrejmá. Každý bod X množiny **M** patrí prieniku dvoch kružníc so stredmi ${}^1F$, ${}^2F$, pričom súčet dĺžok polomerov kružníc sa rovná $2a$. [19] Z tejto konštrukcie vyplýva, že všetky body množiny **M** ležia v rovinnom páse určenom priamkami a^0, b^0 (každá z priamok prechádza rovnomenným vrcholom A alebo B, leží v rovine α a je kolmá na priamku AB) a na každej priamke vo vnútri tohto rovinného pásu kolmej na priamku AB ležia práve dva body tejto množiny. (Obr. 15)

Nech $M \in$ **M** je ľubovoľný bod rôzny od bodov A, B a $m^0 \subset \alpha$ priamka ním prechádzajúca, kolmá na priamku AB. Táto priamka má s elipsou k spoločné práve dva body ${}^1M$, ${}^2M$. Podľa bodu 1) dôkazu platí: ${}^iM \in$ **M**; ale pretože na priamke m^0 ležia najviac dva body množiny **M**, je ${}^1M = M$ alebo ${}^2M = M$. To znamená, že bod M je bodom elipsy k. Dokázali sme, že $\mathbf{M} \subset k$. *Záver*: $k = \mathbf{M}$, čo bolo treba dokázať.



Obr. 15

3) Vráťme sa k pôvodnej priestorovej konštrukcii (obr. 14). Z podobnosti pravouhlých trojuholníkov $\Delta M_1\,{}^iL_1\,{}^if_1$ a $\Delta S_1\,{}^iF_1\,{}^iS_1$ (veta uu) vyplýva pre ľubovoľný z indexov i $\in \{1, 2\}$:

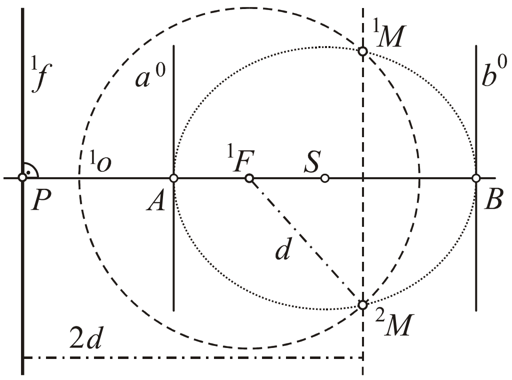
---

[18] Skompletizovanie dôkazu (dôkaz zhodnosti dvojíc úsečiek $M\,{}^iF$, $M\,{}^iL$, ako i dvojíc úsečiek $A\,{}^iF$, $B\,{}^jF$ pre i $\neq$ j; i, j $\in$ {1, 2}) sa ponecháva čitateľovi. Potrebné poznatky sú súčasťou cvičení.

[19] Podrobne opísanú „ohniskovú“ konštrukciu elipsy možno nájsť v [2]; táto konštrukcia, ako aj tzv. ohniskové konštrukcie dotyčníc elipsy incidentných s daným bodom, či patriacich do danej osnovy priamok a ďalšie vlastnosti elipsy sú témou prvej samostatnej semestrálnej práce v predmete zobrazovacie metódy. Čitateľovi sa odporúča zamyslieť nad otázkou, pre aký „ľubovoľne“ zvolený polomer $s_1 < 2a$ (v ohniskovej bodovej konštrukcii elipsy) jednej z kružníc sa žiaden bod elipsy nedostane a prečo.

$\frac{|M\,^iF|}{|M\,^if|} = \frac{|M\,^iL|}{|M\,^if|} = \frac{|M_1\,^iL_1|}{|M_1\,^if_1|} = \frac{|S_1\,^iF_1|}{|S_1\,^iS_1|} = \frac{e}{a} < 1$. Ak označíme $\mathbf{N} = \{X\colon X \in \alpha \wedge \frac{|X\,^iF|}{|X\,^if|} = \frac{e}{a}\}$, tak sme dokázali, že $k \subset \mathbf{N}$. Analogickým uvažovaním ako v časti 2 dôkazu vyplýva z bodovej konštrukcie množiny ***N*** platnosť $\mathbf{N} \subset k$. *Záver*: $k = \mathbf{N}$, čo bolo treba dokázať.

Urobíme ešte bodovú konštrukciu množiny **N** pre daný bod ^1F, priamku ^1f roviny α a pre pomer $e : a = 1 : 2$ (obr. 16). Zostrojme najprv body množiny **N** na priamke ^1o (priamka ^1o leží v rovine α, prechádza ohniskom ^1F a je kolmá na určujúcu priamku ^1f tomuto ohnisku prislúchajúcu). Takéto body sú práve dva; sú to body A, B pre ktoré: $(^1FPB) = -(^1FPA) = 1/2$ ($P = {^1o} \cap {^1f}$). Pretože $X\,^1F < X\,^1f$, všetky ďalšie body množiny **N** ležia vo vnútri rovinného pásu určeného priamkami a^0, b^0, ktoré prechádzajú v danom poradí bodmi A, B a sú kolmé na priamku ^1o. Zostrojme ľubovoľný bod M tak, aby sa jeho vzdialenosť od určujúcej priamky ^1f rovnala predpísanému kladnému reálnemu číslu $2d$ a vzdialenosť od ohniska ^1F sa rovnala d. (Diskusia o vhodnom výbere čísla $2d$ sa ponecháva čitateľovi.) Konštrukcia pre vyhovujúce číslo $2d$ je triviálna.



Obr. 16

Dôsledok Queteletovej-Dandelinovej vety

Rovnobežným priemetom guľovej plochy ***G***(S, r) do roviny je elipsa a jej vnútro alebo kruh. Ohniská elipsy sú priemety krajných bodov priemeru guľovej plochy kolmého na priemetňu a jej vedľajšia os je zhodná s priemerom guľovej plochy.[20]

V dôkaze tvrdenia si stačí zvoliť ľubovoľnú guľovú plochu, pre ktorú je valcová plocha ***V*** z dôkazu Q-D vety hranicou jej premietacieho útvaru a priemetňu v rovine α (dôsledok samozrejme platí aj pre ľubovoľnú z plôch ^{i}***G***). Treba si uvedomiť, že plocha ***G*** je s každou z plôch ^{i}***G*** zhodná (príslušné zhodnostné zobrazenie je posunutím, ktorého smer je rovnobežný s osnovou premietania).[21]

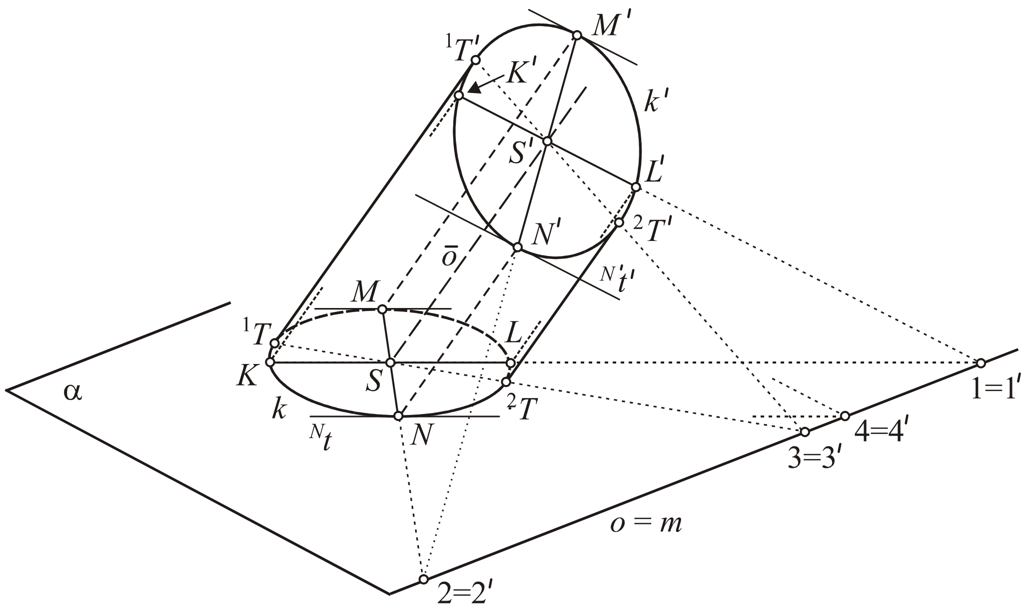
[20] Tento poznatok (priamy dôsledok Q-D vety) rozšíril na rotačné kvadratické plochy významný český geometer svetového mena *Karel Pelz* (1845 – 1908). Pelz považoval túto vetu za jednu z najdôležitejších viet deskriptívnej geometrie. Na stereografickom premietaní demonštroval, ako z nej temer spontánne vychádzajú všetky vlastnosti tohoto zobrazenia. O živote a diele Karla Pelza sa možno dozvedieť na mojej internetovej stránke venovanej dejinám deskriptívnej geometrie.

[21] Nech je ***G*** = (S^*, r) ľubovoľná guľová plocha vpísaná do danej rotačnej valcovej plochy ***V*** (z vety 2.1, obr. 14). Uvažujme o rovnobežnom premietaní do roviny α, do osnovy ktorého patrí os o valcovej plochy. Hranicou premietacieho útvaru guľovej plochy ***G*** je daná rotačná valcová plocha ***V***; obrysom priemetu tejto guľovej plochy je preto elipsa $k = \alpha \cap$ ***V***. Guľová plocha ^{i}***G*** ($i \in \{1, 2\}$) je obrazom plochy ***G*** v rovnobežnom posunutí ^ig, ktoré zobrazí bod S^* do bodu ^iS. Obrazom priamky v posunutí je priamka s ňou rovnobežná, čo pre priemer $^1P\,^2P$ guľovej plochy ***G*** kolmý na rovinu α znamená, že sa zobrazí do priemeru plochy ^{i}***G*** s tou istou vlastnosťou. Z dotyku guľových plôch ^{i}***G*** s rovinou α je potom zrejmé, že $^ig(^iP) = {^iF}$ (^1F, ^2F sú ohniská elipsy k) ($i = 1, 2$).

Príklad 3. Vo voľnom rovnobežnom premietaní je daná kružnicová valcová plocha ***V*** určujúcou kružnicou *k* v rovine α a osou $\overline{o}$. Ďalej je daná rovina β, ktorá prechádza priamkou *m* roviny α a bodom S' ležiacim na osi valcovej plochy ***V*** (obr. 17). Zobrazte rovinný rez danej valcovej plochy rovinou β.

Riešenie

1. Najprv zostrojme obrys priemetu valcovej plochy ***V***. Sú ním dotyčnice elipsy *k* (priemet rovnomennej kružnice) rovnobežné s priemetom osi $\overline{o}$; tieto zostrojíme – vrátane dotykových bodov ${}^1T$ **,** ${}^2T$ – podľa konštrukcie zo strany 15, obr. 13b. (Rovnobežný priemet kružnice *k* si zvoľme ľubovoľne dvojicou združených priemerov *KL*, *MN*.)



Obr. 17

2. Podľa dôsledku za definíciou 1.4 a dôsledku 1 definície 2.1 platí: a) Rovinným rezom kružnicovej valcovej plochy *V* rovinou β je elipsa alebo kružnica ($\beta \cap V = k'$); b) Medzi priemetmi kriviek *k* a k' je vzťah perspektívnej afinity *f*, ktorej osou je priemet priesečnice rovín $\alpha \cap \beta = \{m\}$ a dvojicu bodov *vzor – obraz* tvoria priemety priesečníkov osi plochy s oboma rovinami, t. j. v danom poradí bodov *S*, S' [22] (bod *S* je stredom určujúcej kružnice *k* plochy).

$$f : (\alpha) \rightarrow (\alpha'),\ f(o = m;\ S,\ S')$$

3. Priemet rovinného rezu k' je určený združenými priemermi *K´L´*, *M´N´*, ktoré sú obrazom daných združených priemerov *KL*, *MN* priemetu kružnice *k* v perspektívnej afinite *f*. (Na obrázku sú samodružné body priemerových priamok s nimi incidentných označené $1 = 1'$ a $2 = 2'$). Body ${}^1T'$, ${}^2T'$ (obrazy dotykových bodov ${}^1T$, ${}^2T$ v afinite *f*), sú dotykovými bodmi priemetu rezovej krivky s obrysom priemetu plochy. Tieto body oddeľujú viditeľnú časť krivky k' od jej neviditeľnej časti [23]. Táto viditeľnosť je určená ľubovoľne zvolenou viditeľnosťou určujúcej kružnice *k* plochy v danom rovnobežnom premietaní.

---

[22] Podľa dohody sa objekty a ich rovnobežné priemety vo voľnom rovnobežnom premietaní zobrazujú tým istým znakom.

[23] Na obr. 17 je zobrazená len časť kružnicovej valcovej plochy (medzi rovinami α, β); preto je v skúmanom prípade krivka k' viditeľná celá a obrysu priemetu zvolenej časti plochy patria okrem dvoch polelíps (incidentných s elipsami *k*, *k´*) len úsečky ${}^iT\,{}^iT'$ (i = 1, 2).

LITERATÚRA

[1] Kraemer, E.: *Zobrazovací metody*, I. diel, SPN Praha, 1991. ISBN 80-04-21778-8
[2] Urban, A.: *Deskriptivní geometrieI*, SNTL Praha, 1979, 1982
[3] Drábek, K. – Harant, F. – Setzer, O.: *Deskriptivní geometrie I*, SNTL/ALFA Praha, 1982
[4] Sklenáriková, Z. – Čižmár, J.: *Elementárna geometria euklidovskej roviny,* skript., FMFI UK, vyd. UK Bratislava 2002, 2004. ISBN 80-223-1585-0

III Kótované zobrazenie

OSNOVA PREDNÁŠKY

1. Princíp zobrazovacej metódy; základné pojmy, obraz bodu. Obraz priamky, vzájomná poloha dvoch priamok, obraz roviny a súvisiace pojmy (stopník priamky, interval - spád priamky, stupňovanie priamky; stopa roviny, hlavné a spádové priamky roviny).
2. Sklápanie roviny a riešenie úloh súvisiacich so sklápaním roviny.
3. Polohové úlohy (priamka a rovina, dve roviny, prienik dvoch rovinných geometrických útvarov). Viditeľnosť. Priečky mimobežiek.
4. Otáčanie roviny. Afinita otáčania roviny vo všeobecnej polohe vzhľadom na priemetňu.
5. Priamka kolmá na rovinu. Riešenie metrických úloh, uhly základných geometrických útvarov.
6. Obraz kružnice v kótovanom zobrazení. Veta o pravouhlom priemete kružnice.
7. Priamka požadovaného spádu v danej rovine; rovina požadovaného spádu incidentná s danou priamkou.
8. Konštrukcie obrazov základných telies. Riešenie incidenčných úloh (bod na ploche – telese, vzájomná poloha priamky a roviny s danou plochou – telesom). Princíp rovnobežného osvetlenia a súvisiace pojmy. Rovnobežné osvetlenie guľovej plochy a jednoduchých telies.

KÓTOVANÉ ZOBRAZENIE
CVIČENIA

1. Dané sú pravouhlé priemety bodov A, B priamky p a kóta bodu A (obr. 1). Dourčte bod B tak, aby: a) priamka p pretínala priemetňu π v bode tej svojej polpriamky so začiatkom v bode A, ktorá neprechádza bodom B; b) $p \parallel \pi$; c) priamka p pretínala priemetňu vo vnútornom bode úsečky AB; d) priamka p pretínala priemetňu π vo vnútornom bode tej svojej polpriamky π so začiatkom v bode B, ktorá neprechádza bodom A; e) $B = p \cap \pi$.

2. Zobrazte pravidelný päťboký ihlan s podstavou $ABCDE$ v priemetni π a výškou $v = 7$, ak je daný stred S podstavy a jeden vrchol A [S(3; 3; 0), A(–1; 3,5; 0)].

3. Zobrazte pravidelný šesťboký hranol s podstavou $ABCDEF$ v rovine π' (rovnobežnej s priemetňou π s kótou –20) a výškou $v = 15$, ak je daný stred S podstavy a jeden vrchol A [S(0; 5; –20), A(2; 1; –20)].

4. Dané sú okótované priemety bodov A, B, M a pravouhlý priemet bodu N priamky p (obr. 2). Riešte úlohy: a) overte incidenciu bodu M a priamky p; b) určte kótu bodu N tak, aby patril priamke p; c) zobrazte bod L priamky p s kótou –5 (resp. $\sqrt{3}$, resp. 3/7); d) zobrazte bod K priamky p tak, aby $|KB| = 10$.

5. Riešte predchádzajúcu úlohu pre nasledujúce hodnoty kót bodov: $z^A = 125$, $z^B = 121$, $z^C = 124$, $z^L = 120$.

6. Určte dĺžku úsečky AB, uhol priamky $p = \overleftrightarrow{AB}$ s priemetňou, stopník priamky p a interval priamky p (ak je to možné): a) priamka p nie je kolmá na priemetňu a $z^A = 2$, $z^B = -3$; b) priamka p nie je kolmá na priemetňu a $z^A = 126$, $z^B = 131$; c) priamka p je kolmá na

priemetňu, kóty bodov A, B si zvoľte ľubovoľne. Vo všetkých prípadoch si body A_1, B_1 zvoľte ľubovoľne.

7. Ľubovoľný trojuholník $A_1B_1C_1$ v nákresni nech je priemetom trojuholníka ABC, pričom $z^A = -1$, $z^B = 4$, $z^C = 4$. Riešte úlohy: a) zobrazte ťažisko T trojuholníka a určte jeho kótu; b) určte dĺžky ťažníc trojuholníka; c) určte uhly priamok incidentných s ťažnicami trojuholníka s priemetňou; d) zostrojte stopníky strán trojuholníka.

8. Riešte predchádzajúcu úlohu (okrem bodu d)) pre $z^A = 627$, $z^B = 631$, $z^C = 629$.

9. Dané sú obrazy priamok AB, CD: $|A_1B_1| = 6$, $|C_1D_1| = 5$, $z^A = 11$, $z^B = 8$, $z^C = 2$, $z^D = 5$. Ktorá z priamok má väčší uhol s priemetňou? Určte graficky i výpočtom.

10. Zvoľte si priemet p_1 priamky p a priemet M_1 jej bodu M; nech $z^M = 7$. Vystupňujte priamku p, ak má spád: a) ¾; b) 1; c) 5/2; d) 25% (pri pevne zvolenej jednotke dĺžky).
Poznámka: Spád priamky v percentách sa rovná číslu $\dfrac{|z^A - z^B|}{|AB|} \cdot 100$.

11. Čo je množina stopníkov všetkých priamok, ktoré prechádzajú daným bodom M ($z_M \neq 0$) a majú konštantný spád?

12. Priamky a, b ležia v tej istej premietacej rovine a pre body A, B ($A \in a$, $B \in b$) platí: $A_1 = B_1$, $z^A = 2$, $z^B = -1$. Interval priamky a sa rovná 2, interval priamky b sa rovná 2/3. Zostrojte priesečník priamok a, b, ak majú a) súhlasne orientované stupnice; b) nesúhlasne orientované stupnice.

13. Zostrojte priamku m, ktorá prechádza daným bodom M a je rovnobežná s priamkou $a = \overleftrightarrow{AB}$. Všetky body sú dané okótovaným priemetmi. (Obr. 3 a, b)

14. Dourčte priamku b tak, aby bola rôznobežná s priamkou $a = \overleftrightarrow{AB}$ a prechádzala bodom C (obr. 4).

15. Zostrojte priamku b prechádzajúcu bodom C, rovnobežnú s priemetňou a pretínajúcu priamku $a = \overleftrightarrow{AB}$. (Obr. 5)

16. Priemet trojuholníka ABC doplňte na priemet rovnobežníka $ABCD$ ($|A_1B_1| = 6$, $|B_1C_1| = 4$, $|C_1A_1| = 7$, $z^A = 3$, $z^B = 7$, $z^C = 8$). Zostrojte spojnice bodov s rovnajúcimi sa kótami (napr. ${}^1z = 4$, ${}^2z = 7$). Aká je vzájomná poloha týchto spojníc?

17. Priamka m prechádza bodom P a jej spád sa rovná 5/3. Zobrazte priamku l prechádzajúcu bodom Q tak, aby bola kolmá na priamku m a ležala s ňou v tej istej premietacej rovine. Dané sú okótované priemety bodov P, Q a ich vzdialenosť. (Obr. 6)

18. Zobrazte kocku $ABCD...D'$, ktorej stena $ABCD$ leží v premietacej rovine. ($A = (A_1, 7)$, $B = (B_1, 5)$, $|A_1B_1| = 4$)

19. Zvoľte si ľubovoľný trojuholník $A_1B_1C_1$ v priemetni. Nech $z^A = 22$, $z^B = 19$ a $z^C = 17$. Zobrazte hlavnú priamku roviny ABC s kótou 19, spádovú priamku tejto roviny incidentnú s bodom A a určte uhol roviny s priemetňou.

20. V rovine ABC z predchádzajúcej úlohy dourčte priamku m a zostrojte úsečku, ktorej dĺžka sa rovná intervalu tejto priamky. (Obr. 7)

21. Rovina ρ je daná obrazom svojej spádovej priamky $s^{\rho} = \overleftrightarrow{MN}$. Dourčte priamku m s danou rovinou incidentnú. (Obr. 8)

22. Zobrazte rovinu α', ktorá prechádza bodom M a je rovnobežná s rovinou α. Rovina α je určená: a) obrazom spádovej priamky $s^{\alpha} = \overleftrightarrow{AB}$; b) tromi bodmi A, B, C. (Obr. 9 a, b)

23. Dourčte priamku l ($A \in l$, $l \parallel \beta$) ak rovina β je určená obrazom svojej spádovej priamky $s^{\beta} = \overleftrightarrow{MN}$. (Obr. 10)

24. Zostrojte priesečnicu rovín α a β, ak sú obe roviny určené obrazmi spádových priamok ($s^{\alpha} = \overleftrightarrow{AB}$, $s^{\beta} = \overleftrightarrow{CD}$). (Obr. 11)

25. Zostrojte prienik rovinných útvarov s hranicou v trojuholníkoch ABC a DEF [a) $A(-1; 0; 0)$, $B(4; 5; 4)$, $C(-4; 4; 5)$, $D(4; 0; 1)$, $E(-4; 3; 3)$, $F(0; 6; O)$; b) $A(-2; 1; 1)$, $B(0; 4; 5)$, $C(3; 2; 2)$, $D(-2; 3; 4)$, $E(3; 0; 5)$, $F(0; 5; 0)$; c) $A(-4; 1{,}5; 1)$, $B(4; 2{,}5; 1)$, $C(-1; 7; 5)$, $D(-5{,}5; 4{,}5; 2{,}5)$, $E(5; 6; 0)$, $F(0; 0; 6)$].

26. Zostrojte prienik rovinného útvaru (s hranicou v rovnobežníku $ABCD$) s rovinným pásom určeným priamkami a, b ($a \parallel b \parallel \pi$, $z^{a} = 10$, $z^{b} = 4$). (Obr. 12)

27. Určte vzájomnú polohu priamky $p = \overleftrightarrow{MN}$ s rovinou rovnobežníka $ABCD$. Ak je priamka s touto rovinou rôznobežná, zostrojte ich spoločný bod. (Obr. 13)

28. Určte vzájomnú polohu rovín α, β; v prípade rôznobežnosti zostrojte ich priesečnicu. (Obr. 14)

29. Určte vzájomnú polohu priamky $p = \overleftrightarrow{AB}$ s rovinou ρ. V prípade rôznobežnosti zostrojte ich spoločný bod a vyznačte viditeľnú polpriamku priamky p vzhľadom na danú rovinu. (Zvoľte si $p_1 \parallel {}^{\alpha}h_1$.) (Obr. 15)

30. Určte vzájomnú polohu priamky $m = \overleftrightarrow{HK}$ s pravidelným päťbokým ihlanom s podstavou v priemetni a výškou v. V prípade existencie zostrojte prienik priamky s telesom. (Polomer kružnice opísanej podstave telesa sa rovná 5j, $v = 12$. H_1, K_1, sú stredy ľubovoľných dvoch nesusedných podstavných hrán telesa a $z^{H} = 2$, $z^{K} = 5$.)

31. Zobrazte priečku mimobežných priamok a, b prechádzajúcu bodom M. Bod A leží na priamke a, priamka a je rovnobežná s priemetňou a $b = \overleftrightarrow{BC}$. (Obr. 16)

32. Riešte predchádzajúcu úlohu pre: a) $a = \overleftrightarrow{AB}$, $b = \overleftrightarrow{CD}$ (obr. 17); b) $a = \overleftrightarrow{AB}$, $b = \overleftrightarrow{BC}$ ($A_1B_1C_1$ je ľubovoľný trojuholník) pre ľubovoľnú voľbu bodov A, B, C, M.

33. Zobrazte priečku mimobežných priamok $a = \overleftrightarrow{AB}$, $b = \overleftrightarrow{CD}$ rovnobežnú s priamkou l ($l \parallel \pi$). (Obr. 18)

34. Riešte predchádzajúcu úlohu pre: $a \perp \pi$, $b = \overleftrightarrow{AB}$, $l = \overleftrightarrow{MN}$ (obr. 19).

35. Zobrazte priamku k kolmú na rovinu α a incidentnú s bodom A. Rovina α je určená spádovou priamkou $s^{\alpha} = \overleftrightarrow{MN}$. V prípade a) zostrojte i bod súmerne združený s bodom M podľa roviny α. (Obr. 20 a, b)

36. Zostrojte priamku k, ktorá prechádza bodom M a je kolmá na rovinu trojuholníka ABC. V prípade dostupnej päty kolmice vyznačte i viditeľnú polpriamku priamky k vzhľadom na rovinu ABC. (Obr. 21 a, b)

37. Zostrojte: a) rovinu prechádzajúcu bodom M a kolmú na priamku $a = \overleftrightarrow{AB}$; b) priamku prechádzajúcu bodom M, kolmú na priamku a a rôznobežnú s priamkou a; c) bod súmerne združený s bodom M podľa priamky a. (Obr. 22)

38. Zostrojte vzdialenosť bodu M od priamky AB. Riešte úlohu a) pomocou otočenia roviny $\overleftrightarrow{aM}$; b) pomocou roviny α ($M \in \alpha$, $\alpha \perp a$). (Obr. 23)

39. Zobrazte kocku s jedným vrcholom A a osou súmernosti $o = \overleftrightarrow{MN}$ (o je incidentná so stredmi protiľahlých stien). Zobrazte riešenie, pre ktoré je A vrchol kocky s najmenšou kótou. (Obr. 24)

40. Zostrojte os mimobežných priamok a, b. Priamka a je kolmá na priemetňu, $b = \overleftrightarrow{\mathrm{MN}}$ (obr. 25).

41. Zobrazte pravidelný päťboký ihlan s osou $o = \overleftrightarrow{MN}$, vrcholom A podstavy a výškou $v = 8$. (Obr. 26)

42. Zostrojte uhol zhodný s uhlom priamok a, b, ak: a) $a = \overleftrightarrow{AB}$, $b = \overleftrightarrow{CD}$; b) $a \perp \pi$, $b = \overleftrightarrow{CD}$; **c)** $a \parallel \pi$, $A \in a$, $b = \overleftrightarrow{CD}$. (Obr. 27 a, b, c)

43. Zostrojte uhol zhodný s uhlom rovín α, β daných spádovými priamkami, ak: a) $s^{\alpha} = \overleftrightarrow{MN}$, $s^{\beta} = \overleftrightarrow{RQ}$; b) $\alpha \perp \pi$, $s^{\beta} = \overleftrightarrow{RQ}$; c) ${}^{\alpha}s_1 \parallel {}^{\beta}s_1$, $s^{\alpha} = \overleftrightarrow{AB}$, $s^{\beta} = \overleftrightarrow{CD}$. (Obr. 28 a, b, c)

44. Zostrojte uhol zhodný s uhlom priamky a s rovinou α, ak: a) $a = \overleftrightarrow{AB}$, $\alpha \perp \pi$; b) $a \perp \pi$, rovina α je určená spádovou priamkou $s^{\alpha} = \overleftrightarrow{MN}$. (Obr. 29 a, b)

45. Nech a je priamka, α rovina a s^{α} jej spádová priamka. Môže nastať prípad, v ktorom uhol priamky a s rovinou α je zhodný s uhlom priamok a, s^{α}? Sformulujte tvrdenie a dokážte.

46. Zobrazte kocku s jednou hranou na priamke $a = \overleftrightarrow{MN}$ ($|M_1N_1| = 4$) a nesusedným vrcholom v bode A. Vyberte riešenie, pre ktoré je bod A vrcholom kocky s najmenšou kótou. (Obr. 30)

47. Zostrojte priamku m ležiacu v rovine α a prechádzajúcu bodom C tak, aby: a) $s_m = 1/3$, b) $s_m = 2$. (Rovina α je daná bodmi A, B, C; $|A_1B_1| = 6$, $|B_1C_1| = 5$, $|C_1A_1| = 4$, $z^A = 2$, $z^B = 5$, $z^C = 1$, s_m je označenie spádu priamky m.)

48. Zobrazte rovinu α prechádzajúcu priamkou $a = \overleftrightarrow{AB}$ tak, aby sa jej spád rovnal: a) 2, b) ½. (Zvoľte si $|A_1B_1| = 5$, $z^A = 23$, $z^B = 29$.)

Poznámka. Obrázky k cvičeniam možno nájsť v závere kapitoly.

KONŠTRUKCIA ZÁKLADNÝCH TELIES Z DANÝCH PRVKOV V KÓTOVANOM ZOBRAZENÍ

1. Zostrojte pravidelný štvorboký hranol s podstavou *ABCD* v rovine α, ak je daný vrchol *A* telesa, stred *S* tejto podstavy a výška *v* hranola. [α (6; 5; 4), *A*(0; 3; ?), *S*(–3; 4; ?), $v = 7$]

2. Zostrojte pravidelný šesťboký ihlan s podstavou v rovine α, ak je daný stred *S* tejto podstavy, jeden vrchol *A* a hlavný vrchol *V* telesa leží v rovine ν ($x \subset \nu$, $\nu \perp \pi$). [α (–6; 4,5; 6), *S*(0; 2,5; ?), *A*(–2,5; 2; ?)]

3. Zostrojte rotačný valec, ktorého podstava leží v rovine α, ak je daný stred *S* tejto podstavy, jej polomer *r* a výška *v* telesa. [α(–6; 7; 5), *S*(0; 3; ?), $r = 3{,}5$, $v = 8$]

4. Zostrojte kocku, v ktorej uhlopriečka *BD* steny *ABCD* leží na priamke $m = \overleftrightarrow{PM}$. [A(–2; 6; 1), P(5; 1; 0), M(–6; 5; 5,5)]

5. Zostrojte kocku so stenou *ABCD*, ktorej vrchol *C* leží v priemetni π. [*A*(1,5; 3; 3), *B*(–1,5; 1; 1,5)]

6. Zostrojte kocku so stenou *ABCD* v rovine α, ak je daný vrchol B' protiľahlej steny a vrchol *A* leží v priemetni π (pri štandardnom označení vrcholov telesa). [α (8; 5; 6,5), B'(2,5; 8; 5,5), $x^A \leq x^B$]

7. Zostrojte pravidelný štvorboký ihlan s podstavou v rovine α, ak je daný stred podstavy *S*, jeden jej vrchol *A* a výška *v* telesa. [α(∞; 5,5; 7,5), *S*(0; ?; 4), *A*(– 2,5; ?; 2,5), $v = 7$]

8. Zostrojte pravidelný šesťboký hranol s jednou podstavou v rovine α, ak je daný stred *S* tejto podstavy a vrchol A' druhej podstavy. [α(7; 8; 6), *S*(0; ?; 3), A'(4; 5; 4)]

9. Zostrojte pravidelný päťboký (šesťboký) ihlan s podstavou v rovine α, ak je daný vrchol *A* podstavy a hlavný vrchol *V* telesa. [α(–6; 6; 7), *A*(1; 1; ?), *V*(–2,5; 8; 8)] ([α(–6; 8; 9), *A*(4; 8; ?), *V*(–4; 8; 8)])

10. Zostrojte pravidelný šesťboký ihlan s podstavou v rovine α, ktorého jedna stena leží v priemetni π. Bod *S* je stredom podstavy telesa. [α(–8; 9; 7), *S*(0; ?; 4)]

11. Zostrojte pravidelný štvorboký ihlan s podstavou *ABCD* v rovine α, hlavným vrcholom *V* a bodom *M* jednej jeho bočnej hrany. [α(6; 8; 9), *V*(4; 8; 8), *M*(0; 8; 7)]

12. Zostrojte pravidelný štvorsten *ABCD*, ktorého jedna hrana leží na priamke $m = \overleftrightarrow{KL}$. [*A*(0; 5; 1), *K*(3; 0; 7), *L*(7; 8; 4)]

13. Zostrojte pravidelný šesťboký hranol (ihlan), ak priamka $o = \overleftrightarrow{KL}$ je osou telesa, bod *A* vrcholom jednej podstavy a *v* dĺžka jeho výšky. [K(–8; 8; 0), L(0; 4; 8), A(–3,5; 3; 2), $v = 8$]

14. Zostrojte rotačný valec s osou $o = \overleftrightarrow{KU}$, bodom *M* jednej podstavnej kružnice a výškou *v*. [*K*(–1; 6; 8), *U*(5; 1; 3), *M*(0; 1,5; 3), $v = 8$]

15. Zostrojte kocku, pre ktorú je priamka $o = \overleftrightarrow{UV}$ osou súmernosti (incidentnou so stredmi protiľahlých stien) a bod *A* jeden jej vrchol. [U(–4; 1; 0), V(2; 9; 9), A(–5; 4; 4)]

16. Zostrojte pravidelný šesťboký ihlan so stredom *S* podstavy, hlavným vrcholom *V* a podstavnou hranou *AB* v priemetni *π*. [*S*(1,5; 3,5; 2), *V*(–3; 7; 6,5)]

Poznámka. Ďalšie aplikačné cvičenia a príklady, vrátane stručného vysvetlenia princípu zobrazenia a riešenia základných úloh v metóde kótovaného zobrazenia čitateľ môže nájsť o. i. v diplomovej práci RNDr. Jána Bakšu „*Zbierka úloh z deskriptívnej geometrie*“, MFF UK Bratislava, 1998 v kapitole *Kótované zobrazenie*.

LITERATÚRA

Urban, A., *Deskriptivní geometrie I*, Praha, SNTL 1997, 1982

Kraemer, E., *Zobrazovací metody I*, SPN Praha, 1991

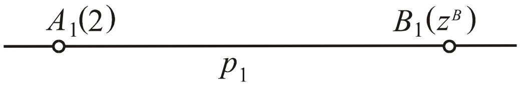
Kadeřávek, F. – Klíma, J. – Kounouský, J., *Deskriptivní geometrie I*, NČSAV, Praha 1954

Medek V. – Šedivý, O., *Deskriptívna geometria pre gymnáziá*, SPN Bratislava, 1986

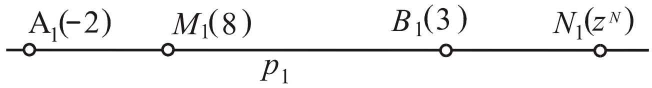
Harant, M. – Lanta, O., *Deskriptívna geometria pre 2. a 3. ročník SVŠ*, SPN Bratislava, 1996

Bakša, J., *Zbierka úloh z deskriptívnej geometrie*, diplomová práca, MFF UK Bratislava, 1998

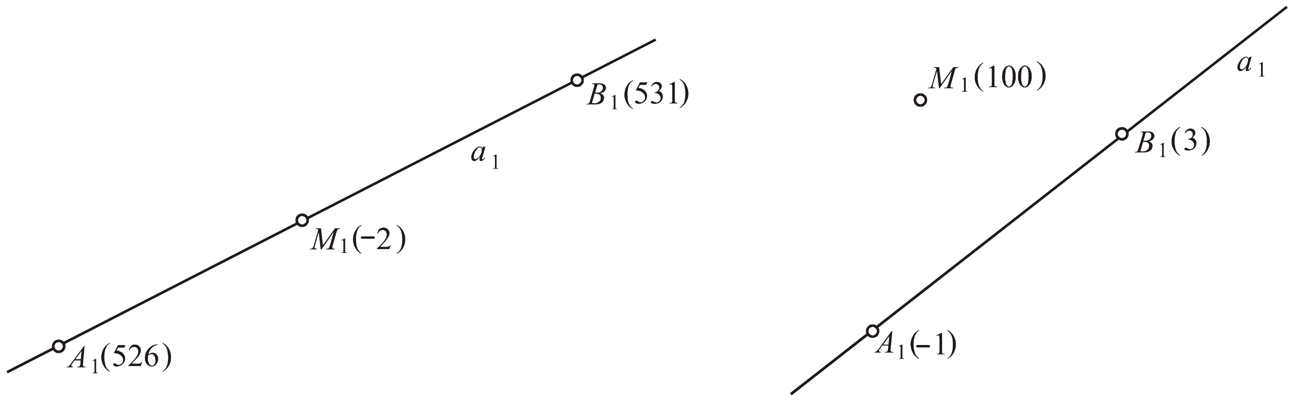
OBRÁZKY K CVIČENIAM



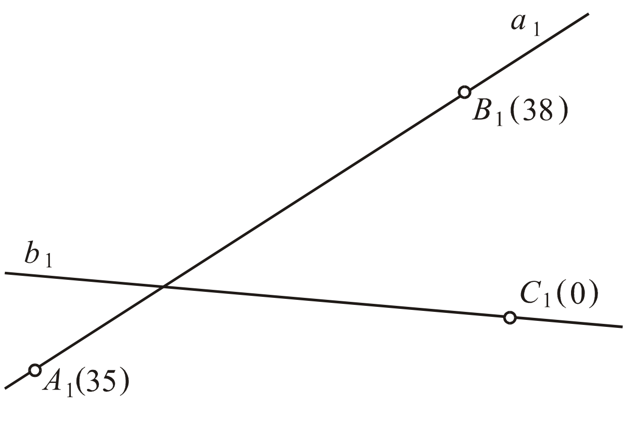
Obr. 1



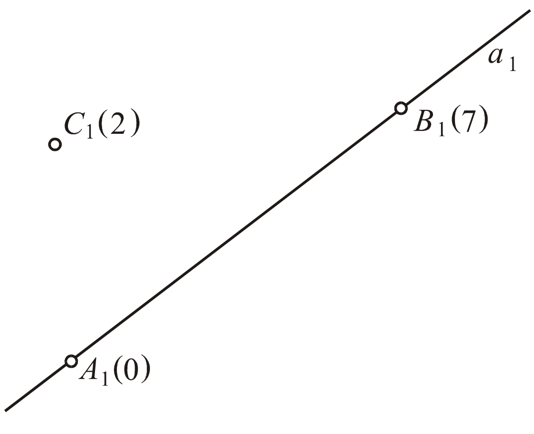
Obr. 2



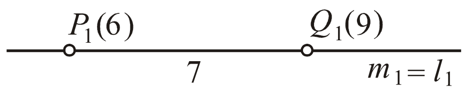
Obr. 3 *a, b*



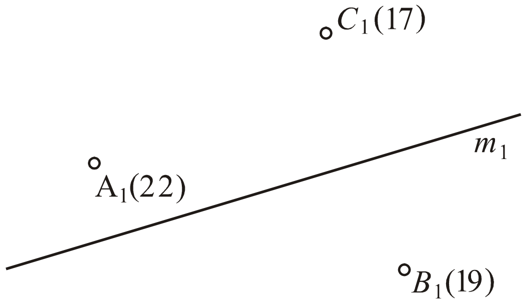
Obr. 4



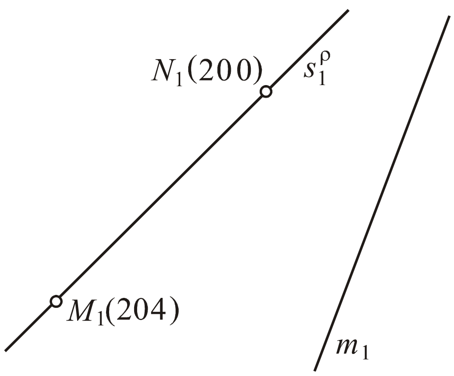
Obr. 5



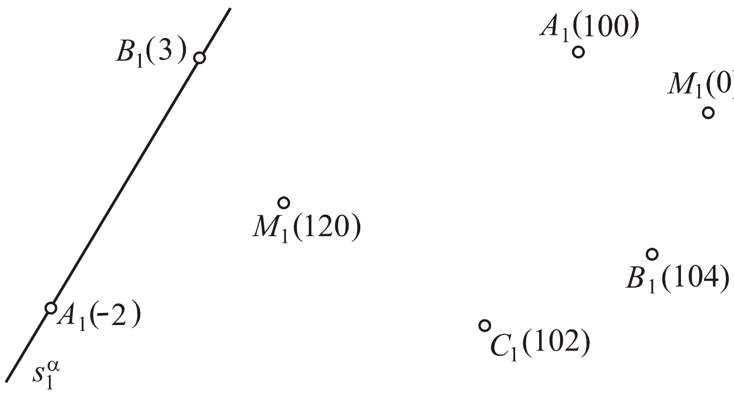
Obr. 6



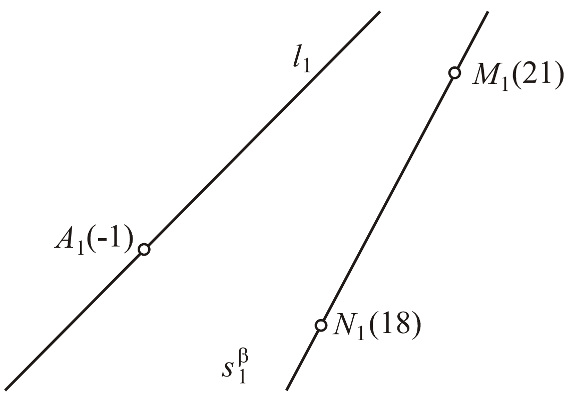
Obr. 7



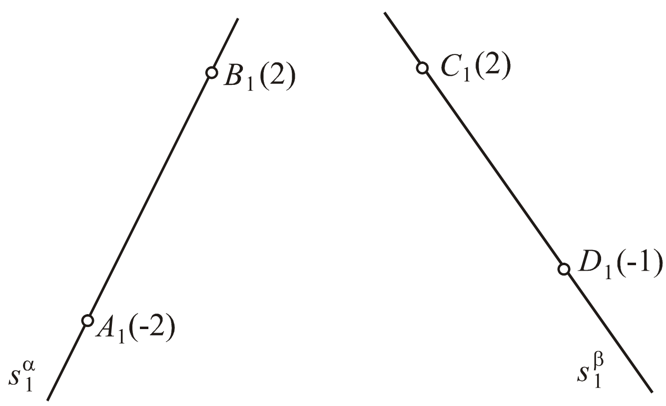
Obr. 8



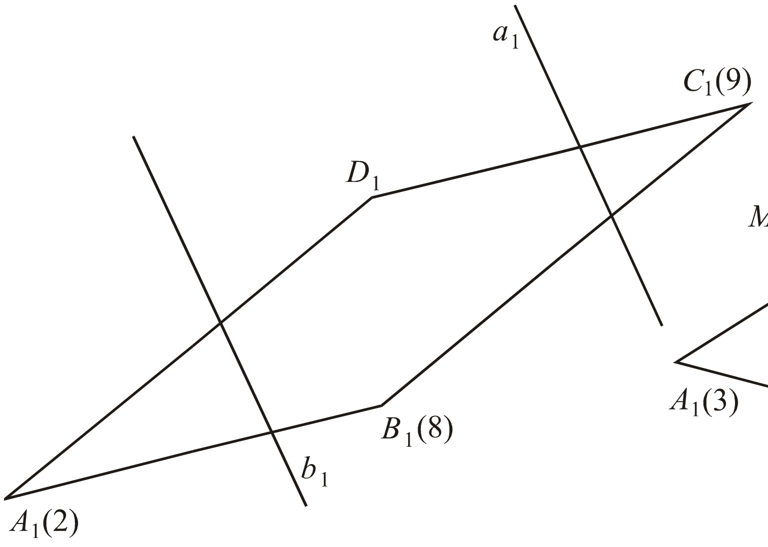
Obr. 9*a,b*



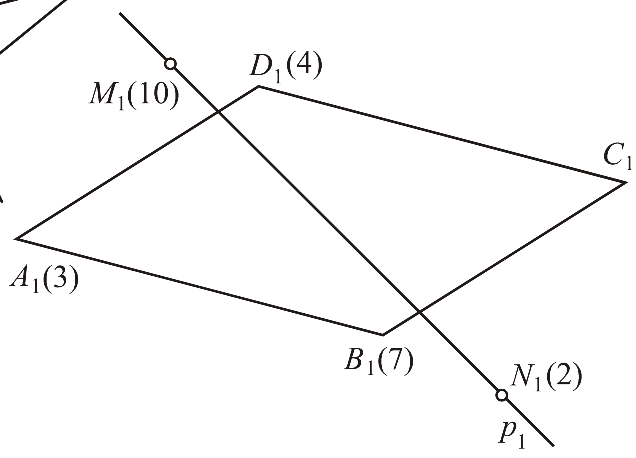
Obr. 10



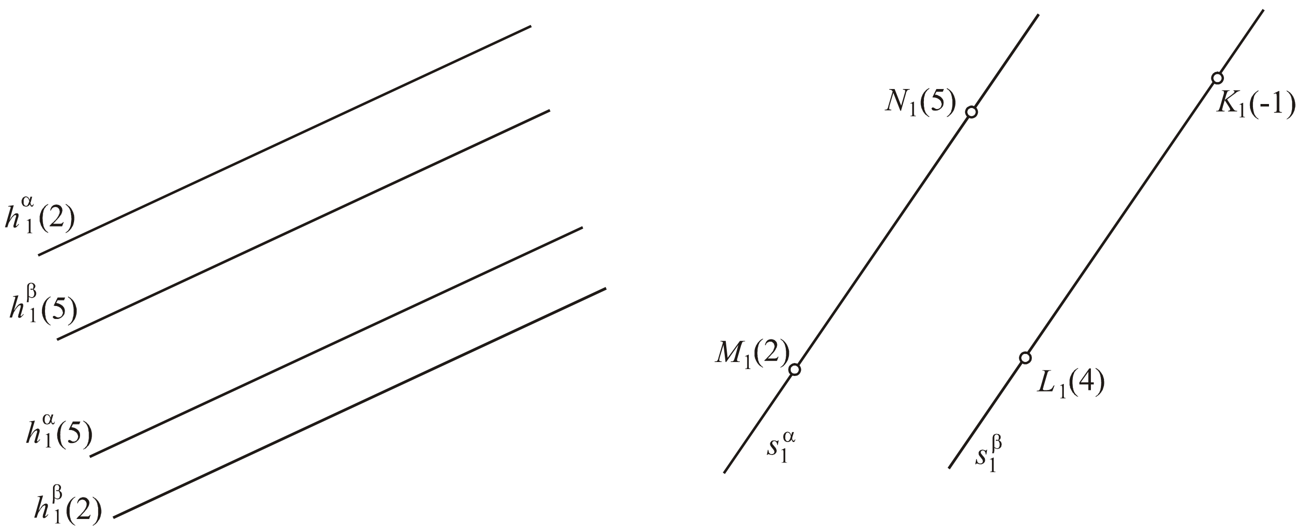
Obr. 11



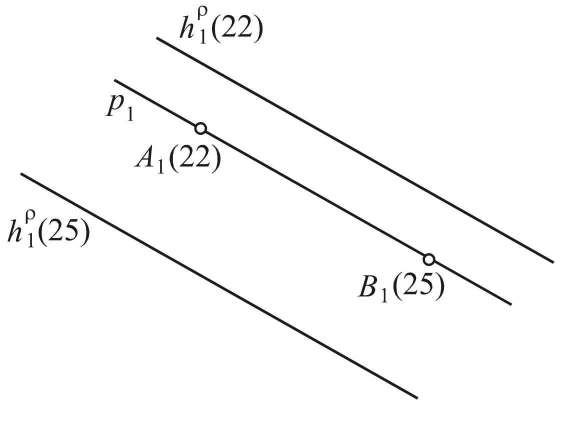
Obr. 12



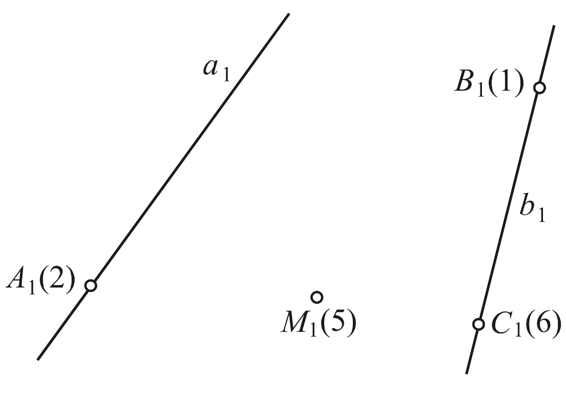
Obr. 13



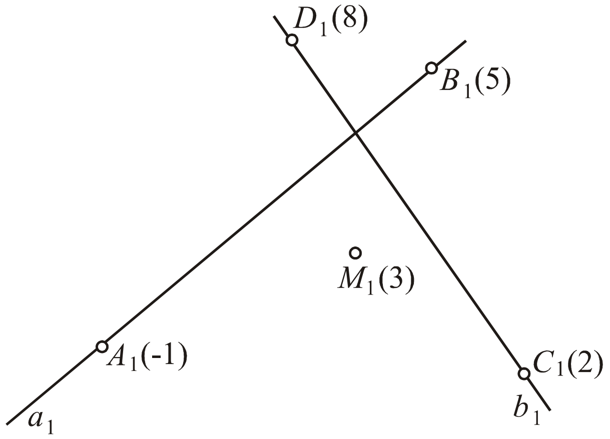
Obr. 14 *a, b*



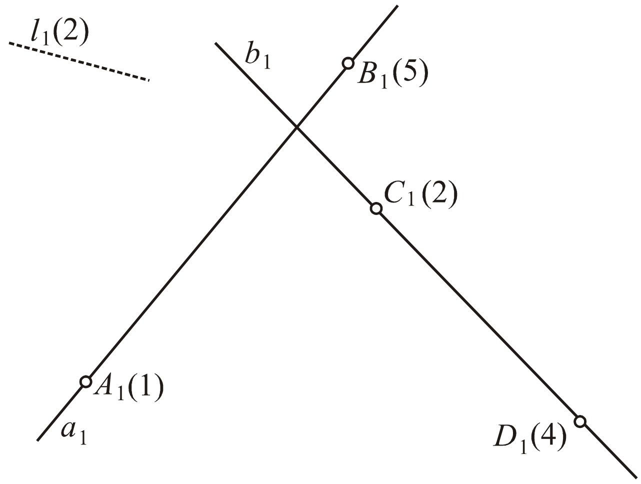
Obr. 15



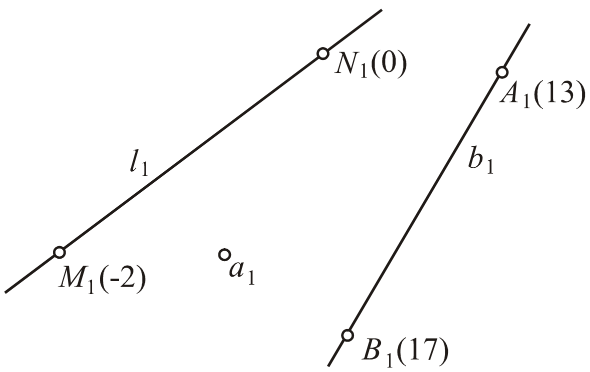
Obr. 16



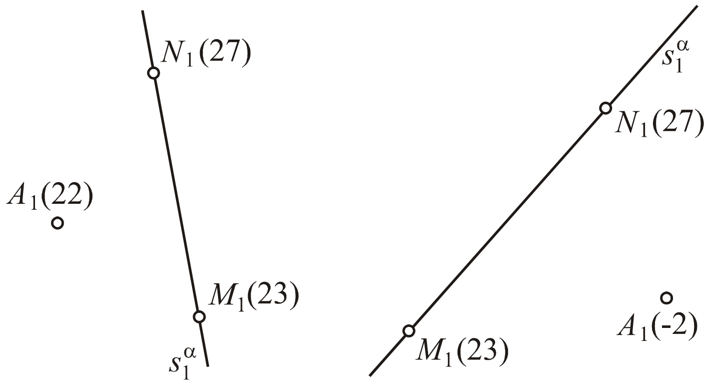
Obr. 17



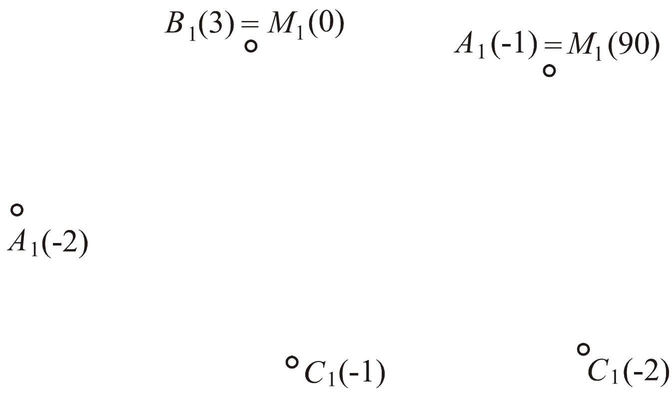
Obr. 18



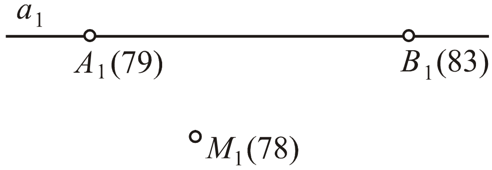
Obr. 19



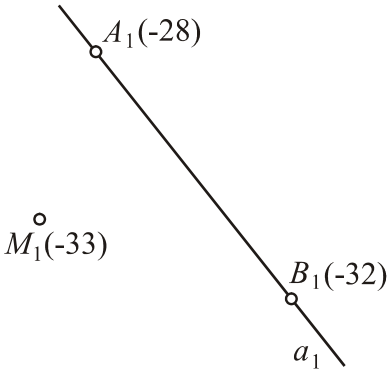
Obr. 20 *a, b*



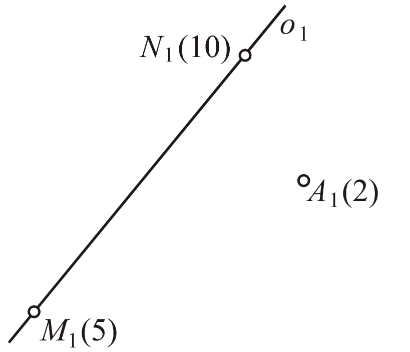
Obr. 21 *a, b*



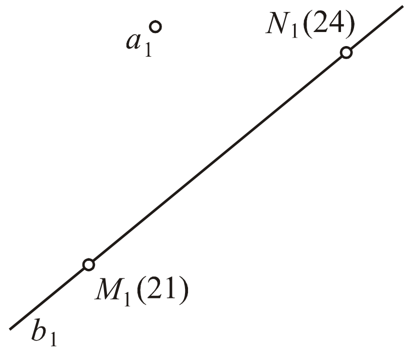
Obr. 22



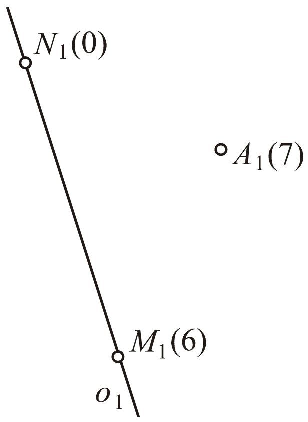
Obr. 23



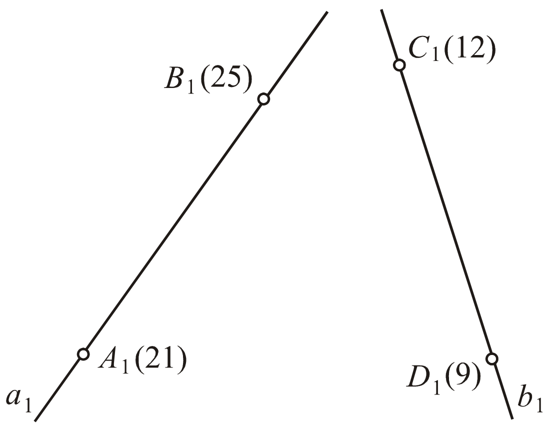
Obr. 24



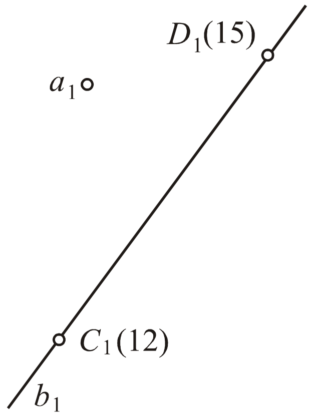
Obr. 25



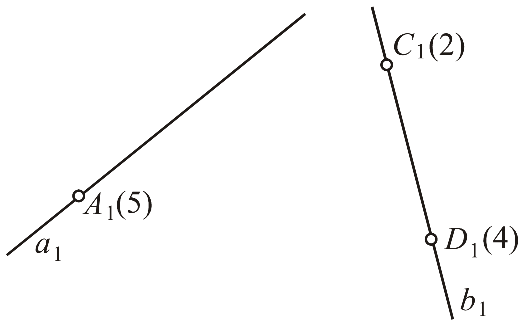
Obr. 26



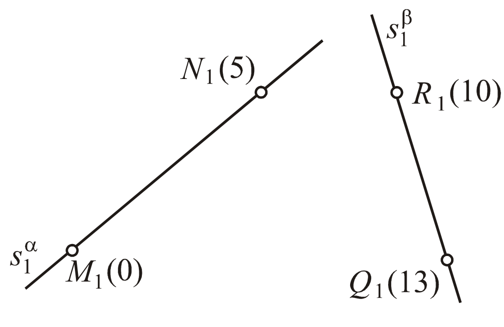
Obr. 27 *a*



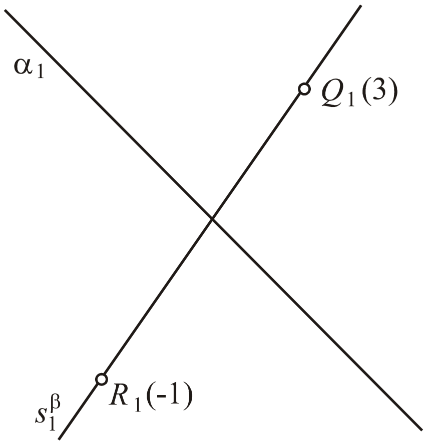
Obr. 27 *b*



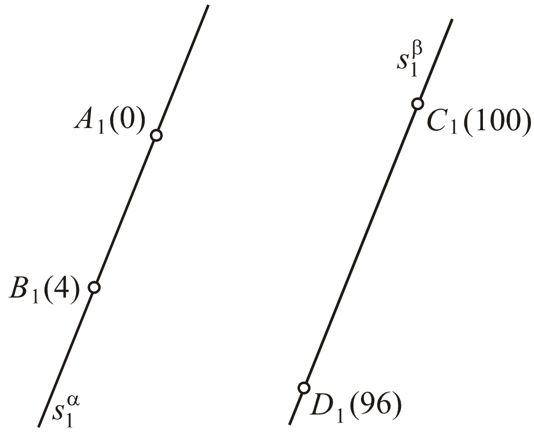
Obr. 27 *c*



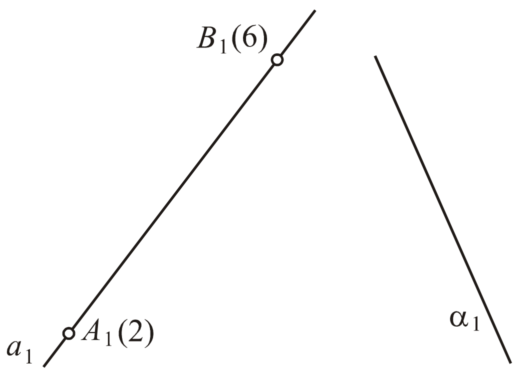
Obr. 28 *a*



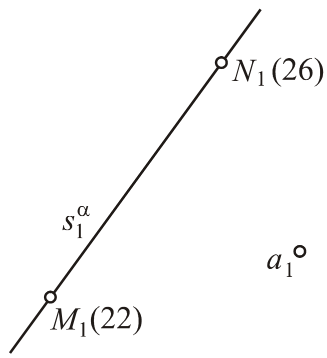
Obr. 28 *b*



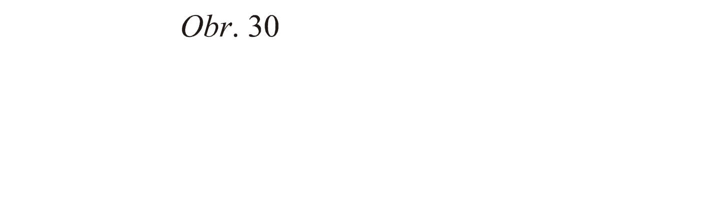
Obr. 28 *c*



Obr. 29 *a*



Obr. 29 *b*



Obr. 30