

ZOBRAZOVACIE METÓDY 2

(prvý ročník, letný semester; prednáška 2 hod., cvičenie 2 hod. / týž.; 6 kreditov, 40 / 60)

Program druhého semestra (Zobrazovacie metódy 2): I *Mongeovo zobrazenie*; II *Perspektívna kolineácia medzi dvoma rovinami v rozšírenom euklidovskom priestore. Rovinné rezy kružnicovej kužeľovej plochy, kužeľosečky*; III *Aplikácie v riešení úloh na základných telesách (hranol, ihlan, valec, kužeľ, guľová plocha) v Mongeovej metóde i v kótovanom zobrazení.*

Cieľ: Ovládanie Mongeovej metódy (princíp zobrazenia, riešenie základných polohových a metrických úloh v tejto metóde, konštrukcia obrazov základných plôch a telies ako aj riešenie rozličných úloh na týchto objektoch využitím poznatkov zo stereometrie, afinity, perspektívnej kolineácie (najmä homológie) a projektívnej geometrie).

Literatúra je ako obvykle uvedená v závere každej z kapitol I – III.

I Mongeovo zobrazenie

OSNOVA PREDNÁŠKY

1. Princíp zobrazovacej metódy. Základné pojmy. Obraz bodu. Rovina súmernosti a totožnosti.
2. Obraz priamky a roviny. Stopníky priamky, stopy roviny. Hlavné a spádové priamky (príslušnej osnovy) roviny.
3. Obraz dvojice priamok. Vzťah pôdorysov a nárysov bodov tej istej roviny.
4. Dĺžka úsečky. Uhly priamky [roviny] s priemetňami a ich súčet.
5. Polohové úlohy v Mongeovom zobrazení. Vzájomná poloha priamky a roviny. Viditeľnosť.
6. Vzájomná poloha dvoch rovín. Priesek rovinných útvarov. Viditeľnosť.
7. Pričky mimobežných priamok.
8. Konštrukcia rovinného útvaru. Afinita otáčania roviny. Uhol dvoch priamok.
9. Otáčanie roviny kolmej na práve jednu z priemetní do zvyšnej priemetne. Konštrukcia siete kosého hranola. Konštrukcia siete ihlana s podstavou v jednej z priemetní.
10. Kolmica na rovinu. Vzdialenosť bodu od roviny. Rovina kolmá na priamku. Vzdialenosť bodu od priamky.
11. Uhly základných geometrických útvarov (priamka a rovina, dve roviny).
12. Os mimobežných priamok a ich vzdialenosť.
13. Konštrukcia priamky a roviny s danými odchýlkami od priemetní.
14. Rovina súmernosti dvoch rovín. Konštrukcia.
15. Konštrukcia základných telies z daných prvkov.

MONGEOVO ZOBRAZENIE CVIČENIA

1. Dané sú body A, B, C, D . a) Určte kvadrant, do ktorého patrí každý z nich; b) Dourčte body M, N tak, aby $M \in \pi, N \in \nu$; c) Zobrazte priamky a, b, c, d incidentné v danom poradí s bodmi A, B, C, D tak, aby: $a \perp \pi, b \perp \nu, c \perp x, d \parallel x$. V ktorom prípade nie je priamka určená svojím pôdorysom a nárysom? (Obr. 1)
2. Dourčte priamky b, c, d, e tak, aby: $b \perp \pi, c \perp \nu, d \parallel \pi \wedge D \in d, e \parallel \nu \wedge E \in e$ a zostrojte existujúce stopníky priamok a, b, c, d, e . (Obr. 2)
3. Dourčte priamku l tak, aby ležala v danej rovine α . Ako by ste riešili úlohu, ak by niektorý zo stopníkov priamky l v úlohe 3a) alebo 3d) bol nedostupný? (Obr. 3a – 3e)
4. Zvoľte si obrazy troch nekolineárnych bodov A, B, C . Zostrojte trojuholník ${}^1A {}^1B {}^1C$ zhodný s trojuholníkom ABC , uhly zhodné s uhlami jeho strán s priemetňami a obraz jeho ťažiska.
5. Zobrazte dvojice rovnobežných, rôznobežných a mimobežných priamok (vo všetkých osobitných polohách vzhľadom na priemetne).
6. Zobrazte roviny $\pi, \nu, \pi'(M \in \pi', \pi' \parallel \pi), \nu'(M \in \nu', \nu' \parallel \nu), \alpha(a \subset \alpha, \alpha \perp \pi), \beta(a \subset \beta, \beta \perp \nu), \gamma(a \in \gamma, \gamma \parallel x)$ a zostrojte existujúce stopy rovín. (Obr. 4)
7. Dourčte bod M tak, aby ležal v danej rovine α (obr. 5a – 5f). a), b) $\alpha = \leftrightarrow ab$; c) $\alpha = \leftrightarrow ABC$; d) rovina je určená spádovou priamkou prvej osnovy; e) rovina je určená spádovou priamkou druhej osnovy; f) $l \subset \alpha, \alpha \parallel x$.
8. Vo všetkých prípadoch z predchádzajúcej úlohy zostrojte v rovine α hlavné priamky oboch osnov.
9. Zostrojte rovinu prechádzajúcu bodom M a rovnobežnú s danou rovinou α (obr. 6a – 6d). b) $l \subset \alpha \wedge \alpha \parallel x$; c) Rovina je určená spádovou priamkou prvej osnovy; d) $\alpha = \leftrightarrow ab, a \parallel b$.
10. Zostrojte priesečnicu rovín α, β (obr. 7a – 7e). b) $\alpha \perp \pi$; c) $\beta \parallel x$; d) $X^\alpha = X^\beta$; e) $\alpha \parallel x \parallel \beta$.
11. Určte vzájomnú polohu priamky a s rovinou α (obr. 8a – 8f). b) $\alpha \parallel x$; c) $a \parallel x, \alpha \parallel x, l \subset \alpha$; d) $\alpha = \leftrightarrow kl (k \parallel l)$; e) rovina α je určená spádovou priamkou prvej osnovy; f) $a \parallel x$, rovina α je určená spádovou priamkou druhej osnovy. *Poznámka:* v prípade, keď sa v zadaní úlohy nevyskytuje základnica, daný je vždy smer ordinál (platí to aj pre všetky nasledujúce cvičenia).
12. Zostrojte priečku mimobežných priamok a, b rovnobežnú s priamkou l . (Obr. 9a, 9b; v prípade 9b) je priamka l rovnobežná s priamkou $x = \pi \cap \nu$.)
13. Zostrojte priečku mimobežných priamok a, b prechádzajúcu bodom $M = (M_1, ?)$, ktorý leží v rovine totožnosti. (Obr. 10)
14. Zostrojte priesek rovinných oblastí s hranicami v trojuholníku ABC a rovnobežníku $MNPQ$. $A(0; 1; 8), B(4; 6; 0), C(-4,5; 1; 1), M(-2; 8; 1), N(5,5; 4; 3), P(1; 1; 7)$
15. Zostrojte priesek rovinných oblastí s hranicami v trojuholníkoch ABC a DEF . a) $A(-2; 1; 1), B(0; 4; 5), C(3; 2; 2), D(-2; 3; 4), E(3; 0; 5), F(0; 5; 0)$; b) $A(-4; 1,5; 1), B(4; 2,5; 1), C(-1; 7; 5), D(-5,5; 4,5; 2,5), E(5; 6; 0), F(0; 0; 6)$

16. Dourčte priamku a tak, aby prechádzala daným bodom A a bola rovnobežná s danou rovinou α . a) $\alpha = \leftrightarrow p^\alpha n^\alpha$; b) $\alpha = \leftrightarrow bc$; c) $\alpha \parallel x \wedge l \subset \alpha$; d) $\alpha \perp \pi$. (Obr. 11a – 11d)
17. Zostrojte priesečnicu roviny α s rovinou totožnosti a v prípade zvolenej základnice x_{12} i priesečnicu s rovinou súmernosti. a) $\alpha = \leftrightarrow p^\alpha n^\alpha$; b) $\alpha \parallel x$; c) $\alpha \parallel x \wedge l \subset \alpha$; d) $\alpha \perp \pi$; e) $\alpha \perp x$; f) $\alpha = \leftrightarrow ABC$. (Obr. 12a – 12f)
18. Dourčte priamky a, b tak, aby prechádzali bodom A a jedna z nich bola rovnobežná s rovinou súmernosti a druhá s rovinou totožnosti. (Obr. 13a – 13c)
19. Daná je priamka $a = (a_1, a_2)$ ($a_1 \parallel a_2$). Zostrojte priesečnicu roviny α ($b \subset \alpha \wedge \alpha \parallel a$) s rovinou totožnosti. (Obr. 14)
20. Zostrojte priamku, ktorá prechádza bodom M , je rovnobežná s danou rovinou $\alpha = \leftrightarrow ab$ ($a \parallel b$) a pretína priamku m . (Obr. 15)
21. Zostrojte dĺžku úsečky AB a uhly priamky AB s oboma priemetňami. (Obr. 16a – 16e).
22. Zostrojte uhly roviny α s oboma priemetňami. V a), b) je rovina určená spádovou priamkou (príslušnej osnovy); c) $\alpha = \leftrightarrow ab$; d) $\alpha \parallel x \wedge l \subset \alpha$; e) $\alpha \parallel x$. (Obr. 17a – 17e)
23. Zostrojte uhol zhodný s uhlom priamok a, b (obr. 18a – 18d). b) $a \parallel v$; c) $a \perp \pi$; d) $a \parallel x$.
24. Zostrojte uhol zhodný s uhlom rovín α, β (obr. 19a – 19d). a) $\alpha \perp \pi, \beta \perp v$; b) $\alpha \perp \pi, \beta \parallel x$; c) $\alpha \parallel x \parallel \beta$; d) $\beta = \leftrightarrow ab$.
25. Zostrojte vzdialenosť priamok a, b (obr. 20a – 20c). (V a) i b) ide o rovnobežky.)
26. Dourčte obraz obdĺžnika $ABCD$ ($AB \parallel \pi$). (Obr. 21)
27. Dourčte obraz štvorca $ABCD$, ak $AB \parallel \pi$ a strana BC je rovnobežná s danou priamkou l . (Obr. 22)
28. Zostrojte rovnostranný trojuholník $ABC \subset \alpha$ ($\alpha \perp v$). Úlohu riešte pomocou otočenia roviny α okolo hlavnej priamky prvej osnovy do polohy rovnobežnej s priemetňou π . (Obr. 23)
29. Zostrojte rovinu súmernosti úsečky AB (obr. 24a – 24c). c) $AB \parallel \pi$.
30. Určte vzdialenosť bodu $M = (M_1, M_2)$ od danej roviny α (obr. 25a, b). a) $\alpha = \leftrightarrow ab, a \parallel b$; b) $\alpha \parallel x \wedge l \in \alpha$; c) $\alpha \perp \pi$. V poslednom prípade si bod a rovinu zvoľte ľubovoľne tak, aby neboli incidentné.
31. Zostrojte vzdialenosť bodu M od danej priamky a (obr. 26a – 26c). b) $a = \leftrightarrow AB$; c) Priamka a je rovnobežná práve s jednou z priemetní – obraz priamky a bodu si zvoľte ľubovoľne tak, aby bod neležal na priamke. Úlohu riešte dvoma spôsobmi.
32. Zostrojte bod súmerne združený s daným bodom M podľa danej priamky a . (Obr. 26a – 26c, zadanie je zhodné so zadáním z cvičenia 31.)
33. Zostrojte priamku, ktorá prechádza daným bodom A a s priemetňami π, v má v danom poradí odchýlky a) $30^\circ, 45^\circ$; b) $60^\circ, 30^\circ$; c) $60^\circ, 75^\circ$. Obraz bodu $A = (A_1, A_2)$ si zvoľte ľubovoľne.
34. Zostrojte rovinu, ktorá prechádza daným bodom A a s priemetňami π, v má v danom poradí odchýlky a) $60^\circ, 75^\circ$; b) $30^\circ, 60^\circ$; c) $45^\circ, 30^\circ$.

35. Zostrojte rovinu súmernosti rovín α, β . (Obr. 27a, b)
36. Daná je hranolová plocha osou $o = \leftrightarrow SL$ a určujúcim pravidelným šesťuholníkom $ABCDEF$ v rovine π so stredom S . Zostrojte ľubovoľný normálový rez tejto plochy a útvar zhodný s rezovým n -uholníkom. V prípade a) zostrojte aspoň jednu rovinu z druhej sústavy rovinných rezov plochy, ktoré sú pravidelnými šesťuholníkmi. [a) $S(-6; 3,5; ?)$, $L(0; 3,5; 3)$, $A(-3,5; 3; ?)$; b) S, A ako v a), $L(0; 6; 3)$]
37. Úlohu 35 vyriešte pre kružnicovú valcovú plochu s určujúcou kružnicou k so stredom S v rovine π a osou o . Polomer kružnice k si zvolte ľubovoľne. V prípade a) zostrojte aspoň jednu kružnicu z druhej sústavy kružnicových rezov plochy.
38. Daná je ihlanová plocha určujúcim 5-uholníkom $ABCDE$ v rovine π a vrcholom V [$A(; ;)$, $B(; ;)$, $C(; ;)$, $D(; ;)$, $E(; ;)$, $V(; ;)$]. Zostrojte rovinný rez plochy rovinou α a útvar zhodný s rezom, ak: a) $\alpha(; ;)$; b) $\alpha(; ;)$; c) $\alpha(; ;)$.
39. Zobraďte ľubovoľnú kružnicu so stredom S v rovine α . a) $\alpha = \leftrightarrow p^\alpha n^\alpha$; b) $\alpha \perp v$; c) $\alpha \parallel x$ (obr. 28a – 28c).
40. Zostrojte dráhu bodu M pri rotácii okolo priamky $a = \leftrightarrow AB$. Zadanie je zhodné so zadaním v cvičení 31.

Poznámka. Obrázky k cvičeniam čitateľ nájde v závere kapitoly za literatúrou.

KONŠTRUKCIA ZÁKLADNÝCH TELIES Z DANÝCH PRVKOV V MONGEOVEJ METÓDE

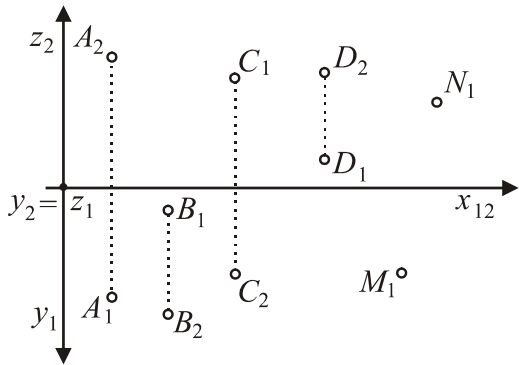
Poznámka. a) Vyriešte v Mongeovej metóde cvičenia 1 – 18 z rovnomennej state v metóde kótovaného zobrazenia.

b) Ďalšie aplikačné cvičenia a príklady, vrátane stručného vysvetlenia princípu zobrazenia a riešenia základných úloh v Mongeovej metóde čitateľ môže nájsť o. i. v diplomovej práci RNDr. Jána Bakšu „Zbierka úloh z deskriptívnej geometrie“, MFF UK Bratislava, 1998 v kapitole *Mongeovo zobrazenie*. Základné pojmy rovnobežného osvetlenia a osvetlenie jednoduchých telies prebraných v stereometrii možno nájsť v diplomovej práci RNDr. Kristíny Rostásovej (Lászlóovej) „Osvetlenie základných geometrických útvarov“, MFF UK Bratislava, 2000

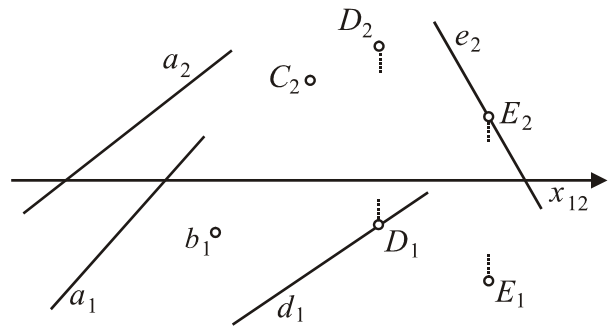
LITERATÚRA

- Urban, A., *Deskriptivní geometrie I*, Praha, SNTL 1997, 1982
- Kraemer, E., *Zobrazovací metody I, II*, SPN Praha, 1991
- Kadeřávek, F. – Klíma, J. – Kounouský, J., *Deskriptivní geometrie I*, NČSAV, Praha 1954
- Medek, V. – Šedivý, O., *Deskriptivna geometria pre gymnáziá*, SPN Bratislava, 1986
- Harant, M. – Lanta, O., *Deskriptivna geometria pre 2. a 3. ročník SVŠ*, SPN Bratislava, 1996
- Bakša, J., *Zbierka úloh z deskriptívnej geometrie*, diplomová práca, MFF UK Bratislava, 1998
- Lászlóová, K., *Osvetlenie základných geometrických útvarov*, diplomová práca, MFF UK Bratislava, 2000

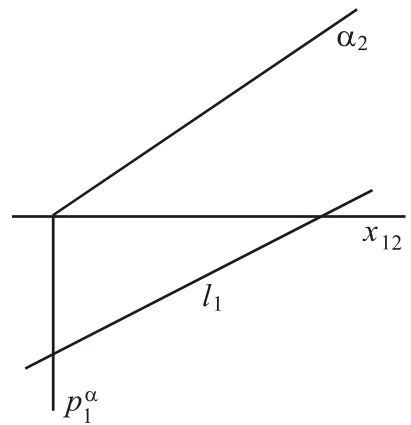
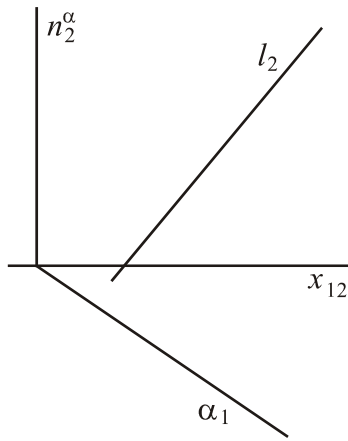
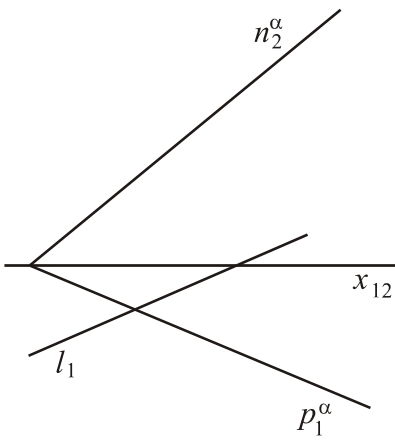
OBRÁZKY K CVIČENIAM



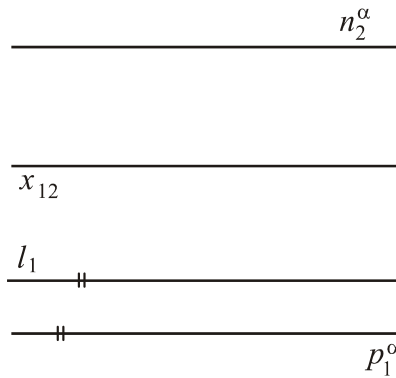
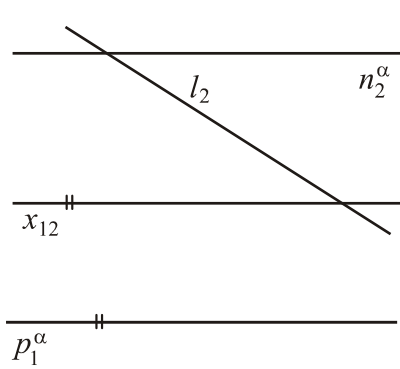
Obr. 1



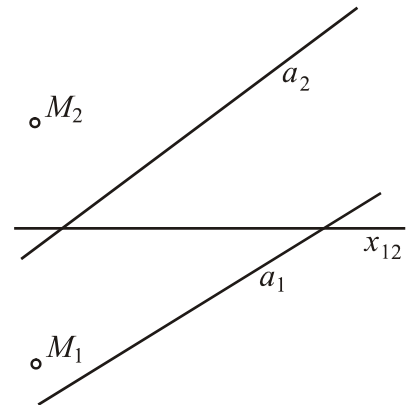
Obr. 2



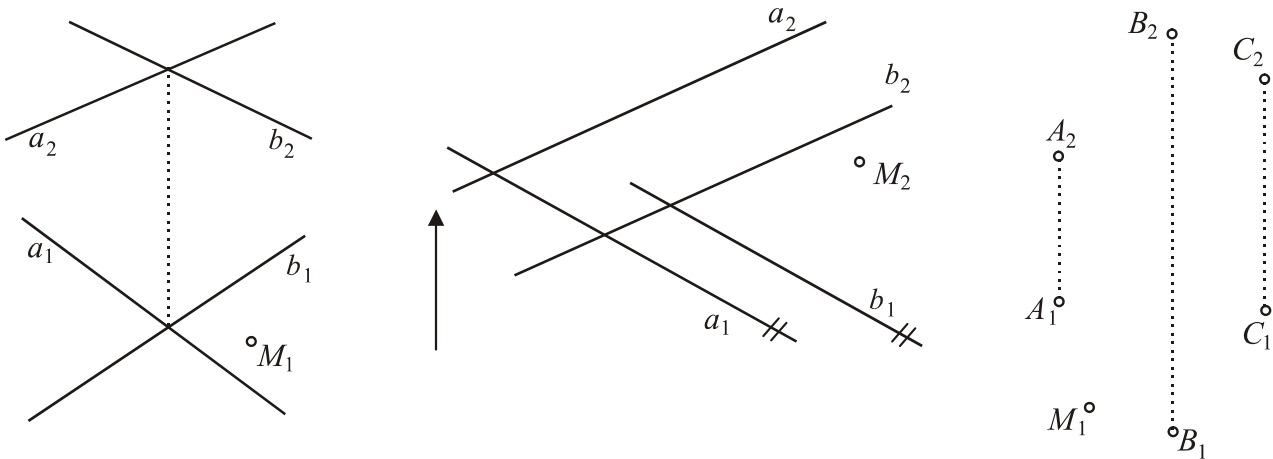
Obr. 3 a - c



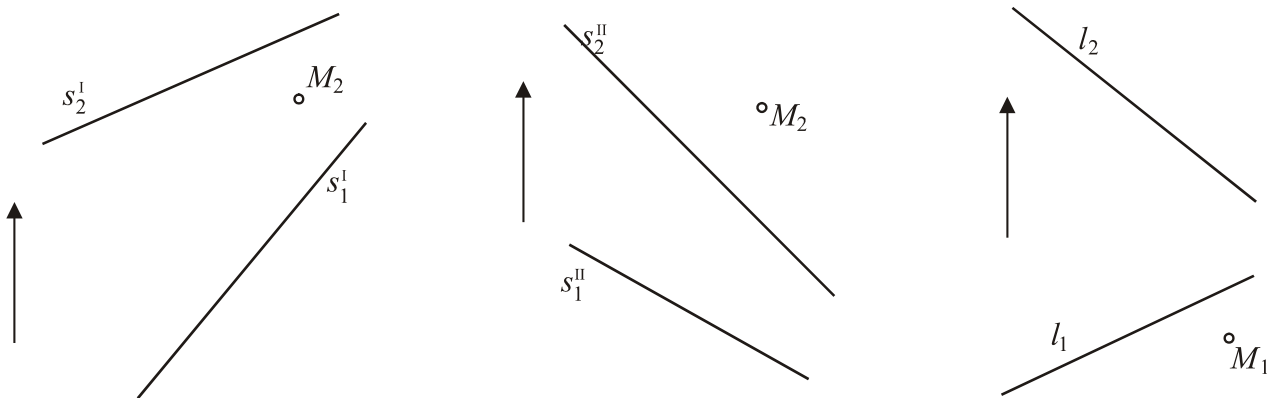
Obr. 3 d - e



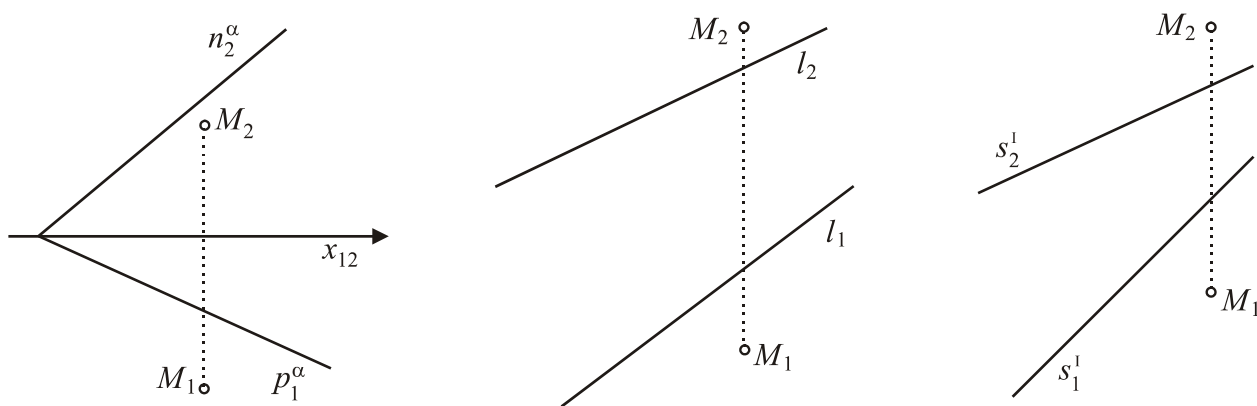
Obr. 4



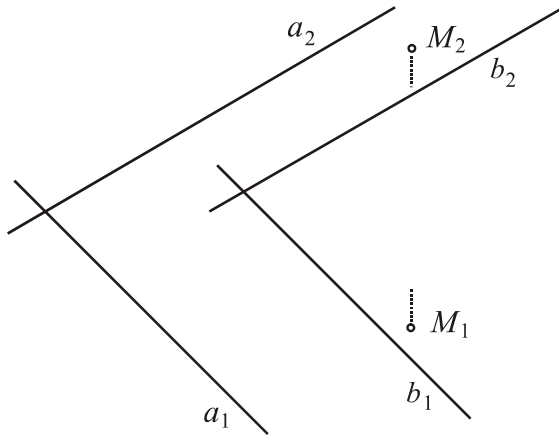
Obr. 5a - c



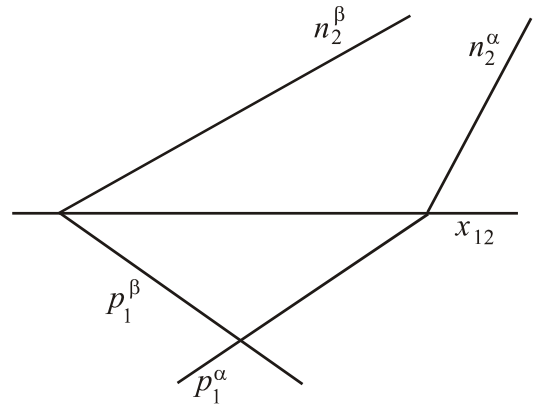
Obr. 5d - f



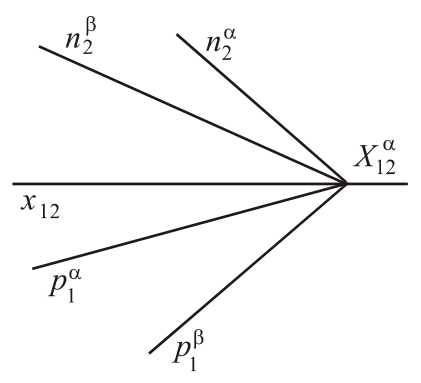
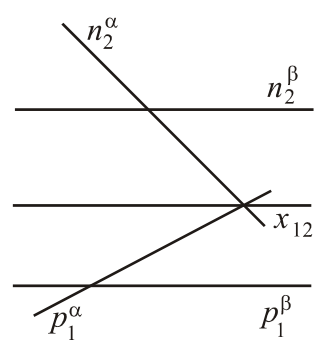
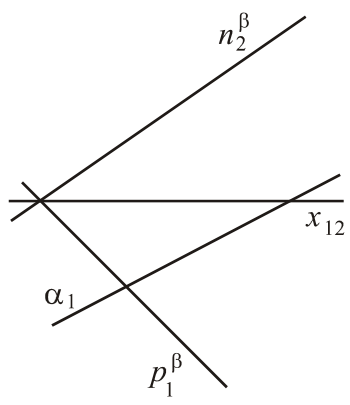
Obr. 6a - c



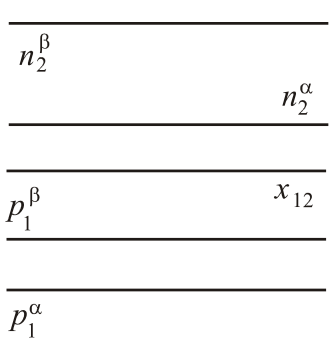
Obr. 6d



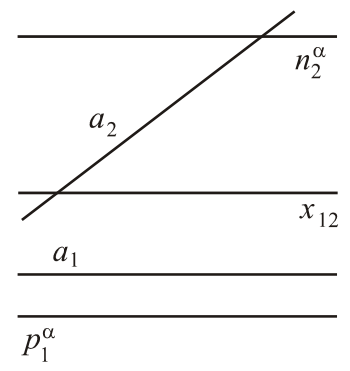
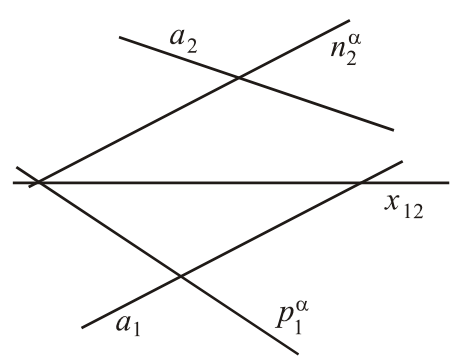
Obr. 7a



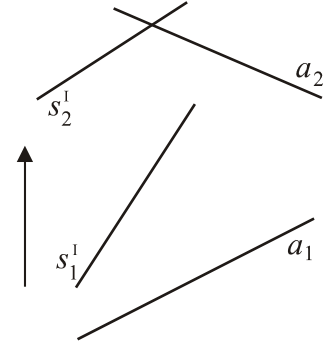
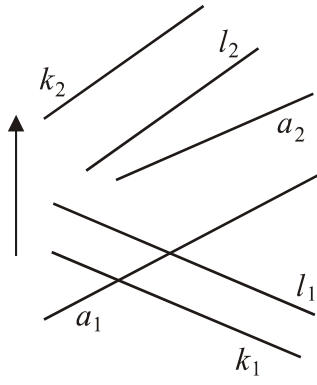
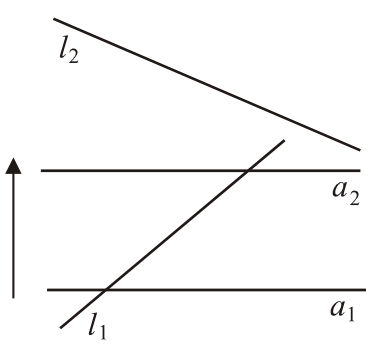
Obr. 7b - d



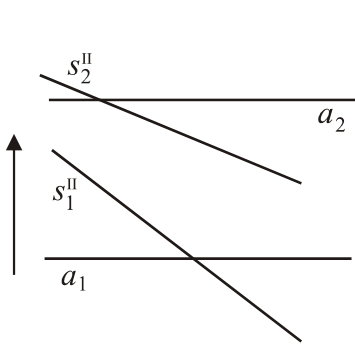
Obr. 7e



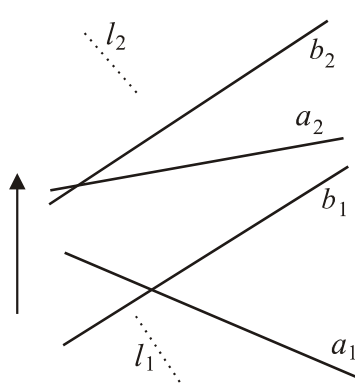
Obr. 8a, b



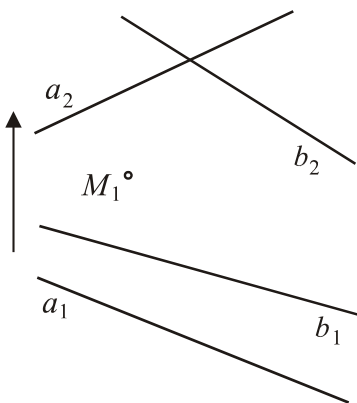
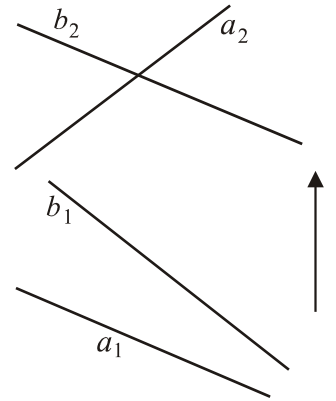
Obr. 8c-e



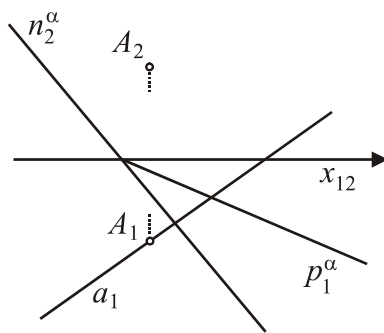
Obr. 8f



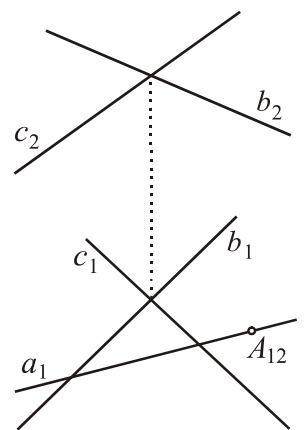
Obr. 9a, b

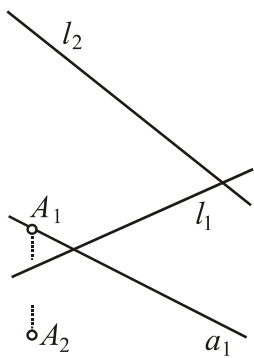


Obr. 10

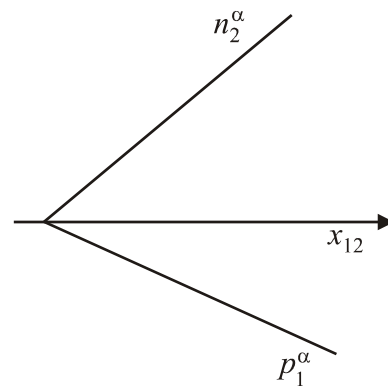
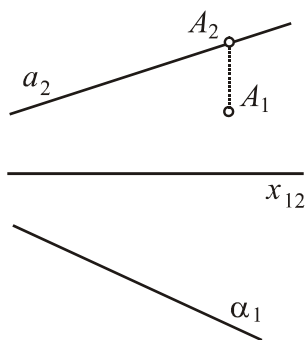


Obr. 11a, b

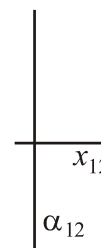
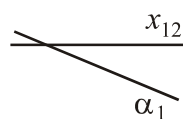
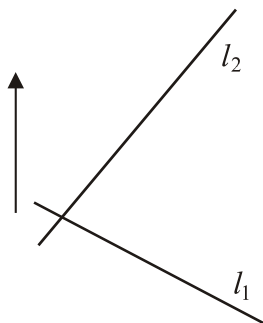
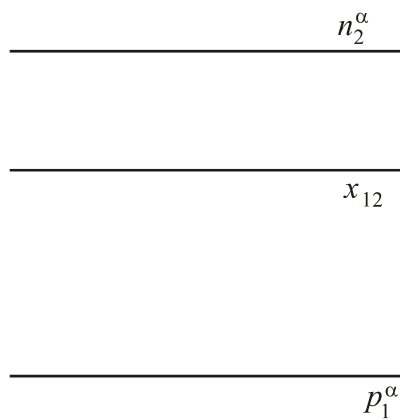




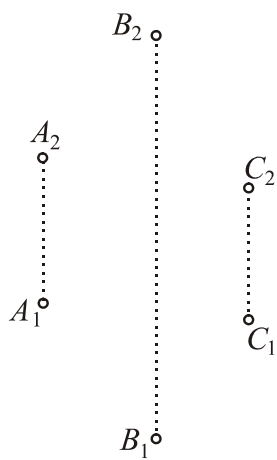
Obr. 11c, d



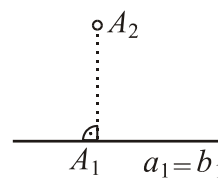
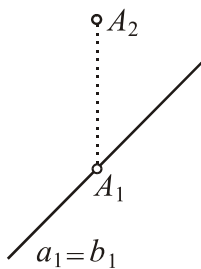
Obr. 12a



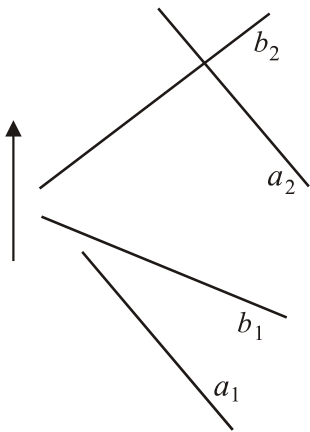
Obr. 12b - e



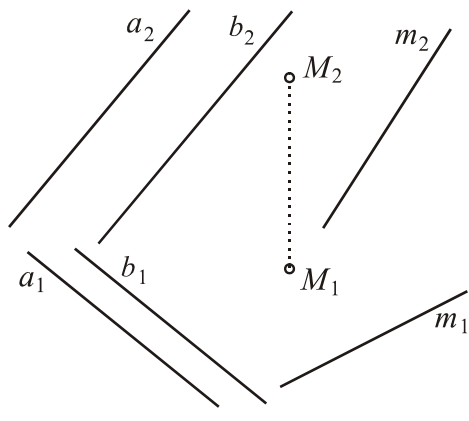
Obr. 12f



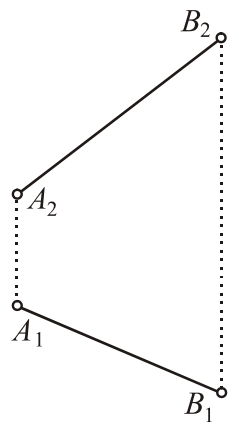
Obr. 13a - c



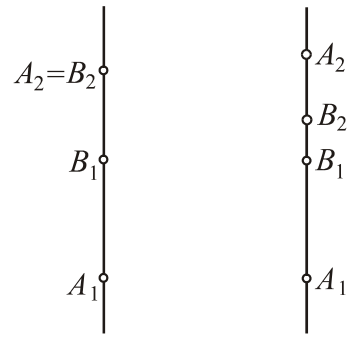
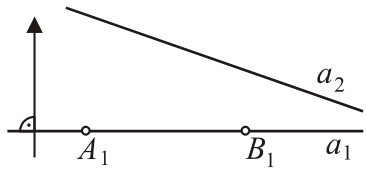
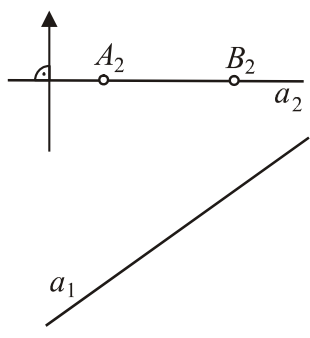
Obr. 14



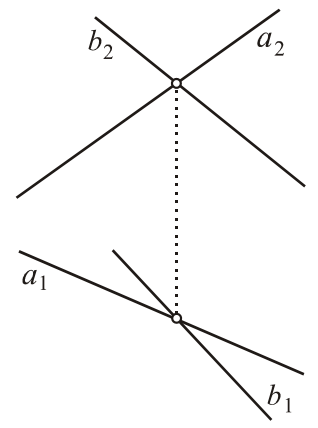
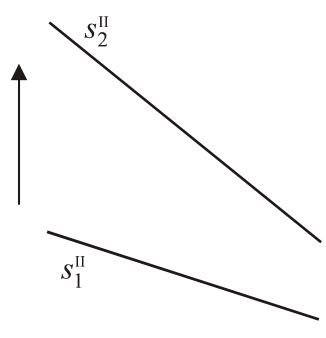
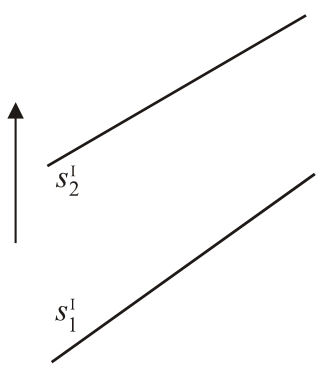
Obr. 15



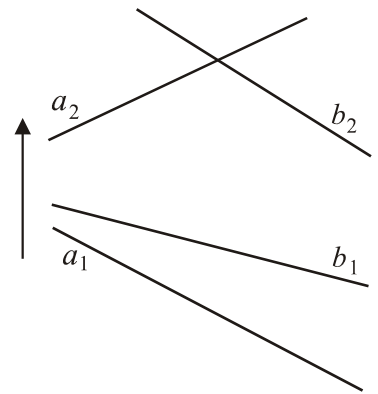
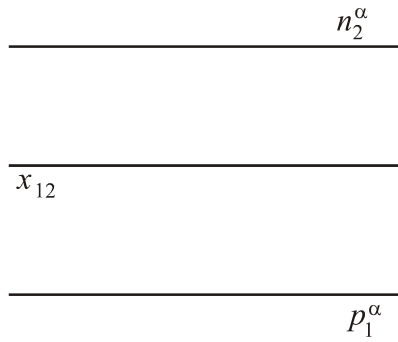
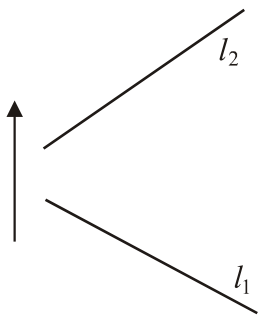
Obr. 16a



Obr. 16b - e

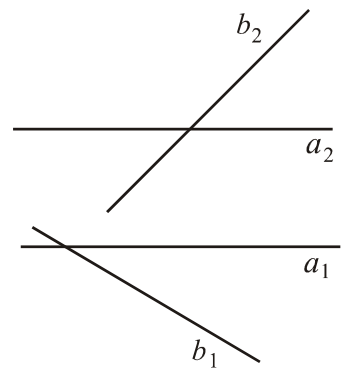
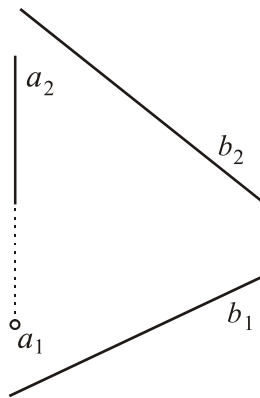
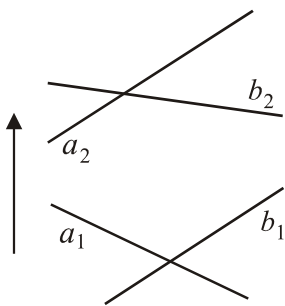


Obr. 17a - c

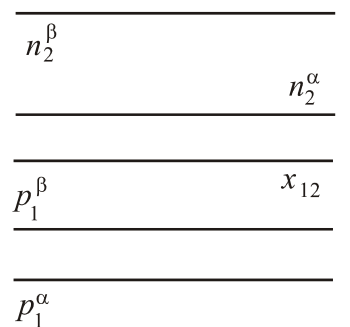
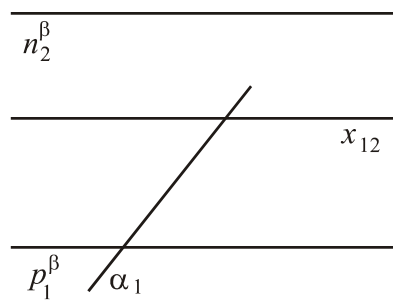
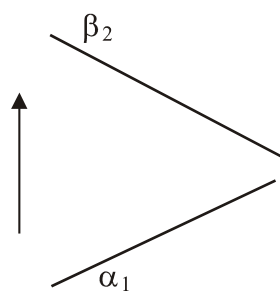


Obr. 17d - e

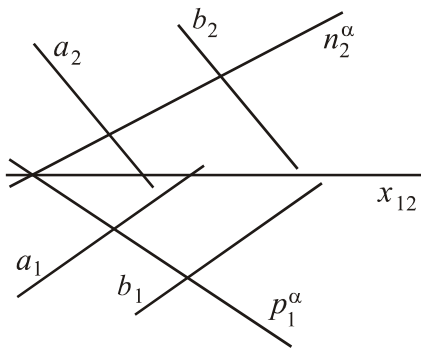
Obr. 18a



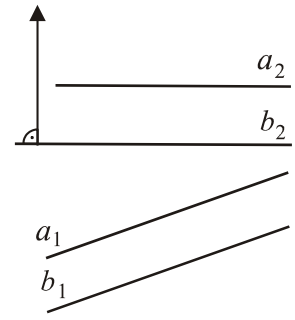
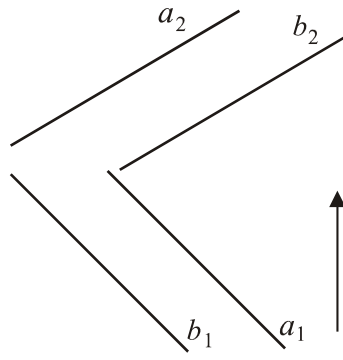
Obr. 18b - d



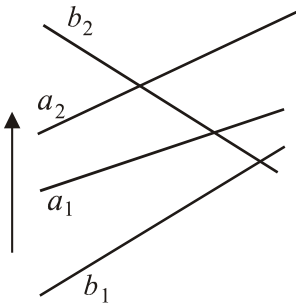
Obr. 19a - c



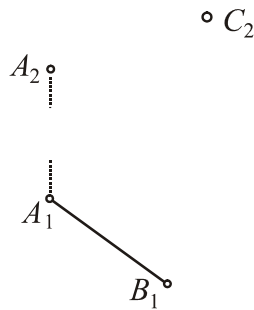
Obr. 19d



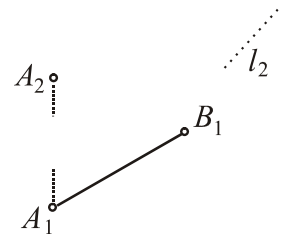
Obr. 20a, b



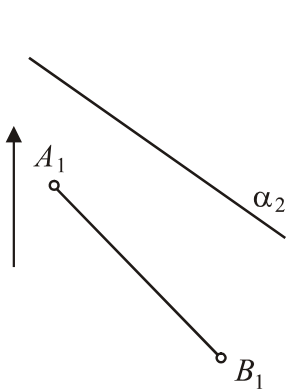
Obr. 20c



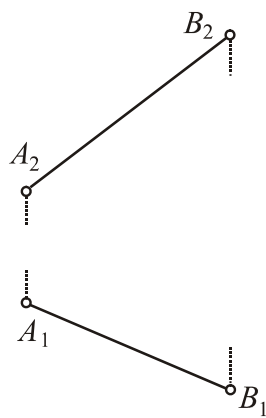
Obr. 21



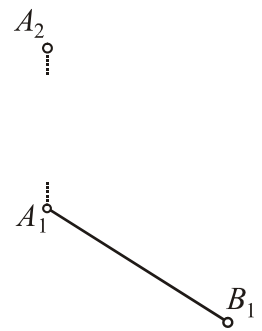
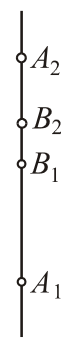
Obr. 22

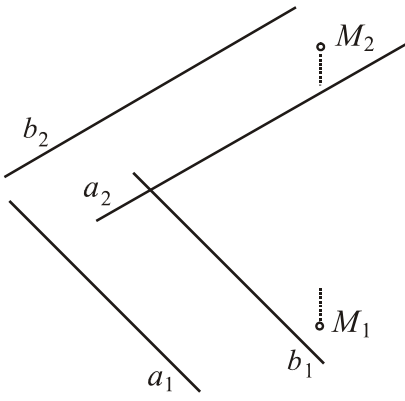


Obr. 23

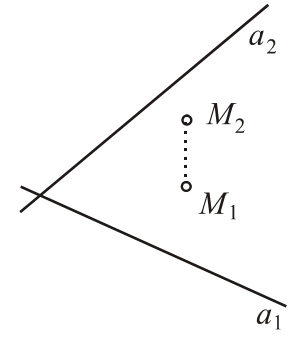
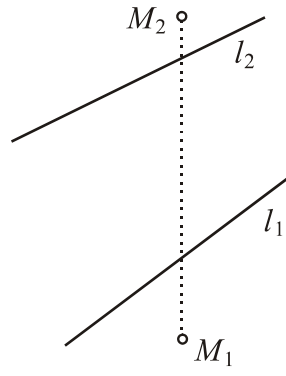


Obr. 24a - c

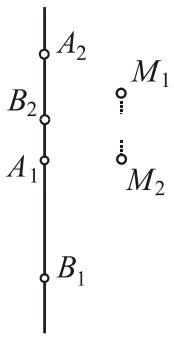




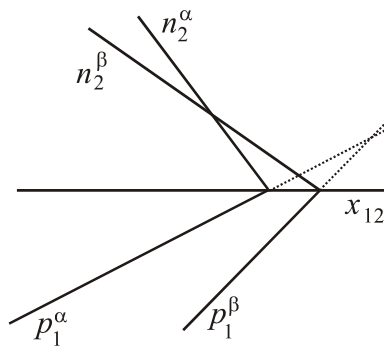
Obr. 25a, b



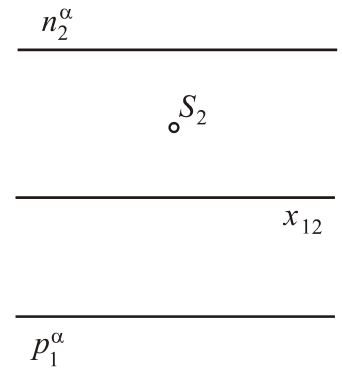
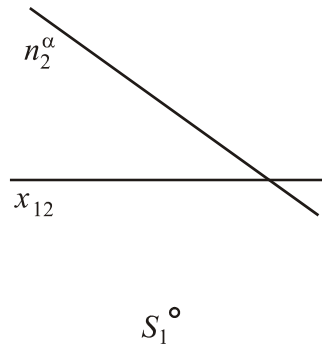
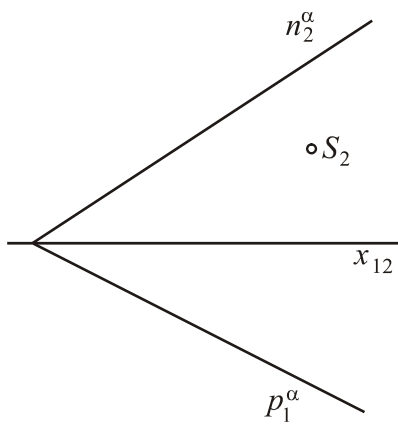
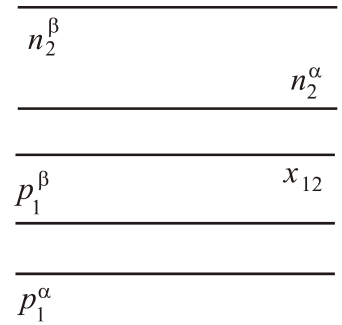
Obr. 26a



Obr. 26b



Obr. 27a, b



Obr. 28a - c

II Perspektívna kolineácia medzi dvoma rovinami v rozšírenom Euklidovom priestore. Rovinné rezy kružnicovej kužeľovej plochy

OSNOVA PREDNÁŠKY

1. Kolineácia. Osová kolineácia medzi dvoma rovinami. Osová kolineácia dvoch súmiestnych rovinných polí, samodružné prvky a vlastnosti. Homológia. Určenie homológie.
2. Osové kolineácie dvoch nesúmiestnych rovinných polí. Dva rovinné rezy tej istej ihlanovej a kružnicovej kužeľovej plochy nevrcholovými rovinami.
3. Úbežnice homológie a ich vlastnosti. Charakteristika homológie.
4. Rovnobežný priemet paraboly a hyperboly. Afinné vlastnosti. Priesečníky priamky s hyperbolou.
5. Obraz kružnice v homológii. Konštrukcie pre jednotlivé kužeľosečky.
6. Rovinné rezy rotačnej kužeľovej plochy. Q-D veta. Stredový priemet guľovej plochy. Definícia paraboly a hyperboly. Ohniskové vlastnosti. Kužeľosečky ako množiny stredov kružníc požadovanej vlastnosti. Spoločná definícia kužeľosečiek.
7. Rovinný rez kružnicovej kužeľovej plochy rovinou neprechádzajúcou vrcholom plochy. Stredový priemet kružnice.
8. Pravouhlé priemety rovinných rezov rotačnej kužeľovej plochy do roviny kolmej na os plochy. Využitie pri konštrukcii rovinného rezu kužeľovej plochy v Mongeovej metóde pri vhodnej polohe plochy vzhľadom na priemetne.
9. Množina vrcholov rotačných kužeľových plôch, ktorých prienik s danou rovinou je daná kužeľosečka v tejto rovine.
10. Asymptoty hyperboly. Vlastnosti a konštrukcia.

LITERATÚRA

Sklenáriková, Z., *Zobrazovacie metódy II*, MFF UK, Bratislava 1980, 1976
(vysokoškolské skriptum)

Urban, A., *Deskriptivní geometrie I*, Praha, SNTL 1997, 1982

Kraemer, E., *Zobrazovací metody I, II*, SPN Praha, 1991

Kadeřávek, F. – Klíma, J. – Kounouský, J., *Deskriptivní geometrie I*, NČSAV, Praha 1954

Bakša, J., *Zbierka úloh z deskriptívnej geometrie*, diplomová práca, MFF UK Bratislava, 1998

Lászlóová, K., *Osvetlenie základných geometrických útvarov*, diplomová práca, MFF UK Bratislava, 2000

III Aplikácia v riešení úloh na základných telesách v Mongeovom a v kótovanom zobrazení

OSNOVA PREDNÁŠKY

1. Bod na ploche. Dotyková (styčná) rovina v bode plochy. Dotykové roviny kružnicovej V (K) – plochy a styčné roviny H (I) – plochy prechádzajúce daným bodom a rovnobežné s danou priamkou. Dotykové roviny guľovej plochy prechádzajúce danou priamkou.
2. Rovinné rezy telies a ich rovnobežné priemety. Vzájomná poloha priamky s plochou, konštrukcia priesečníkov. Riešenie úloh v prebraných zobrazovacích metódach.
3. Rovnobežné osvetlenie základných telies do roviny a konštrukcia vlastných tieňov (KZ, MZ).
4. Sústavy kružnicových rezov kružnicovej valcovej a kružnicovej kužeľovej plochy.
5. Konštrukcia siete hranola a ihlana.