Zobrazovacie metódy 3

(druhý ročník, zimný semester, prednáška 4 hod., cvičenie 2 hod. / týž.; 7 kreditov, 40/60)

Program tretieho semestra (Zobrazovacie metódy 3): I. *Pravouhlá axonometria*, II. *Šikmé* (*kosouhlé*) *premietanie*, III. *Doplňujúce poznatky*

Cieľ. Ovládanie teoretických základov metódy pravouhlej axonometrie a metódy kosouhlého premietania (princíp metódy, riešenie základných polohových a metrických úloh v príslušnej metóde) a ich aplikácií v riešení úloh na základných telesách (dotykové – styčné roviny požadovaných vlastností, vzájomné polohy s priamkou – rovinou, konštrukcie rovinných rezov (s dôrazom na rovinné rezy kružnicovej kužeľovej plochy), rovnobežné (stredové) osvetlenie, osvetlenie dutých telies, zobrazenie pravidelných konvexných mnohostenov).

I Pravouhlá axonometria

OSNOVA PREDNÁŠKY

1. Princíp zobrazovacej metódy. Základné pojmy. Základné vlastnosti (vlastnosti axonometrického trojuholníka).
2. Existenčná veta o pravouhlej axonometrii, pre ktorú je daný ostrouhlý trojuholník *XYZ* axonometrickej priemetne ε axonometrickým trojuholníkom.
3. Pomery skrátenia prislúchajúce danej pravouhlej axonometrii. Súčet štvorcov pomerov skrátenia.
4. Trojuholník skrátenia prislúchajúci danej pravouhlej axonometrii, jeho vzťah k axonometrickým priemetom súradnicových osí a k pomerom skrátenia.
5. Obraz priamky a roviny v pravouhlej axonometrii (základné pojmy, špeciálne polohy). Kedy priamka je (nie je) určená svojím axonometrickým priemetom a axonometrickým pôdorysom? Hlavné priamky roviny.
6. Polohové úlohy v metóde pravouhlej axonometrie. Incidencia a ďalšie základné polohy základných geometrických útvarov. Vzťah axonometrických priemetov a axonometrických pôdorysov bodov tej istej roviny α (doplniť podmienky, ktoré musí spĺňať táto rovina). Riešenie základných polohových úloh. Ilustrácia na príkladoch.
7. Metrické úlohy v metóde pravouhlej axonometrie. Dĺžka úsečky, vzdialenosť bodu od axonometrickej priemetne, uhly súradnicových osí a súradnicových rovín s priemetňami. Otáčanie roviny do axonometrickej priemetne. Kolmica na rovinu a rovina kolmá na priamku.
8. Komplexné úlohy (priečky mimobežiek; súmerne združený bod s daným bodom podľa danej priamky/roviny; vzdialenosti základných geometrických útvarov; konštrukcie jednoduchých telies).
9. Obraz kružnice v pravouhlej axonometrii (v súradnicovej rovine, v rovine kolmej na niektorú z pomocných priemetní, v rovine vo všeobecnej polohe).
10. Rovinné rezy základných telies v metóde pravouhlej axonometrie. Rovinné rezy kružnicovej kužeľovej plochy.
11. Guľová plocha v metóde pravouhlej axonometrie. Bod na ploche; dotyková rovina v bode plochy; dotyková rovina incidentná s danou priamkou (rovnobežná s danou rovinou);

vzájomná poloha priamky a plochy (priesečníky); rovinný rez plochy; osvetlenie guľovej plochy.

12. Guľová plocha ako referenčná plocha Zeme. Základné pojmy. Veta o rovnobežnom priemete rovinných rezov guľovej plochy rovnobežnými rovinami. Konštrukcia rovnobežkovej kružnice danej zemepisnej šírky a meridiánu danej zemepisnej dĺžky (pri ľubovoľne zvolenom nultom meridiáne).
13. Základné pojmy súvisiace s osvetlením základných geometrických útvarov a jednoduchých telies. Osvetlenie dutých telies: hranol, kruhový valec, ihlan, kruhový kužeľ, polguľa. Použitie metódy spätných lúčov.

Poznámka. Literatúra ku všetkým témam I – III je viac-menej spoločná; je preto uvedená až v závere tohto textu. Príklady a cvičenia k téme „Metóda pravouhlej axonometrie“ môže čitateľ nájsť (v dostatočnom počte) v diplomovej práci J. Bakšu „Zbierka úloh z deskriptívnej geometrie“ (citácia v Literatúre). Základné pojmy z teórie osvetlenia telies, ako aj výklad použitých metód nájde čitateľ v diplomovej práci K. Lászlóovej „Osvetlenie základných geometrických útvarov“ (citácia tamtiež).

II. Šikmé (kosouhlé) premietanie

OSNOVA PREDNÁŠKY

1. Princíp zobrazovacej metódy, základné pojmy (zobrazovacia metóda šikmého premietania *s pomocným pravouhlým premietaním* a zobrazovacia metóda šikmého premietania *s použitím pomocnej priemetne*). Vzťah pôdorysov a šikmých pôdorysov bodov. Použitie pri zobrazovaní telies s podstavou v pomocnej priemetni π alebo v rovine s ňou rovnobežnej.
2. Obraz priamky a roviny. Základné pojmy. Špeciálne polohy priamky a roviny, hlavné priamky roviny. Vzťah šikmých priemetov a šikmých pôdorysov bodov tej istej roviny α (akej? doplniť podmienky).
3. Polohové úlohy v oboch metódach šikmého premietania. Incidencia a ďalšie základné polohy základných geometrických útvarov. Riešenie základných polohových úloh a ilustrácia riešení na príkladoch.
4. Rovinné rezy základných telies v metóde šikmého premietania s využitím pomocnej priemetne (podstavy telies spravidla ležia v niektorej zo súradnicových rovín π, ν, μ). Vzájomná poloha priamky s telesom. Rovnobežné osvetlenie základných (i dutých) telies.
5. Metrické úlohy v metóde šikmého premietania (dĺžka úsečky, uhol priamky – roviny s hlavnou priemetňou). *Otáčanie roviny do priemetne* (perspektívna afinita otáčania roviny). *Otáčanie roviny do úrovne* (perspektívna afinita medzi šikmými priemetmi bodov roviny (ktorá nie je šikmo premietacia ani s priemetňou rovnobežná) a šikmými priemetmi otočených polôh týchto bodov v otočení roviny do polohy rovnobežnej s priemetňou.
6. Kolmica na rovinu v oboch metódach šikmého premietania. Ilustrácia na príkladoch pri rôznych polohách roviny.
7. Rovina kolmá na priamku v metóde šikmého premietania. Ilustrácia pri konštrukcii obrazu jednoduchého telesa s osou v danej priamke.
8. Konštrukcia obrazov základných telies v technickom šikmom premietaní.
9. Obraz guľovej plochy v metóde šikmého premietania. Hlavné kružnice guľovej plochy v rovinách rovnobežných so súradnicovými rovinami. Obraz polgule.
10. Rovnobežné osvetlenie guľovej plochy v metóde šikmého premietania.
11. Stredové osvetlenie guľovej plochy.

Zobrazovacia metóda šikmého premietania

(CVIČENIA)

I Šikmé premietanie s pomocným pravouhlým premietaním

V každom z nasledujúcich cvičení je metóda šikmého premietania určená šikmým a pravouhlým priemetom ľubovoľného bodu M (ležiaceho vo vnútri kladného polpriestoru s hranicou v priemetni ν) a *dištančnou kružnicou* prislúchajúcou bodu M [1] alebo pomerom skrátenia šikmého premietania. Tento fakt sa bude zapisovať: ŠP = (M_k, M_2; y^M), prislúchajúcu dištančnú kružnicu budeme označovať k^M. *Pomer „skrátenia"* šikmého premietania je väčší než 1, resp. sa rovná 1, resp. je menší než 1 práve vtedy, keď je bod M_k vonkajším bodom kružnice k^M, resp. leží na tejto kružnici, resp. je jej vnútorným bodom.[2]

1. Zvoľte si šikmý priemet A_k bodu A (ľubovoľne) a zostrojte jeho pravouhlý priemet A_2, ak: $y^A = 0$; $y^B = -y^M$; $y^C = 3$j; $y^D = 6$j; $y^E = -3$j (j je zvolená jednotka merania i v nasledujúcich cvičeniach). Označte i kolmý priemet šikmo premietacej priamky každého z bodov A, B, ... , E.

2. Zvoľte si niekoľko usporiadaných dvojíc bodov (A_k, A_2), (B_k, B_2), ... (body v každej dvojici sú navzájom rôzne) a určte orientovanú vzdialenosť každého z bodov nimi reprezentovaného od priemetne (v danej metóde šikmého premietania).

3. Zobrazte ľubovoľné priamky a, b, c, d (t. j. zvoľte si šikmý a pravouhlý priemet každej z nich) tak, aby: $a \nparallel \nu, a \not\perp \nu$; $b \parallel \nu, b \not\subset \nu$; $c \perp \nu$; d je šikmo premietacia priamka. Kedy priamka m nie je usporiadanou dvojicou priamok (m_k, m_2) určená jednoznačne a kedy dvojica priamok (m_k, m_2) nemôže byť obrazom žiadnej priamky ? V prípade existencie stopníka priamky označte ho.

4. Na každej z priamok z cvičenia 4 si zvoľte ľubovoľnú úsečku AB a zostrojte a) dĺžku úsečky AB; b) uhol zhodný s uhlom priamky AB s priemetňou.

5. Zobrazte ľubovoľnú dvojicu navzájom rôznych rovnobežiek, rôznobežiek a mimobežiek. Okrem všeobecnej polohy si zvoľte i špeciálne polohy jednej alebo oboch priamok (podľa cvičenia 3). V prípade existencie zostrojte stopu roviny určenej oboma priamkami.

---

[1] Dištančná kružnica prislúchajúca bodu M ($M \notin \nu$) je kružnica priemetne so stredom v bode M_2 a polomerom rovnajúcim sa y^M ($y^M = |M, \nu| = |MM_2|$). Dolný index „2" je znak pravouhlého priemetu geometrického útvaru do roviny ν, dolný index „k" bude označovať šikmý (kosouhlý) priemet útvaru do tej istej roviny. Priemetňa ν bude súčasne nákresňou. Pri voľbe ortonormálneho súradnicového trojhranu si budeme ako obvykle voliť súradnicové osi x, z v priemetni ν a kladnú polpriamku súradnicovej osi y tak, aby incidovala so zvoleným kladným polpriestorom s hranicou v priemetni ν.

[2] Pomerom skrátenia daného šikmého premietania nazývame pomer dĺžky orientovanej úsečky A_2A_k a y-ovej súradnice bodu A ($A \notin \nu$), t. j. or.$|A_2A_k| / y^A$; kladná orientácia navzájom rovnobežných priamok A_2A_k je určená usporiadanou dvojicou (M_k, M_2) (hovoríme, že v tejto orientácii bod M_2 predchádza bod M_k). Orientované priamky $^{\to}A_2A_k$ nazývame ordinály zobrazovacej metódy šikmého premietania. Je zrejmé, že bod A (neležiaci v priemetni) leží v kladnom, resp. zápornom polpriestore s hranicou ν práve vtedy, keď sú polpriamky $^{\mapsto}A_2A_k$, $^{\mapsto}M_2M_k$ orientované súhlasne, resp. nesúhlasne. Šikmé premietanie s priemetňou ν je dimetriou v tom zmysle, že vo všeobecnom prípade sa jednotky na súradnicových osiach x, z zachovávajú a mení sa (skracuje alebo predlžuje) jednotka na súradnicovej osi y. Špeciálnym prípadom je izometria, keď sa pomer skrátenia rovná 1. Pomer skrátenia je teda vždy kladným číslom a rovná sa kotangensu odchýlky šikmo premietacích priamok s priemetňou.

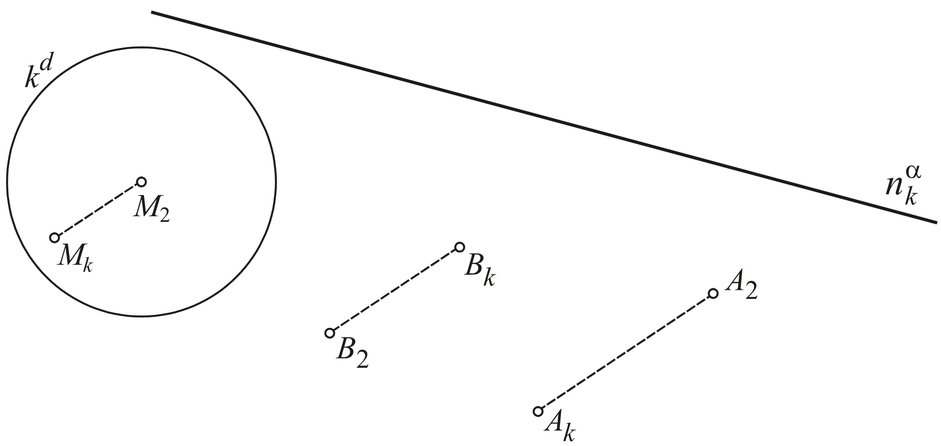
6. Daná je rovina $\alpha = {}^{\leftrightarrow}n^{\alpha}A$ ($n_k^{\alpha} = n_2^{\alpha}$, $A = (A_k, A_2)$, priamka n^{α} nie je rovnobežná s ordinálami daného šikmého premietania a bod A neleží na stope roviny). Dourčite ľubovoľný bod B roviny neležiaci na jej stope n^{α}, ktorý a) leží; b) neleží s bodom A na tej istej hlavnej priamke. Určite aj orientovanú vzdialenosť bodu od priemetne. Analogicky dourčite bod $M = (M_k, ?)$ roviny β rovnobežnej s priemetňou. [$B = (B_k, ?)$ alebo $B = (?, B_2)$; β: $y + 3 = 0$]

7. V danej rovine $\alpha = {}^{\leftrightarrow}n^{\alpha}A$ zobrazte: a) spádovú priamku roviny prechádzajúcu bodom A; b) hlavnú priamku roviny s danou orientovanou vzdialenosťou (kladnou i zápornou) od priemetne.

8. Určite vzájomnú polohu rovín α, β. V prípade rôznobežnosti zostrojte priesečnicu rovín α, β. [$\alpha = {}^{\leftrightarrow}n^{\alpha}A$, $\beta = {}^{\leftrightarrow}n^{\beta}B$; zvoľte si nezhodné úsečky A_2A_k, B_2B_k]

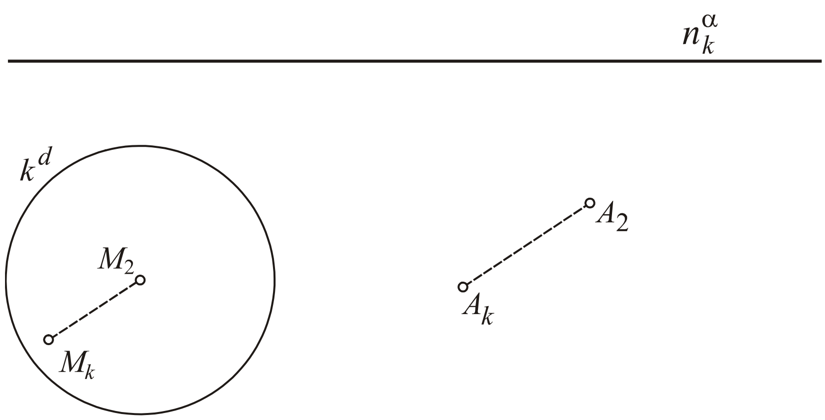
9. Riešte predchádzajúcu úlohu pre roviny, z ktorých jedna je určená tromi bodmi alebo priamkou a bodom s ňou neincidentným (cvičenia 1 – 3).

10. Daná je rovina $\alpha = {}^{\leftrightarrow}n^{\alpha}A$ a bod $B = (B_k, B_2)$. Zostrojte rovinu β ($B \in \beta$, $\beta \parallel \alpha$). (Obr. 1)



Obr. 1

11. Daná je rovina $\alpha = {}^{\leftrightarrow}n^{\alpha}A$. Zobrazte jej spádovú priamku incidentnú s bodom A, vzdialenosť bodu A od stopy roviny a uhol zhodný s uhlom danej roviny s priemetňou. (Obr. 2)

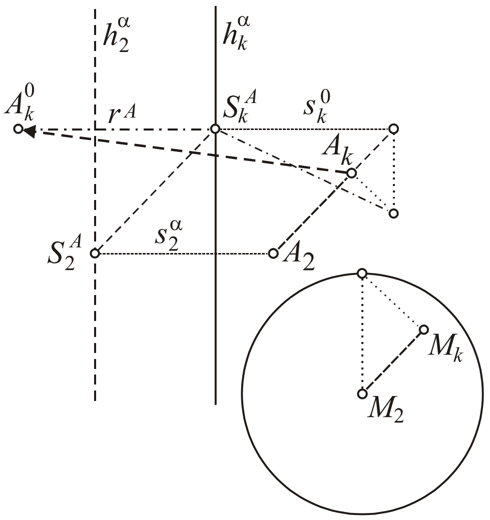


Obr. 2

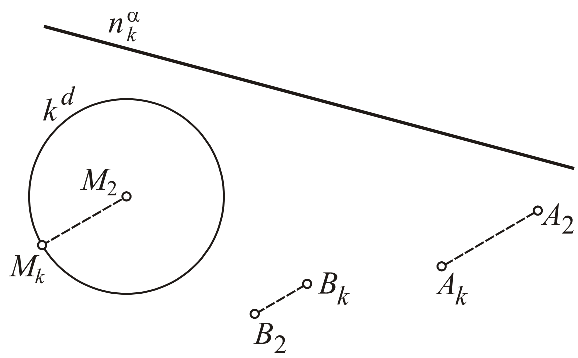
12. Daná je ľubovoľná rovina $\alpha = {}^{\leftrightarrow}n^{\alpha}A$ ($A \notin n^{\alpha}$, α nie je šikmo premietacia). Dokážte, že medzi šikmými priemetmi bodov tejto roviny a otočenými polohami týchto bodov v otočení roviny do priemetne je vzťah *perspektívnej afinity*, ktorej osou je obraz $n_k^{\alpha} = n_2^{\alpha}$ stopy roviny. Zostrojte otočenú polohu bodu A. [$A = (A_k, A_2)$]

13. Analogické tvrdenie s cvičením 11 vyslovte a dokážte pre otáčanie ľubovoľnej roviny α, ktorá nie je rovnobežná s priemetňou ani šikmo premietacia, do úrovne, t. j. do roviny rovnobežnej s priemetňou. Vysvetlite konštrukciu na obrázku 3, doplňte chýbajúce označenia a zapíšte určujúce prvky perspektívnej *afinity otáčania roviny* α.

14. V rovine $\alpha = {}^{\leftrightarrow}n^{\alpha}A$ zobrazte kružnicu so stredom v bode $S = (S_k, ?)$ a) prechádzajúcu bodom A; b) s polomerom r = 5j. [$A = (A_k, A_2)$]



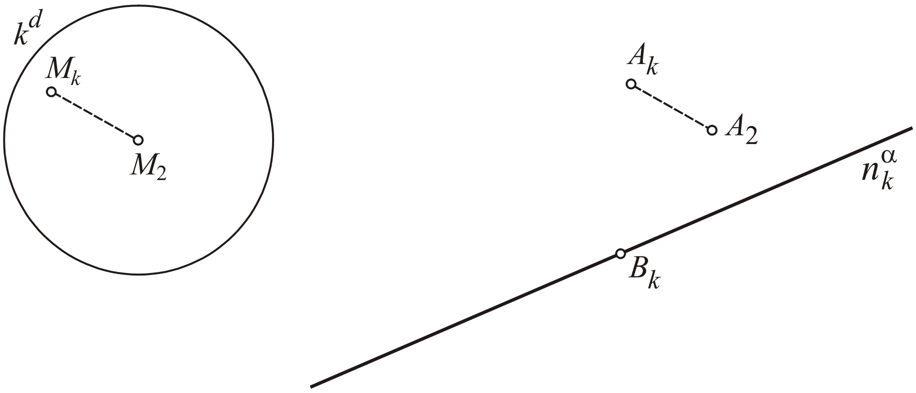
Obr. 3



Obr. 4

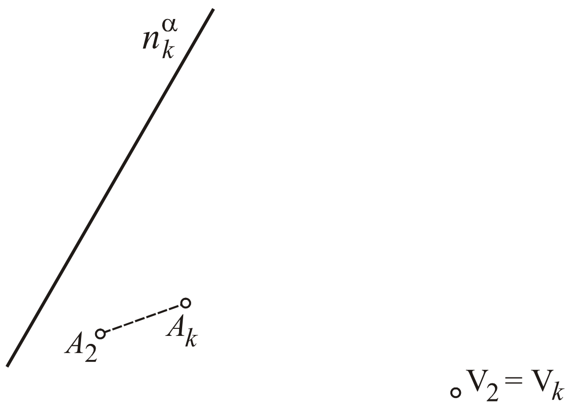
15. Daná je rovina $\alpha = {}^{\leftrightarrow}n^{\alpha}A$ a bod B ($B \notin \alpha$). Zostrojte: a) vzdialenosť bodu B od roviny α; b) bod súmerne združený s bodom B podľa tejto roviny. [$A = (A_k, A_2)$, $B = (B_k, B_2)$]. (Obr. 4)

16. Daná je rovina $\alpha = {}^{\leftrightarrow}n^{\alpha}A$ a jej bod $B = (B_k, ?)$. Zobrazte pravidelný štvorsten $ABCD$ so stenou ABC v rovine α. [$A = (A_k, A_2)$, $y^C > y^A$] (Obr. 5)

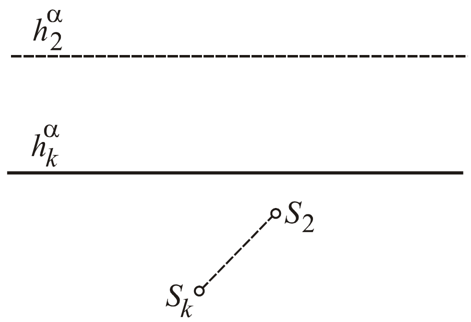


Obr. 5

17. Daná je rovina $\alpha = \overset{\leftrightarrow}{}n^{\alpha}A$ a bod V ($V \notin \alpha$). Zobrazte rovnostranný rotačný kužeľ s podstavou v rovine α a vrcholom v bode V. [A = (A_k, A_2), V = (V_k, V_2), hranica k podstavy prechádza daným bodom A); polpriestor $\mapsto$(νA) je kladný, pomer skrátenia k = 3/4] (Obr. 6)



Obr. 6

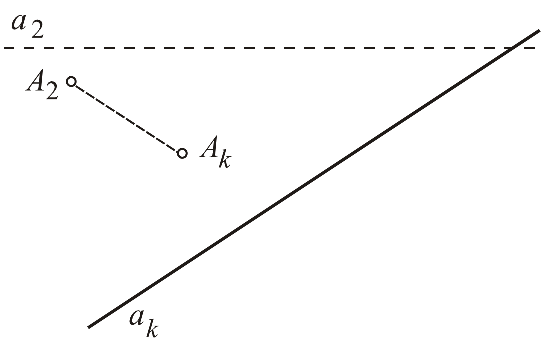


Obr. 7

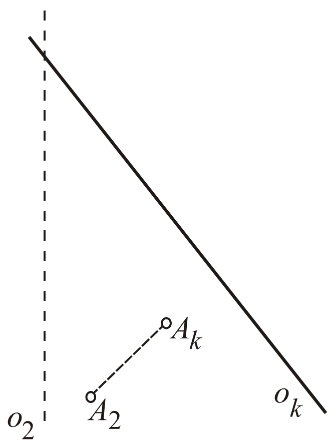
18. Daná je rovina $\alpha = \overset{\leftrightarrow}{}h^{\alpha}S$. Zobrazte rotačný valec s hranicou podstavy v kružnici $k(S, r)$ a výškou v. [$h^{\alpha} = (h_k^{\alpha}, h_2^{\alpha})$, S = (S_k, S_2); polomer r kružnice k si zvoľte ľubovoľne, výška $v = 2r$; polpriestor $\mapsto$(νS) je kladný, pomer skrátenia k = 4/5] (Obr. 7) [3]

19. Zostrojte rovinu súmernosti úsečky AB [A = (A_k, A_2), B = (B_k, B_2)], ak: a) priamka AB nie je ani rovnobežná s priemetňou, ani kolmá na priemetňu; b) $AB \perp \nu$; c) $AB \parallel \nu$. Určujúce prvky si zvoľte ľubovoľne.

20. Zostrojte dráhu bodu A pri rotácii okolo priamky a. Určte i vzdialenosť bodu A od priamky a. [A = (A_k, A_2), a = (a_k, a_2); polpriestor $\mapsto$(νA) je kladný, pomer skrátenia k = 1] (Obr. 8)



Obr. 8

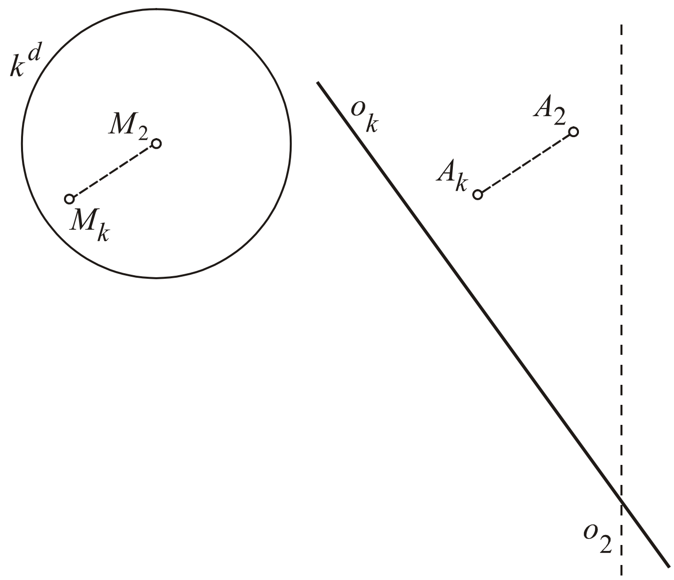


Obr. 9

[3] Použite otočenie roviny do úrovne (cvičenie 13).

21. Zobrazte pravidelný šesťboký ihlan s osou o, vrcholom A podstavy a hlavným vrcholom V. [$o = (o_k, o_2)$, $A = (A_k, A_2)$, $y^V = -1$; polpriestor $\mapsto(\nu A)$ je kladný, pomer skrátenia sa rovná 1] (Obr. 9)

22. Zobrazte kocku s jedným vrcholom $A = (A_k, A_2)$, pre ktorú je priamka $o = (o_k, o_2)$ osou súmernosti (incidentná so stredmi protiľahlých stien telesa). (Obr. 10)

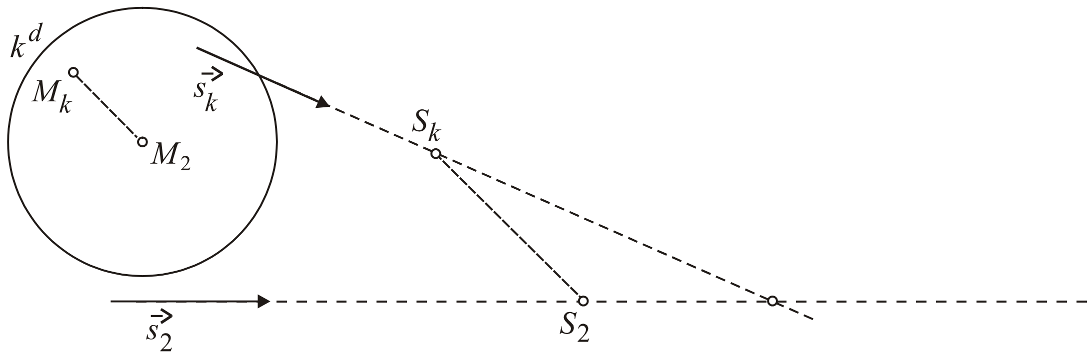


Obr. 10

23. Zobrazte rovnostranný rotačný valec (kužeľ) s osou o, ktorého podstavná kružnica prechádza bodom A. (Určujúce prvky si zvoľte ako v cvičení 21 alebo 22.)

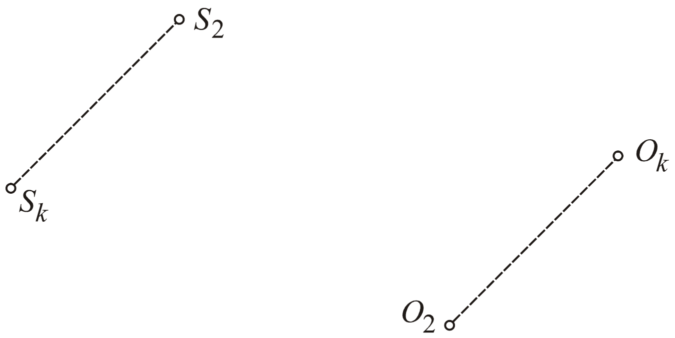
24. Zobrazte guľovú plochu $\boldsymbol{G}$ so stredom $S = (S_k, S_2)$ a polomerom r. Zobrazte aj hlavnú kružnicu plochy v rovine rovnobežnej s priemetňou a priesečníky guľovej plochy s jej priemerom, ktorý je kolmý na priemetňu. Určujúce prvky si zvoľte ľubovoľne.

25. Zobrazte rovnobežné osvetlenie guľovej plochy $\boldsymbol{G} = (S;\ r)$ v smere $\vec{s} = (\vec{s}_k, \vec{s}_2)$. Okrem hranice vlastného tieňa zostrojte i hodený tieň do priemetne. [Zvoľte si $r < y^S$.] (Obr. 11)



Obr. 11

26. Zobrazte hranicu vlastného tieňa guľovej plochy $\boldsymbol{G} = (S;\, r)$ v stredovom osvetlení so stredom v bode $O = (O_k,\, O_2)$. [Zvoľte si $y^S > 0$, $r = (3/4)\, y^S$ a pomer skrátenia k = 1.] (Obr. 12)



Obr. 12

II Šikmé premietanie s využitím pomocnej priemetne π

(Rovina π nie je šikmo premietacia a je kolmá na rovinu ν)

V každej z nasledujúcich úloh je metóda šikmého premietania určená veľkosťou uhla ω orientovanej ordinály s orientovanou základnicou a pomerom skrátenia. Tento fakt sa bude zapisovať: ŠP = ($|\omega|$, k). Ortonormálny súradnicový trojhran si zvolíme v súlade s metódou Mongea tak, aby kladná polpriamka súradnicovej osi y, resp. z incidovala so zvoleným kladným polpriestorom s hranicou v priemetni ν, resp. v priemetni π; kladná polpriamka súradnicovej osi x pri voľbe nákresne ν určuje orientovanú základnicu a zvolíme si ju ako v Mongeovej metóde. Uhol ω je v tomto prípade zhodný s uhlom šikmého priemetu kladnej polpriamky osi y s kladnou polpriamkou osi x ($\omega \cong \angle Y_k O_k X_k$, kde $Y \in\ \mapsto y^+$, $X \in\ \mapsto x^+$ je ľubovoľná dvojica bodov rôznych od súradnicového začiatku O).[4] V takto zvolenom šikmom premietaní sa budú význačné body zobrazovaných útvarov často určovať – v záujme jednotných riešení a výsledkov – súradnicami vo zvolenej súradnicovej sústave určenej súradnicovým štvorstenom $OE^xE^yE^z$ (E^x, E^y, E^z sú body kladných polpriamok súradnicových osí, úsečka OE^x ($OE^x \cong OE^y \cong OE^z$) je ľubovoľne zvolená jednotková úsečka. Podstatou zobrazovacej metódy je bijektívne zobrazenie každého bodu M euklidovského priestoru $\boldsymbol{E}_3$ na usporiadané dvojice bodov (M_k, M_{1k}) priemetne (= nákresne) ν.[5]

27. V ŠP (120°, 2/3) zobrazte ľubovoľne zvolené body A, B, C, D incidentné s rôznymi kvadrantmi vzhľadom na priemetne π, ν. Body si zvoľte súradnicami.

28. Dokážte, že medzi pôdorysmi bodov priestoru $\boldsymbol{E}_3$ a šikmými pôdorysmi týchto bodov je vzťah perspektívnej afinity, ktorej osou je priamka x_{1k} ($x_1 = x_k$).

29. V ŠP (45°, √2/2) zobrazte mozaiku pozostávajúcu zo štvorcov a pravidelných osemuholníkov v rovine π tak, aby dve protiľahlé strany štvorcov boli rovnobežné so základnicou. Dĺžku strany štvorca si zvoľte ľubovoľne.

---

[4] Prečo je ordinála $\leftrightarrow M_2M_k$ ľubovoľného bodu M ($M \notin \nu$) rovnobežná so šikmým priemetom osi y? Odôvodnite.

[5] M_{1k} je šikmý priemet kolmého priemetu bodu M do roviny π; nazývame ho šikmým pôdorysom bodu M. Pretože prvá premietacia priamka bodu M je rovnobežná so súradnicovou osou z, platí: $M_kM_{1k} \,||\, z_k$ a $|M_kM_{1k}| = |z^M|$. Bod M leží v kladnom, resp. zápornom polpriestore s hranicou π práve vtedy, keď je polpriamka $M_{1k}M_k$ súhlasne, resp. nesúhlasne rovnobežná so šikmým priemetom kladnej polpriamky súradnicovej osi z.

30. V ŠP (120°, √2/2) zobrazte ľubovoľný štvorec v rovine π, ktorého šikmým priemetom je kosoštvorec so stranou dĺžky 6j. [6]

31. V ŠP (60°, 2/3) zobrazte ľubovoľnú kružnicu v rovine π', ktorá je rovnobežná s pomocnou priemetňou π. Daný je šikmý priemet nárysnej stopy roviny π'.

32. V šikmom premietaní s využitím pomocnej priemetne si zvoľte obrazy priamok a, b, c, ... g v nasledujúcich osobitných polohách: priamka a má všeobecnú polohu k obom priemetniam; priamka b, resp. priamka c je rovnobežná s priemetňou π, resp. s priemetňou ν; $d \perp x$; $e \perp \nu$; $f \perp \pi$; priamka g je šikmo premietacia, pričom priamky b, c, ..., g už inú osobitnú polohu nemajú. Každú z priamok určite jej šikmým priemetom a šikmým pôdorysom.[7] Kedy priamka nie je takouto dvojicou priamok určená? Zostrojte obrazy existujúcich stopníkov každej z priamok.

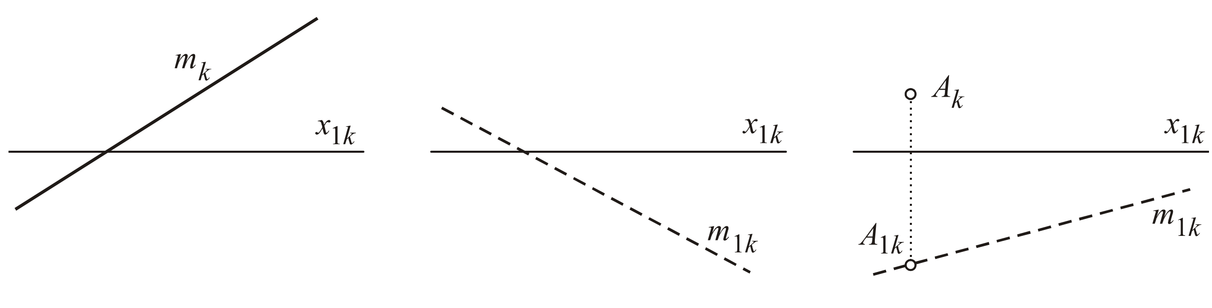
33. V šikmom premietaní s využitím pomocnej priemetne si zvoľte obraz: a) ľubovoľnej dvojice navzájom rovnobežných priamok; b) ľubovoľnej dvojice rôznobežiek; c) ľubovoľnej dvojice mimobežiek. Zostrojte i existujúce stopy roviny, ktorá je v prípadoch a), b) priamkami určená. (Odôvodnite riešenie)

34. V šikmom premietaní s využitím pomocnej priemetne si zvoľte obraz ľubovoľnej roviny, ktorá: a) má všeobecnú polohu vzhľadom na obe priemetne; b) je kolmá na hlavnú priemetňu ν; c) je kolmá na priemetňu π; d) je rovnobežná so súradnicovou osou x; e) je kolmá na súradnicovú os x (v prípadoch b), c), ... e) nemá navyše žiadnu inú osobitnú polohu). Všetky roviny určite existujúcimi stopami a zobrazte v nich hlavné priamky oboch osnov.

35. V ŠP (120°, 2/3) si zvoľte rovinu α šikmými priemetmi jej pôdorysnej a nárysnej stopy p^α, n^α a šikmý priemet [šikmý pôdorys] ľubovoľného bodu $A \in \alpha$. Dourčite šikmý pôdorys [šikmý priemet] bodu A. Úlohu vyriešte pomocou hlavnej priamky roviny ľubovoľnej osnovy i pomocou ľubovoľnej priamky roviny prechádzajúcej bodom A.

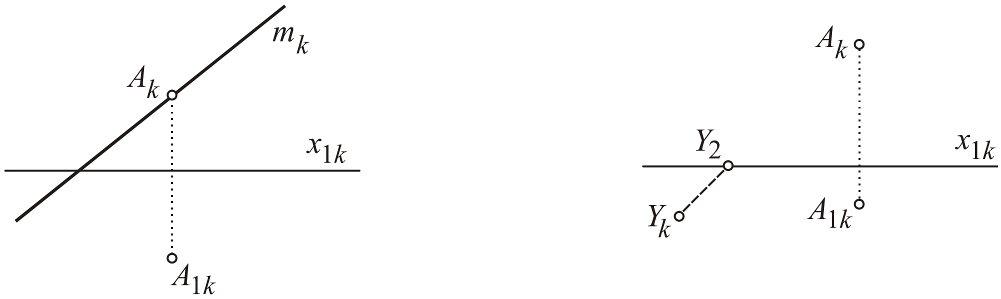
36. Daná je rovina $\alpha = \overleftrightarrow{p^\alpha n^\alpha}$ v Mongeovom zobrazení. Zvoľte si osnovu šikmého premietania (s hlavnou priemetňou ν) tak, aby šikmým priemetom ľubovoľnej kružnice roviny α bola kružnica. Zobrazte jednu z kružníc roviny vo zvolenom šikmom premietaní.[8]

37. V úlohách a – e dourčite priamku m tak, aby platilo: a) $m \subset \nu$; b) $m \subset \pi$; c) $A \in m$, $m \parallel \pi$; d) $A \in m$, $m \parallel \nu$; e) $A \in m$, $m \perp \nu$. Vo všetkých prípadoch zobrazte existujúce stopníky priamky m. (Obr. 13a - e)



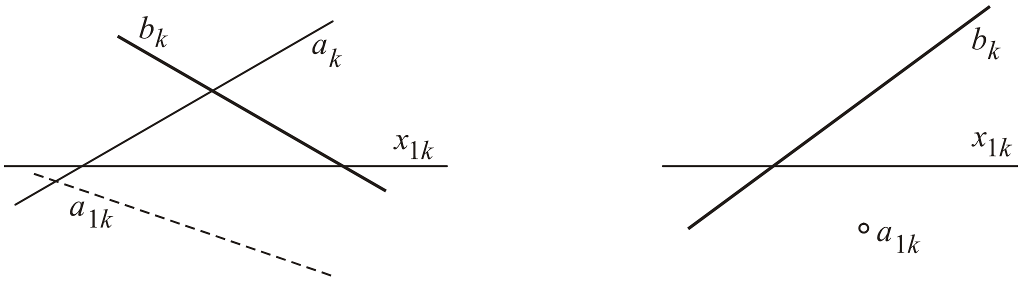
Obr. 13a – c

[6] Návod: Zostrojte hlavné smery perspektívnej afinity f: $(\pi_1) \rightarrow (\pi_k)$ z cvičenia 28.
[7] Šikmý pôdorys $\boldsymbol{U}_{1k}$ útvaru $\boldsymbol{U}$ je množina šikmých pôdorysov všetkých bodov útvaru $\boldsymbol{U}$.
[8] Návod: Uvažujte o dvoch systémoch kružnicových rovinných rezov tej istej kružnicovej valcovej plochy.



Obr. 13d, e

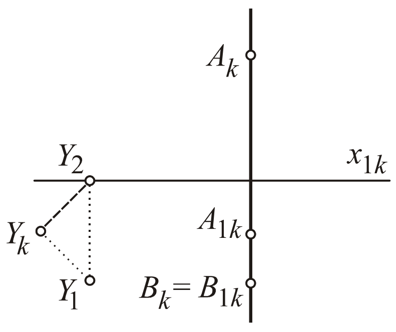
38. Daná je priamka a a šikmý priemet priamky b. Dourčite priamku b tak, aby: a) bola rovnobežná s priemetňou ν a priamky a, b boli navzájom rôznobežné; b) bola rovnobežná s priemetňou π a priamky a, b boli navzájom mimobežné. (Obr. 14a, b)

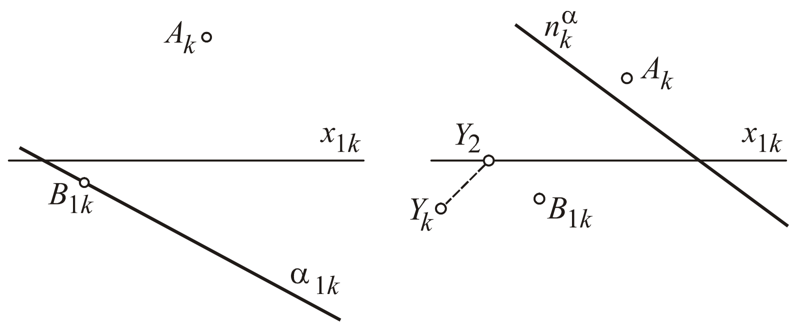


Obr. 14a, b

39. V ŠP ($|\omega|$, k) zobrazte ľubovoľnú priamku m kolmú na súradnicovú os x (priamka m nie je rovnobežná so žiadnou z priemetní). [9]

40. V ŠP ($\Delta Y_1Y_2Y_k$; $Y \in y$, $Y \neq O$) je daná priamka $m = \overleftrightarrow{AB}$ ($m_k \parallel z_k$, $m \perp \pi$). a) Zostrojte združené priemety (pôdorys, nárys) priamky m podľa predchádzajúceho cvičenia; b) Určite množinu bodov všetkých priamok, ktoré prechádzajú bodom A a majú šikmý pôdorys v priamke m_{1k}; c) Vyjadrite podmienku, ktorú musí spĺňať priamka m, aby platilo: $m_k = m_{1k}$. (Obr. 15)





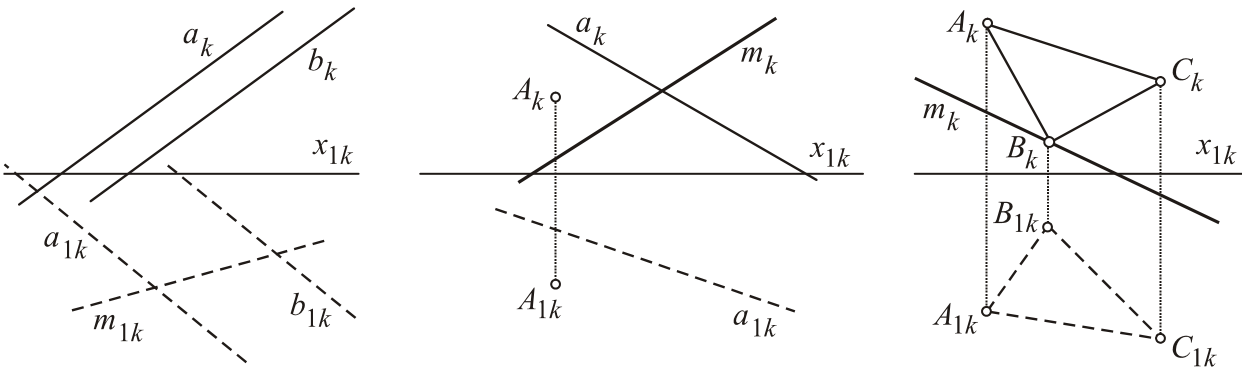
Obr. 15

Obr. 16a, b

[9] Zvoľte si obraz priamky v Mongeovej metóde.

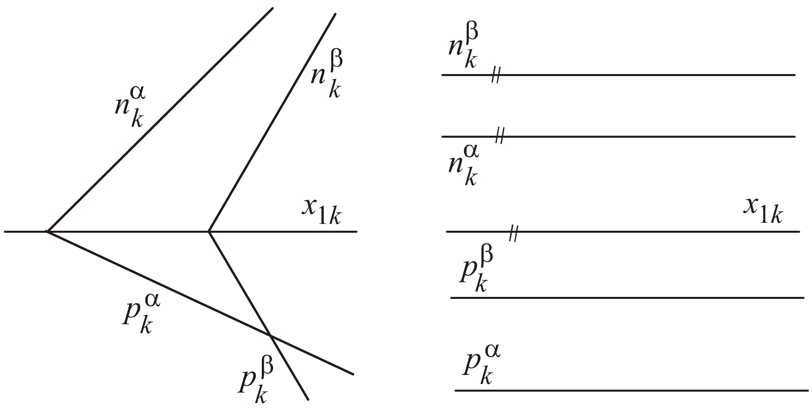
41. Dourčite body A, B roviny α, ak a) $\alpha \perp \pi$; b) $\alpha \perp \nu$ (obr. 16a, b). Zostrojte aj chýbajúce stopy roviny α.

42. Dourčite priamku m roviny α danej: a) dvoma rovnobežkami a, b; b) priamkou a a bodom A ($A \notin a$); c) tromi nekolineárnymi bodmi A, B, C. (Obr. 17a – c)

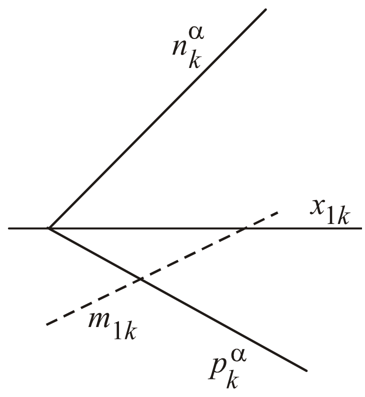


Obr. 17a – c

43. Zostrojte priesečnicu rovín $\alpha = {}^{\leftrightarrow}p^{\alpha}n^{\alpha}$, $\beta = {}^{\leftrightarrow}p^{\beta}n^{\beta}$, ak: a) roviny α, β nemajú osobitnú polohu a priesečníky príslušných dvojíc stôp sú dostupné; b) priesečník stôp n^{α}, n^{β} je nedostupný; c) priesečník stôp p^{α}, p^{β} je nedostupný; d) $\alpha \,||\, x \,||\, \beta$. (Obr. 18b, d)

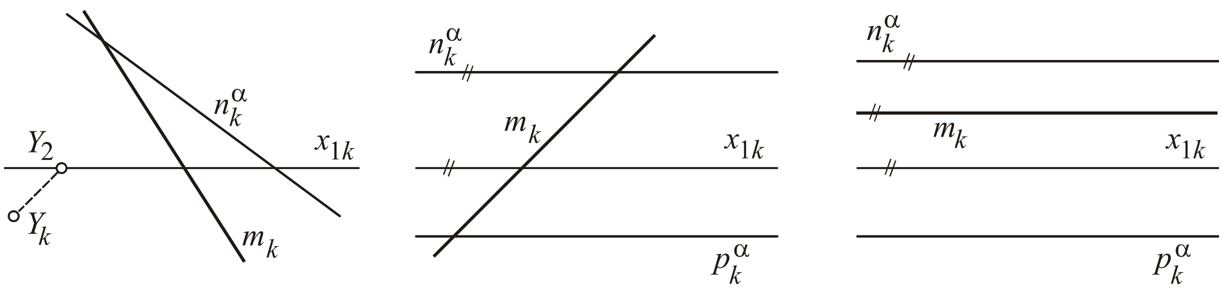


Obr. 18b, d



Obr. 19a

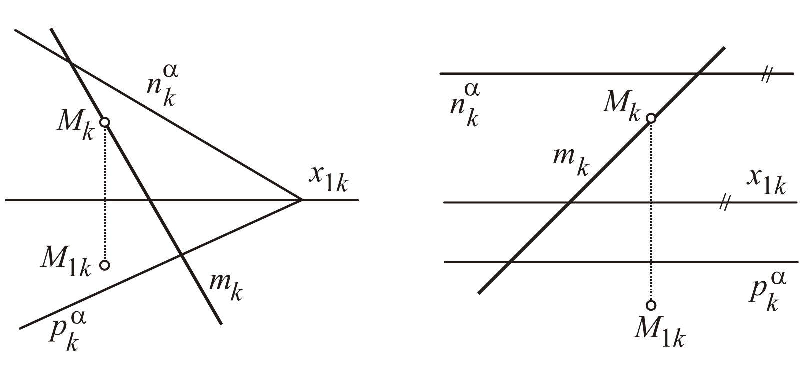
44. Dourčite priamku m tak, aby ležala v danej rovine $\alpha = {}^{\leftrightarrow}p^{\alpha}n^{\alpha}$. [b) $\alpha \perp \nu$] (Obr. 19a – d)



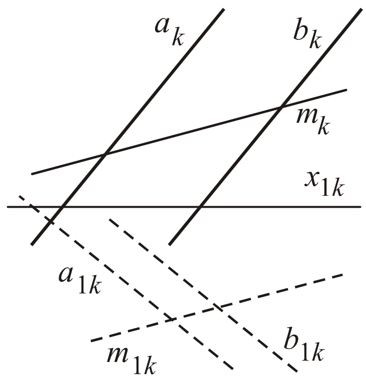
Obr. 19b – d

45. Dourčite priamku m tak, aby prechádzala daným bodom M a bola rovnobežná s danou rovinou α. (Obr. 20a, b)

46. Analogickú úlohu s predchádzajúcou riešte pre rovinu určenú dvoma priamkami, priamkou a bodom alebo tromi nekolineárnymi bodmi (zadanie roviny z cvičenia 42).

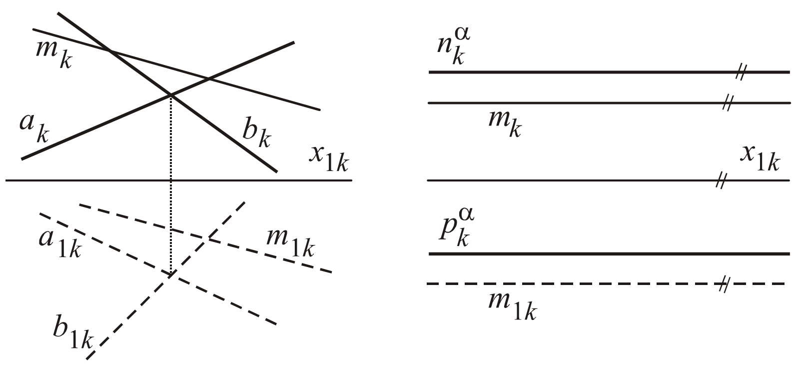


Obr. 20a, b

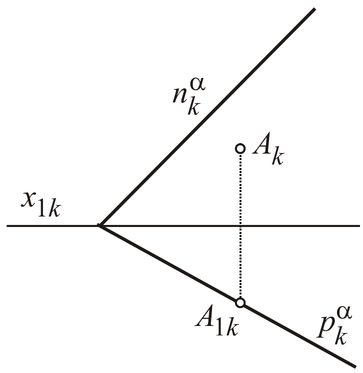


Obr. 21a

47. Určite vzájomnú polohu priamky m s rovinou α, ak: a) $\alpha = \overleftrightarrow{ab}$, $a \parallel b$; b) rovina α je určená rôznobežkami a, b; c) $\alpha = \overleftrightarrow{p^\alpha n^\alpha}$ ($\alpha \parallel x \parallel m$). (Obr. 21a – c)

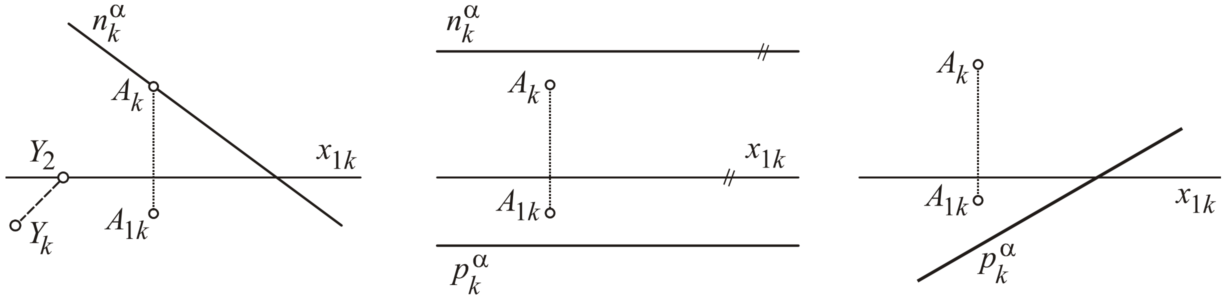


Obr. 21b, c



Obr. 22a

48. Zobrazte rovinu prechádzajúcu daným bodom A a rovnobežnú s danou rovinou α. Vysvetlite bez konštrukcie, prečo v žiadnom prípade $A \notin \alpha$. (Obr. 22a – d) [b) $\alpha \perp \nu$; c) $\alpha \parallel x$; d) $\alpha \perp \pi$]



Obr. 22b – d

49. Určite vzájomnú polohu šesťbokého hranola $\boldsymbol{H}$ s priamkou m. Jedna podstava hranola leží v rovine π – je ňou pravidelný šesťuholník $AB \dots F$ so stredom S; vrchol A' druhej podstavy leží s bodom A na tej istej bočnej hrane. [A (6,5; 8; 0), S (6; 5; 0), A' (4,5; 6,5; 5); $m = \overleftrightarrow{KL}$, K (3; 8; 0), L (6; 5; 3); ŠP (135°, 3/4)]

50. Zobrazte časť hranolovej plochy $\boldsymbol{H}$ medzi rovinami π a α. Hranolová plocha je daná určujúcim pravidelným šesťuholníkom $AB \dots F$ v priemetni π (so stredom S) a hranou AA'. Ktoré bočné hrany plochy obsahujú jej styčné roviny rovnobežné so súradnicovou osou x? [A (6,5; 8; 0), S(6, 5, 0), A' (5, 7, 6); α (–4, 5, 2); ŠP (135°, 3/4)]

51. V ŠP (135°, √2/2) zobrazte časť rotačnej valcovej plochy $\boldsymbol{V}$ medzi rovinami π a α. Určujúca kružnica k plochy $\boldsymbol{V}$ má stred S, polomer plochy sa rovná r. [S (4, 6, 0), r = 3,5j; α (9, ∞, 7)]

52. Analogickú úlohu s predchádzajúcou riešte v ŠP (135°, 2/3) pre: S (–4, 4, 0), r = 3j; α (8, 6, 7).

53. Určite vzájomnú polohu pravidelného päťbokého ihlana $\boldsymbol{I}$ ($ABCDE \subset \pi$, V – hlavný vrchol) s rovinou α a zostrojte styčné roviny príslušnej ihlanovej plochy a) prechádzajúce bodom M; b) rovnobežné so súradnicovou osou x. [A (7, 2, 0), S (3, 5, 0) – stred podstavy, z^V = 8j; α (∞, 12, 4); M (7, 2, 2), ŠP (135°, √2/2)]

54. V ŠP (120°, 2/3) zobrazte guľovú plochu $\boldsymbol{G}$ (S; r) a jej hlavnú kružnicu v priemetni π ($S = O$, r = 5j). Zostrojte i priesečníky priemerovej priamky plochy kolmej na priemetňu π s danou plochou.

55. V ŠP (120°, 4/5) zobrazte polguľu guľovej plochy $\boldsymbol{G}$ (S; r) v polpriestore $z \geq 0$. Zostrojte aj priesečník priamky o ($S \in o$, $o \perp \pi$) s polguľou. [S (0, 4, 0), r = 4j]

56. V ŠP (135°, √2/2) zobrazte časť hranolovej plochy $\boldsymbol{H}$ medzi rovinami α a π. Tvoriace priamky plochy sú kolmé na rovinu π určujúceho pravidelného šesťuholníka so stredom S a jedným vrcholom A. [S (4, 5, 0), A (5, 2, 0); a) α (∞, 10, 5); b) α (11, ∞, 8)]

57. Vyriešte technické[10] osvetlenie pravidelnej šesťbokej hranolovej plochy $\boldsymbol{H}$ s určujúcim šesťuholníkom $AB \dots F \subset \pi$ so stredom v bode S. Okrem hranice vlastného tieňa zostrojte aj hodený tieň plochy do roviny π a hodený tieň priamky MN na plochu. [A (–1; 5,5; 0), S(0; 3,5; 0), M (–5,5; 2; 3), N (1, 9, 9), ŠP (135°, √2/2)]

58. V ŠP (135°, √2/2) vyriešte rovnobežné osvetlenie pravidelného dutého šesťbokého hranola s podstavou $A_1B_1 \dots F_1$ v rovine π so stredom S_1. Druhá podstava $AB \dots F$ leží v rovine $z = 5$. Hodený tieň bodu A do roviny π je bod A'. Zostrojte: a) hodený tieň hranola do roviny π; b) hranicu vlastného tieňa hranola; c) hodený tieň časti podstavy $ABCDEF$ dovnútra hranola. [S_1 (0; 4,5; 0), A_1 (1, 1, 0), A′ (10, –5, 0)]

59. V ŠP (135°, 4/5) zobrazte časť rotačnej kužeľovej plochy $\boldsymbol{K}$ (k (S, r) $\subset \pi$; V – vrchol) medzi rovinami α a π. [S (0, 5, 0), r = 4j, z^V = 9j; α (∞, 11, 7)]

60. V ŠP (135°, 5/6) zobrazte časť kružnicovej kužeľovej plochy $\boldsymbol{K}$ (k (S, r) $\subset \mu$; V – vrchol) medzi rovinami α a μ. [$S = O$, r = 4j, V (9, 5, 0); α (7, 11, ∞)]

---

[10] Smer technického osvetlenia je určený napríklad orientovanou telesovou uhlopriečkou $\overrightarrow{A'C}$ kocky $ABCDA'B'C'D'$, ktorej hrany DC, resp. DA, resp. DD' ležia na kladných polpriamkach súradnicových osí x, resp. y, resp. z. (Pri konštrukcii osvetlenia priamky na plochu použite metódu spätných lúčov.)

61. V ŠP (135°, √2/2) zostrojte jeden z parabolických rezov rotačnej kužeľovej plochy ***K*** (k (S, r) $\subset \pi$; V – vrchol) rovinou α. [S (4, 6, 0), r = 4j, z^V = 8j; α (6, ∞, ?)]

62. V ŠP (60°, 2/3) zostrojte rovinný rez dvojkužeľa rovinou α. Jedna podstavná kružnica k (S, r) dvojkužeľa leží v priemetni π, vrcholom je bod V a druhá podstava leží v rovine $z = 2z^V$. Rovina α obsahuje priamku MN a je rovnobežná s tvoriacou priamkou VA príslušnej kužeľovej plochy ($A \in k$). [S (–1,5; 7,5; 0), r = 3,5j, V (0; 5,5; 4,5); M (5,5; 7,5; 0), N (–1,5; 5,5; 8), A (x^A = –4,5; $y^A > y^S$)]

63. V ŠP (135°, √2/2) zobrazte kocku so stenou $ABCD$ v rovine α ($\alpha \perp \pi$); stredom tejto steny je bod S. [α (4, 5, ?), A (1, ?, 3), S (2, ?, 5)]

64. V ŠP (135°, √2/2) zobrazte pravidelný štvorboký hranol (*rovnostranný rotačný valec*) s jednou podstavou $ABCD$ (s podstavnou kružnicou k) v rovine α a výškou v. [α (–5, 3, ∞), A (–3; ?; 1,5), S (–1, ?, 3) – stred podstavy $ABCD$ (*stred kružnice k s polomerom r = 4j*), $v \cong AD$]

65. V ŠP (135°, √2/2) zobrazte pravidelný štvorboký ihlan s podstavou $ABCD$ (so stredom S) v rovine α a výškou v. Vrchol si zvoľte tak, aby podstava bola viditeľná. [α (4, 5, ?), $\alpha \perp \pi$; A (1, ?, 3), S (2, ?, 5), v = 9j]

66. V ŠP (135°, √2/2) zobrazte kocku so stenou $ABCD$ v rovine α. [α (∞; 5; 3,5), A (1, 4, ?), B (–2; 2,5; ?)]

67. V ŠP (135°, √2/2) zobrazte pravidelný trojboký ihlan (*rovnostranný rotačný kužeľ*) s podstavou ABC (*s podstavnou kružnicou k*) v rovine α ($\alpha \perp \nu$) a hlavným vrcholom V. [α (5, ?, 3), A (2, 0, ?), V (2,5; 2,5; 7)]

68. Vyriešte rovnobežné osvetlenie nasledujúcej skupiny telies: a) rovnostranný rotačný valec ***V*** s jednou podstavou k_1 v priemetni π a rovnostranný rotačný kužeľ ***K***, ktorého prienikom s valcom ***V*** je podstava k valca ($k \not\subset \pi$), pričom celá zostava leží v polpriestore $z \geq 0$; b) valec ***V*** z cvičenia a) a polguľa ***G*** určená analogickými podmienkami so zadaním kužeľa ***K***, t. j. $\boldsymbol{V} \cap \boldsymbol{G} = k$. Šikmé premietanie a smer osvetlenia si zvoľte ľubovoľne.

III Doplňujúce úlohy

OSNOVA PREDNÁŠKY

1. Zavedenie tretej priemetne a jej využitie v riešení úloh v Mongeovom zobrazení. Ilustrovať riešenie zvolenej úlohy na príklade.
2. Rovnobežný priemet paraboly (sformulovať vetu a dokázať). Dôkaz afinnej bodovej konštrukcie paraboly.
3. Rovnobežný priemet hyperboly (vyplývajúci z jej afinných bodových konštrukcií uvedených ďalej v tomto bode). Sformulujte tvrdenie a dokážte ho.

- „*Súčin dĺžok dvoch úsečiek na tej istej sečnici hyperboly, ktoré majú spoločný práve jeden krajný bod* (*incidentný s bodom hyperboly*) *a zvyšné krajné body ležia na asymptotách hyperboly je pre všetky priamky tej istej osnovy priamok konštantný*.“ Dokážte! Uveďte „obrátenú“ vetu o množine bodov, pre ktoré všetky priečky dvoch rôznobežiek ^1a, ^2a s týmito bodmi incidentné majú vyššie uvedenú vlastnosť. Na záver riešte úlohu: Zostrojte priesečníky hyperboly s danou priamkou, ktorá nie je rovnobežná s jej asymptotami a je sečnicou hyperboly.
- „*Obsahy rovnobežníkov s jedným vrcholom vo vlastnom bode hyperboly a k nemu protiľahlými stranami na jej asymptotách sa rovnajú* “ Dokážte! Uveďte „obrátené“ tvrdenie analogicky s predchádzajúcou vetou. (Dôsledok pre ďalšiu bodovú konštrukciu hyperboly a konštrukciu dotyčnice hyperboly v danom jej bode.)
- „*Disjunktné úsečky na tej istej sečnici hyperboly, ktorých jeden krajný bod je bodom hyperboly a druhý bodom jej* (*vhodnej*) *asymptoty sú zhodné*.“ Odôvodnite a na základe tejto vlastnosti ukážte „rýchlu“ konštrukciu požadovaného počtu bodov hyperboly vo zvolenej oblasti. (Hyperbola je daná asymptotami a jedným bodom.)

4. Konštrukcie kužeľosečiek s využitím homológie zobrazujúcej danú kužeľosečku do vhodnej kružnice. Ilustrovať *ideu* riešenia na zvolenom príklade.
5. Množina vrcholov všetkých rotačných kužeľových plôch, ktorých prienik s danou rovinou je daná kužeľosečka v tejto rovine.
6. Pravidelné konvexné mnohosteny. Eulerova veta, odvodenie typov konvexných mnohostenov. Zobrazenie v Mongeovej metóde a v metóde pravouhlej axonometrie.

Poznámka. Súčasťou podkladov pre hodnotenie práce študenta v treťom a štvrtom semestri štúdia je vypracovanie *referátu* z niektorej zvolenej témy a jeho prednesenie v rámci cvičenia alebo prednášky (v každom semestri raz). Tému si študent vyberie po dohode s prednášajúcim z tém uvedených v bodoch 1 – 6 (kapitola III) a v bode 13 (kapitola I).

LITERATÚRA

Skleníariková, Z., *Zobrazovacie metódy II*, MFF UK, Bratislava 1980, 1976 (vysokoškolské skriptum)

Urban, A., *Deskriptivní geometrie I*, Praha, SNTL 1997, 1982

Kraemer, E., *Zobrazovací metody I, II*, SPN Praha, 1991

Kadeřávek, F. – Klíma, J. – Kounouský, J., *Deskriptivní geometrie I*, NČSAV, Praha 1954

Medek, V. – Šedivý, O., *Deskriptívna geometria pre gymnáziá*, SPN Bratislava, 1986

Harant, M. – Lanta, O., *Deskriptívna geometria pre 2. a 3. ročník SVŠ*, SPN Bratislava, 1996

Drábek, K. – Harant, F. – Setzer, *Deskriptivní geometrie I*, SNTL/ALFA Praha, 1982

Čenek, G. – Medek, V., *Deskriptívna geometria I*, SVTL Bratislava, 1956

Bakša, J., *Zbierka úloh z deskriptívnej geometrie*, diplomová práca, MFF UK Bratislava, 1998

Lászlóová, K., *Osvetlenie základných geometrických útvarov*, diplomová práca, MFF UK Bratislava, 2000