ZOBRAZOVACIE METÓDY 4

(druhý ročník, letný semester; prednáška 3 hod., cvičenie 2 hod. / týž.; 7 kreditov, 40/60)

Program štvrtého semestra (Zobrazovacie metódy 4): I *Kvadratické rotačné plochy*; II *Metóda kosouhlej* (*šikmej*) *axonometrie*; III *Metóda stredového premietania*

Cieľ: Ovládnutie metód riešenia základných polohových úloh o kvadratických rotačných plochách v Mongeovej metóde. Ovládnutie teoretických základov metódy šikmej axonometrie a metódy stredového premietania (princíp metódy, riešenie základných polohových a metrických úloh v oboch metódach, konštrukcia obrazov základných plôch a telies a riešenie úloh na nich využitím poznatkov zo stereometrie, perspektívnej kolineácie (špeciálne afinity) a projektívnej geometrie).

I Kvadratické rotačné plochy

OSNOVA PREDNÁŚKY

1. Definícia, základné pojmy. Obraz plochy v Mongeovom zobrazení v prípade, ak je os plochy kolmá na jednu z priemetní. Analytické vyjadrenie jednotlivých plôch v základnom tvare.
2. Bod na ploche, dotyková rovina v bode plochy.
3. Kvadratická rotačná plocha ako obraz guľovej plochy vo vhodnej perspektívnej afinite, či kolineácii v rozšírenom euklidovskom priestore (s výnimkou rotačného jednodielneho hyperboloidu).
4. Rovinné rezy rotačnej kvadratickej plochy (elipsoid a paraboloid).
5. Rovinný rez rotačného hyperboloidu. Asymptotická kužeľová plocha prislúchajúca k danému hyperboloidu.
6. Rotačný jednodielny hyperboloid. Dve sústavy tvoriacich priamok plochy. Dotyková rovina.
7. Rovinný rez rotačného jednodielneho hyperboloidu.
8. Vzájomná poloha priamky s kvadratickou rotačnou plochou. Konštrukcia priesečníkov.
9. Rovnobežné a stredové osvetlenie kvadratickej rotačnej plochy.
10. Obraz kvadratickej rotačnej plochy v pravouhlej axonometrii (v základnej polohe: os plochy je kolmá na pomocnú priemetňu π).

LITERATÚRA

Urban, A., *Deskriptivní geometrie II*, SNTL, Praha 1956

Kadeřávek, F. – Klíma, J. – Kounouský, J., *Deskriptivní geometrie II*, JČMF, Praha 1932

Macková, B. a kol., *Deskriptívna geometria v príkladoch*, SVTL, Bratislava 1964

II Kosouhlá axonometria

OSNOVA PREDNÁŠKY

1. Princíp zobrazenia. Základné pojmy.
2. Určenie axonometrie. Prevedenie kosouhlej axonometrie na kosouhlé premietanie alebo pravouhlú axonometriu. Pomery skrátenia v kosouhlej axonometrii.
3. Veta Pohlke-Schwarzova.
4. Rekonštrukcia ortonormálneho súradnicového trojhranu z jeho axonometrického obrazu.
5. Riešenie metrických úloh v rovine. Súradnicová rovina a rovina kolmo premietacia vzhľadom na jednu z pomocných priemetní.
6. Konštrukcia útvaru v rovine, ktorá nemá žiadnu osobitnú polohu vzhľadom na súradnicové osi.
7. Kolmica na rovinu v kosouhlej axonometrii.
8. Riešenie úloh v kosouhlej axonometrii pomocou Mongeovej metódy. Sobotkove konštrukcie.
9. Obrazy základných telies v metóde kosouhlej axonometrie. Riešenie štandardných úloh o základných telesách.

Poznámka. Aplikačné cvičenia a príklady, vrátane vysvetlenia princípu zobrazenia a riešenia metrických úloh v metóde šikmej axonometrie možno nájsť v diplomovej práci Mgr. Marty Pémovej „*Kosouhlá axonometria – Pohlkeho veta*“, MFF UK Bratislava, 2004. Čitateľ sa o. i. môže oboznámiť so zaujímavou históriou základnej vety axonometrie (Pohlkeho-Schwarzova) a jej dôkazu. Článok [8] sa navyše zaoberá významom Pohlkeho-Schwarzovej vety vo vyučovaní stereometrie na všetkých úrovniach a je v plnej verzii uvedený v závere tohto textu.

LITERATÚRA

[1] Skleráriková, Z., *Zobrazovacie metódy II*, MFF UK, Bratislava 1980, 1976 (vysokoškolské skriptum)

[2] Urban, A., *Deskriptivní geometrie I*, SNTL, Praha 1997, 1982

[3] Kraemer, E., *Zobrazovací metody II*, SPN, Praha 1991

[4] Kadeřávek, F. – Klíma, J. – Kounouský, J., *Deskriptivní geometrie I*, NČSAV, Praha 1954

[5] Drábek, K. – Harant, F. – Setzer, *Deskriptivní geometrie I*, SNTL ALFA, Praha 1982

[6] Čeněk,G. – Medek, V., *Deskriptívna geometria I.*, SVTL, Bratislava 1956

[7] Pémová, M., *Kosouhlá axonometria – Pohlkeho veta*, diplomová práca, MFF UK, Bratislava 2004

[8] Sklenáriková, Z. – Pémová, M., *Pohlkeho veta a jej význam v didaktike matematiky*, In: Zborník prednášok z medzinár. ved. konf. „Matematika vo výučbe, výskume a praxi 2005“, Nitra, Katedra matematiky FEM SPU 2005 (elektronická forma)

III Metóda stredového premietania

OSNOVA PREDNÁŠKY

1. Základné pojmy, obraz bodu.
2. Obraz priamky (stopník priamky, úbežník priamky, smerová priamka danej priamky, odchýlka priamky).
3. Obraz roviny (stopa roviny, úbežnica roviny, smerová rovina danej roviny, odchýlka roviny).
4. Dĺžka úsečky.
5. Vzájomná poloha dvoch priamok, rovnobežnosť základných geometrických útvarov. Mimobežné priamky. Vzájomná poloha priamky a roviny.
6. Určenie priamky a roviny rovnobežnej s priemetňou. Riešenie polohových úloh pre rozličné zadania základných geometrických útvarov.
7. Homológia otáčania roviny do priemetne (do roviny rovnobežnej s priemetňou). Útvar v rovine rovnobežnej s priemetňou.
8. Kolmica na rovinu.
9. Uhly základných geometrických útvarov.
10. Obraz kružnice v metóde stredového premietania.
11. Obrazy základných telies v stredovo-premietacej zobrazovacej metóde. Stredový priemet dvoch rovinných rezov tej istej hranolovej (kružnicovej valcovej) alebo ihlanovej (kružnicovej kužeľovej) plochy.
12. Obraz guľovej plochy v metóde stredového premietania a niektorých kružníc plochy.
13. Úbežníkový trojuholník troch navzájom kolmých priamok. Určenie stredového premietania „vnútorným spôsobom“. Riešenie úloh na ľubovoľne zvolených stredových priemetoch základných telies.

LITERATÚRA

Sklenáriková, Z., *Zobrazovacie metódy II*, MFF UK, Bratislava 1980, 1976 (vysokoškolské skriptum)
Urban, A., *Deskriptivní geometrie I*, SNTL, Praha 1997, 1982
Kraemer, E., *Zobrazovací metody II*, SPN, Praha 1991
Kadeřávek, F. – Klíma, J. – Kounouský, J., *Deskriptivní geometrie I*, NČSAV, Praha 1954
Drábek, K. – Harant, F. – Setzer, *Deskriptivní geometrie I*, SNTL ALFA, Praha 1982
Čeněk,G. – Medek, V., *Deskriptívna geometria I*, SVTL, Bratislava 1956
Kovárová, I., *Metóda stredového premietania*, diplomová práca, FMFI UK Bratislava, 2005

Poznámka. Tému referátu si študent vyberie z tém 4 – 10 (kapitoly I) a z tém 11 – 12 (kapitoly III) po dohode s prednášajúcim.

POHLKEHO VETA A JEJ VÝZNAM V DIDAKTIKE MATEMATIKY [(1)]

Zita Sklenáriková, SR – Marta Pémová, SR

Abstrakt
Predložený článok okrem historických poznámok k dôkazu Pohlkeho základnej vety šikmej axonometrie chce poukázať na tesný súvis tejto zobrazovacej metódy s metódou voľného rovnobežného premietania používaného v školskej praxi vo výučbe stereometrie a na problém úplnosti obrazu geometrického útvaru vzhľadom na riešenie polohových, či metrických úloh.

Kľúčové slová: veta Pohlkeho-Schwarzova, historické poznámky, voľné rovnobežné premietanie, úplnosť obrazu útvaru vzhľadom na riešenie polohových a metrických úloh, význam v didaktike matematiky.

1 Z histórie dôkazu Pohlkeho vety

Karl Pohlke (28. 1. 1810 Berlín – 27. 11. 1876 Berlín), profesor deskriptívnej geometrie na technickej vysokej škole v Berlíne-Charlottenburgu, vyslovil už ako učiteľ tamojšej stavebnej akadémie r. 1853 tvrdenie, podľa ktorého možno *„ľubovoľný rovinný štvoruholník O´X´Y´Z´ považovať za rovnobežný priemet troch navzájom kolmých zhodných úsečiek OX, OY, OZ“* [(2)]. V originálnom znení vety sa nehovorilo o štvoruholníku a mnohí mlčky predpokladali, že ide o pravouhlé premietanie, čo vyvolalo pochybnosti o jej pravdivosti. Možno ich vystopovať v liste, ktorý Pohlkemu napísal Steiner, jeho blízky priateľ [(3)]. To Pohlkeho primälo k podrobnejšiemu skúmaniu podmienok, ktoré musí spĺňať štvorica komplanárnych bodov, aby ju bolo možné považovať za rovnobežný priemet vrcholov štvorstena požadovaných vlastností. Svoje bádania uverejnil r. 1858 v spise *„Zmiešané vety a úlohy“* [(4)].

Vyučovanie deskriptívnej geometrie na nemeckých stredných školách, akadémiách a vysokých technických školách si vyžadovalo napísanie učebníc pre tento predmet. Na jednej z prvých učebníc pracoval Pohlke od začiatku svojho pôsobenia na akadémii v Charlottenburgu. Jeho dvojdielna učebnica *Deskriptívna geometria* (Darstellende Geometrie) získala vďaka obsahu [(5)], ako aj dôslednému aplikovaniu vedeckých postupov ustanovených v Steinerovom diele „Systematické rozvíjanie“ (Systematische Entwickelung) punc modernosti, ktorý jej zabezpečil dlhotrvajúci úspech. Do prvého dielu, ktorý vyšiel r. 1860 v Berlíne, uviedol Pohlke znenie *základnej vety šikmej axonometrie* (par.113) s upozornením, že elementárny dôkaz vety pravdepodobne neexistuje a preto sa odkladá do druhého zväzku. Prvý diel vyšiel ešte dvakrát (1866, 1872), druhý diel len raz, v roku autorovej smrti. Ešte pred druhým vydaním prvého zväzku učebnice sa objavili aspoň tri elementárne dôkazy *„Pohlkeho vety“* (takto ju nazvali matematici a deskriptívni geometri, ktorí sa touto tematikou zaoberali). Boli to – v chronologickom poradí – dôkazy *J. W. Deschwandena* (neúplný dôkaz), *H. Kinkelina* [(6)] a mladého H. Schwarza, Pohlkeho žiaka, vtedy ešte bez doktorátu. Schwarz

---

(1) Práca vznikla za podpory grantu č. 1/0262/03.
(2) Znenie vety je nepresné, prevzaté z [5]
(3) Jacob Steiner (1796 - 1863) – profesor geometrie na berlínskej univerzite, jeden z najvýznamnejších nemeckých geometrov 19. storočia
(4) Vermichste Sätze und Aufgaben (J. r. ang. Math., LV, 1858, 377)
(5) V obsahu nechýba uvedenie princípov žiadnej z lineárnych zobrazovacích metód vrátane reliéfnej perspektívy, aplikácií na základné plochy a telesá, rovinné rezy a vzájomné prieniky telies, krivky rovinné i priestorové, plochy rotačné, priamkové, skrutkové atď.
(6) *J .W. Deschwanden*, profesor deskriptívnej geometrie a riaditeľ polytechniky v Zürichu: *Uplatnenie šikmého rovnobežného premietania v axonometrickom zobrazení* (Anwendung schiefer paralellprojectionen zu axonometrischen Zeichnungen, Natur. Ges. Zürich, VI, 1861, 254 – 284, VII)

bol s Pohlkeho dôkazom oboznámený, nebol ho však schopný reprodukovať. Jeho vlastný dôkaz bol tak geniálne jednoduchý, že ho Pohlke – po vzájomnej dohode – uverejnil v druhom vydaní prvého zväzku *Deskriptívnej geometrie*. Pohlkeho dôkaz uverejnený nebol a zostal ešte viac než desaťročie neznámym.

H. Schwarz (7) a *T. Reye*(8) dokázali zovšeobecnené tvrdenie Pohlkeho vety v nasledujúcom tvare: *„Ľubovoľné tri komplanárne úsečky O´X´, O´Y´, O´Z´ s vlastnosťou, že najviac tri z bodov O´, X´, Y´, Z´ sú kolineárne, možno považovať za rovnobežný priemet troch úsečiek OX, OY, OZ* (*neležiacich v jednej rovine*)*, pre ktoré sú známe pomery ich dĺžok a vzájomné uhly*“. V priebehu ďalšieho polstoročia vyšli mnohé ďalšie dôkazy Pohlkeho-Schwarzovej vety, syntetické i analytické. Pripomeňme si aspoň niektoré z nich.

Jedným z prvých bol dôkaz *Karla Pelza* (9), vynikajúceho českého geometra svetového mena, v spise *O novom dôkaze Pohlkeho základnej vety*. Po objavení sa spisu v ňom Schwarz rozpoznal dôkaz totožný s originálnym Pohlkeho dôkazom.(10) Medzery v Deschwandenovom dôkaze sa podarilo odstrániť *G. V. Peschkovi* (11), ktorého dôkaz sa považuje za prvý elementárny dôkaz Pohlkeho vety v Rakúsko-Uhorsku.

Elegantný analytický dôkaz Pohlkeho vety uviedol anglický algebrik a geometer *Arthur Cayley* (12). Tiež vrcholný český matematik svojej doby *Jan Sobotka* (13) riešil analyticky problém základnej vety axonometrie (pravouhlej i šikmej). *Felix Klein*, nemecký matematik z prelomu 19. a 20. storočia dokázal, že „ľubovoľné tri komplanárne vektory, ktoré nie sú všetky kolineárne, možno považovať za obrazy troch jednotkových navzájom kolmých vektorov v afinnom zobrazení $f(x,\ y) = (A_1x + B_1y + C_1z,\ A_2x + B_2y + C_2z,\ 0)$, pričom zobrazenie f je kompozíciou istého rovnobežného premietania (do roviny) a dilatácie. (14)

H. Kinkelin, profesor priemyslovky v Bazileji: *Šikmé axonometrické premietanie* (Die schiefe axonometrische Projection, Natur. Ges. Zürich, VI, 1861, 358 - 367) – analytické riešenie

(7) *Elementárny dôkaz Pohlkeho základnej vety axonometrie* (Elementarer Beweis des Pohlke´schen Fundamentalsatzes der Axonometrie, J. r. ang. Math., LXIII, 1863, 309 - 314); *Hermann Schwarz* (1843 - 1921), žiak Pohlkeho a Weierstrassa. Doktorát získal v Berlíne pod Weierstrassovým vedením. Po krátkom pôsobení v Halle sa stal profesorom matematiky na vysokej škole technickej v Zürichu, v r. 1875 – 1892 pôsobil ako profesor matematiky na univerzite v Göttingene, odkiaľ odišiel na univerzitu do Berlína, kde pôsobil až do smrti. Jeho záujem o geometriu a nezvyčajná schopnosť pretransformovania geometrických úvah do jazyka analýzy ho priviedli k významným výsledkom (napr. Cauchy-Schwarzova nerovnosť, Schwarzova funkcia, atď.).

(8) *T. Reye* (1838 - 1919), *Dôkaz Pohlkeho základnej vety axonometrie* (Beweis von Pohlke´s Fundamentalsatz der Axonometrie, Vrtlj. Natur. Ges. Zürich, XI, 1866, 350 – 58)

(9) *Karel Pelz* (1845 Běleč u Křivoklátu – 1903 Praha), Über einen neuen Beweis des Fundamentalsatzes von Pohlke ([6]). Karel Pelz bol absolventom pražskej polytechniky, žiakom W. Fiedlera a K. Küppera. Päť rokov pôsobil ako asistent profesora Küppera v Prahe, neskôr bol profesorom reálky v Těšíne, odkiaľ dostal pozvanie na krajinskú reálku do Grazu (Štajerský Hradec). V Grazi pôsobil (od r. 1878) na polytechnike ako mimoriadny, a od roku 1881 ako riadny profesor deskriptívnej geometrie. Roky prežité v Grazi boli najplodnejšími a najšťastnejšími rokmi života Karla Pelza, no až r. 1896 sa mu splnil celoživotný sen, keď bol po konkurznom riadení vymenovaný za profesora deskriptívnej geometrie na českej technike v Prahe, kde pôsobil až do smrti.

(10) Zmienil sa o tom v Ges. Mathem. Abhandlungen II, Berlín 1890, 350

(11) *Gustav Viktor Peschka* (1830 – 1903), v tom čase profesor deskriptívnej geometrie na nemeckej technike v Brne a v rokoch 1891 – 1901 profesor a prednosta katedry deskriptívnej geometrie na polytechnike vo Viedni; „*Elementárny dôkaz Pohlkeho základnej vety axonometrie*“ (Elementarer Beweis des Pohlke´schen Fundamentalsatzes der Axonometrie, Stzgsb. Math. Nat., Ak. Wien LXXVIII, 1878, II Abth., 1043 - 54)

(12) *Arthur Cayley* (1821 – 1895), *O probléme premietania* (On a problem of projection, The Quart. J. p. appl. Math., XIII, 1875, 19 – 29)

(13) *Jan Sobotka* (1862 – 1931), profesor deskriptívnej geometrie na viedenskej polytechnike (1897 – 99), prvý profesor deskriptívnej geometrie na českej technike v Brne a od r. 1904 profesor matematiky na českej univerzite v Prahe; *K matematickému štúdiu axonometrie* (Zur rechnerischen Behandlungen der Axonometrie, Stzgsb. böhm. Ges. Prag, 1900)

(14) *Elementárna matematika z vyššieho hľadiska* [4]; *Felix Klein* (1849 – 1925), profesor univerzity v Erlangene a Göttingene; všeobecne známy sa stal jeho tzv. „Erlangenský program“ (inauguračná prednáška: *Porovnávacie úvahy o novších geometrických bádaniach* (Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, 1842), v ktorom načrtol program prestavby geometrie podľa charakteristických grúp transformácií.)

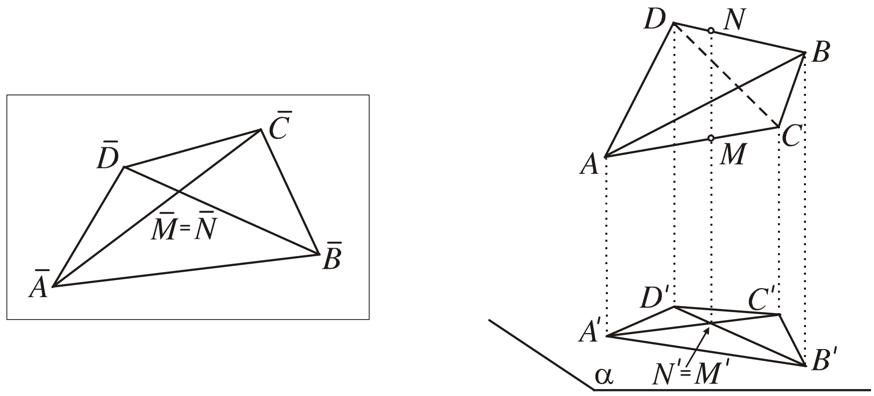
2 Náčrt Schwarzovho dôkazu zovšeobecnenej Pohlkeho vety

Veta 1 (Základná veta šikmej axonometrie): *Vrcholy každého rovinného štvoruholníka možno považovať za rovnobežný priemet vrcholov štvorstena vopred zvoleného tvaru* (t. j. podobného ľubovoľnému zvolenému štvorstenu).

Základom dôkazu vety je fakt, že na každej trojbokej hranolovej ploche ${}^{3}\boldsymbol{H}$ existujú všetky druhy trojuholníkov. Vyjadrené exaktne: Ku každej ploche ${}^{3}\boldsymbol{H}$ existuje rovina, ktorej prienik s plochou je trojuholník podobný ľubovoľnému trojuholníku. Jednoduchým dôsledkom je nasledujúce tvrdenie.

Veta 2 Nech ${}^{n}\boldsymbol{H}$ je n-boká hranolová plocha a P_n ľubovoľný rovinný n-uholník, ktorý je afinný [15] s určujúcim n-uholníkom plochy ${}^{n}\boldsymbol{H}$. Potom existuje rovina, ktorej prienik s danou plochou je n-uholník podobný n-uholníku P_n.

Je zrejmé, že stačí dokázať modifikované tvrdenie vety 1, a to, že existuje rovnobežné premietanie, v ktorom priemetom (do roviny) vrcholov ľubovoľne zvoleného štvorstena $ABCD$ sú vrcholy štvoruholníka $A_1B_1C_1D_1$ podobného ľubovoľnému danému štvoruholníku $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$. Ak existuje rovnobežné premietanie požadovaných vlastností, tak do priesečníka uhlopriečok predpokladaného štvoruholníka $A_1B_1C_1D_1$ priemetne (dolný index „1“ označuje priemet rovnomenného bodu) sa premietnu dva body: bod M hrany AC a bod N hrany BD (s ňou mimobežnej). Pritom platí: $(A_1C_1M_1) = (\overline{A}\overline{C}\overline{M})$ a $(B_1D_1N_1) = (\overline{B}\overline{D}\overline{N})$ (podobné štvoruholníky) a $(A_1C_1M_1) = (ACM)$ a $(B_1D_1N_1) = (BDN)$ (invariantnosť deliaceho pomeru v rovnobežnom premietaní). Ak teda zostrojíme body M, N tak, aby $(ACM) = (\overline{A}\overline{C}\overline{M})$ a $(BDN) = (\overline{B}\overline{D}\overline{N})$, osnova rovnobežného premietania požadovaných vlastností je určená priamkou MN (obr. 1). Premietacie priamky vrcholov štvorstena $ABCD$ sú hranami štvorbokej hranolovej plochy ${}^{4}\boldsymbol{H}$, ktorá je hranicou premietacieho útvaru daného štvorstena. Ľubovoľný rovinný rez plochy rovinou α rôznobežnou s priamkou MN je štvoruholník $A'B'C'D'$ afinný s daným štvoruholníkom $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$. Platí totiž: $(ACM) = (A'C'M') = (\overline{A}\overline{C}\overline{M})$ a $(BDN) = (B'D'N') = (\overline{B}\overline{D}\overline{N})$; posledné rovnosti vo výrazoch vyjadrujú nutnú i dostačujúcu podmienku pre to, aby štvoruholníky $A'B'C'D'$ a $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$ boli afinnými. Záver je dôsledkom vety 2.



Obr. 1

[15] Dva n-uholníky nazývame afinnými, ak existuje afinita (bijektívne afinné zobrazenie) zobrazujúca jeden z nich do zvyšného.

3 Význam Pohlkeho-Schwarzovej vety v didaktike matematiky

Pohlkeho-Schwarzova veta je fundamentálnou vetou zobrazovacej metódy *šikmej axonometrie*. S princípom metódy sa možno oboznámiť napr. v [2], [7], [10]. (16) Ide o bijektívne bodové zobrazenie útvarov trojrozmerného rozšíreného euklidovského priestoru $\overline{E}_3$ na určité útvary v nákresni, pričom zobrazovaný útvar je pevne zviazaný s daným ortonormálnym súradnicovým štvorstenom $OE^xE^yE^z$. (17) Obrazom vlastného bodu priestoru je usporiadaná dvojica bodov pozostávajúca a) z *axonometrického* (rovnobežného) *priemetu bodu* do axonometrickej [= hlavnej] priemetne a b) z *axonometrického pôdorysu bodu*, ktorý je axonometrickým priemetom kolmého priemetu daného bodu do pomocnej priemetne π = $\overleftrightarrow{OE^xE^y}$ (18); táto dvojica bodov alebo leží na priamke pevnej osnovy (prvá ordinála bodu) alebo sú oba body totožné.

Aký je súvis zobrazovacej metódy šikmej axonometrie a tzv. *voľného rovnobežného premietania* používaného v školskej praxi na ilustráciu riešenia úloh *stereometrie* (elementárnej geometrie trojrozmerného euklidovského priestoru $\boldsymbol{E}_3$)? Súvislosť je veľmi tesná. Algoritmy riešenia úloh a metódy sú temer totožné (formálna odlišnosť je v názvoch objektov), dokonca v riešení jednotlivých úloh polohy sa v nákresni použije tá istá konfigurácia priamok. Možno povedať, že metóda axonometrie je teoretickým zázemím pre zobrazovanie priestorových geometrických útvarov vo voľnom rovnobežnom premietaní. Oboznámenie sa vyučujúceho s jej základmi umožňuje zefektívnenie práce v procese *vyučovania-osvojovania* poznatkov hlavne z oblasti stereometrie (19). Záverečné poznámky (1 – 3) sú pokusom o *definovanie niektorých problémov* súvisiacich s konštrukciou obrazov geometrických útvarov vo voľnom rovnobežnom premietaní v riešení stereometrickej úlohy a načrtnutie možných východísk pre ich riešenie.

1. Mimoriadne dôležitým problémom je *správne zadanie úlohy* (z hľadiska základnej klasifikácie stereometrických úloh na úlohy zaoberajúce sa vzájomnou polohou geometrických útvarov – *polohové úlohy a metrické úlohy* (20)). Na to je potrebné, aby bol vyučujúci oboznámený s pojmom *úplnosti obrazu* daného *geometrického útvaru* vzhľadom na riešenie polohových, či metrických úloh ([2], [9]). Napríklad obraz hranola $\boldsymbol{H}$ (${}^1A{}^2A$ ... ${}^nA$, ${}^1\overline{A}$) (kde ${}^1A{}^2A$ ... ${}^nA$ je podstavový n-uholník a ${}^1A{}^1\overline{A}$ je bočnou hranou telesa) je *vzhľadom na riešenie polohových úloh úplný*, ak sú dané: rovnobežné priemety troch vrcholov podstavy, priemet jedného z vrcholov druhej podstavy (ležiaceho s jedným z troch vybraných bodov na tej istej hrane telesa) a „tvar“ n-uholníka ${}^1A{}^2A$ ... ${}^nA$ v prípade $n > 3$ (21). Analogicky je obraz ihlana $\boldsymbol{I}$ (${}^1A{}^2A$ ... ${}^nA$, V) (kde ${}^1A{}^2A$ ... ${}^nA$ je podstavový

(16) Metóda axonometrie si nevyžaduje poznanie žiadnej zo zobrazovacích metód deskriptívnej geometrie; vyžaduje ovládanie stereometrie (vrátane pojmu rovnobežného premietania, jeho invariantných vlastností a základných pojmov súvisiacich so zobrazením jednoduchých geometrických útvarov a z nich odvodených telies v rovnobežnom premietaní).

(17) Ide o štvorsten, v ktorom sú všetky hrany incidentné so spoločným bodom O navzájom kolmé a zhodné.

(18) Bijektívnosť priradenia je zabezpečená aj v prípade voľby ľubovoľného afinného súradnicového štvorstena; kolmé premietanie do pomocnej priemetne π zastupuje rovnobežné premietanie do tejto roviny s osnovou premietania danou súradnicovou osou OE^z. Tiež pomocné premietanie do roviny π by mohlo byť stredovým premietaním. V oboch prípadoch ide o tzv. *vnútorné premietanie,* ktoré súvisí so zobrazením hranolov a ihlanov.

(19) Samozrejmým predpokladom je, že učiteľ pozná *systém* elementárnej geometrie euklidovskej roviny $\boldsymbol{E}_2$ a trojrozmerného euklidovského priestoru $\boldsymbol{E}_3$ (*stereometrie*) na zodpovedajúcej úrovni (napr. [11], [8], [3]).

(20) Metrickou úlohou v stereometrii nie je výpočtová úloha, ktorej riešenie spočíva v jednoduchom dosadení do vzorcov (napr. určenie objemu kvádra s danými dĺžkami hrán a pod.), t. j. úloha, na riešenie ktorej nie je potrebná žiadna *stereometrická konštrukcia*.

(21) To znamená, že daný ľubovoľný n-uholník je podobný n-uholníku ${}^1A{}^2A$ ... ${}^nA$ ($n > 3$). Stačilo by poznať n-uholník afinný s podstavovým n-uholníkom (o čom ale nemá zmysel uvažovať v školskej praxi). Užitočným je však nácvik doplnenia zvolenej trojice priemetov vrcholov podstavy tak, aby útvar po doplnení mohol byť považovaný za rovnobežný priemet pravidelného päť– či šesťuholníka alebo lichobežníka daného tvaru.

n-uholník a bod *V* hlavný vrchol) úplný vzhľadom na riešenie polohových úloh, ak sú dané: priemety troch vrcholov podstavy, priemet hlavného vrcholu telesa a tvar podstavového *n*-uholníka. Rovnobežné priemety spomenutých štyroch bodov si možno (v oboch prípadoch) zvoliť ľubovoľne *vhodne* (veta *Pohlkeho-Schwarzova*). Každý ďalší geometrický útvar (priamka, rovina, atď.), vystupujúci v zadaní úlohy musí však byť určený bodmi pevne spojenými s telesom (t. j. môžu to byť body ležiace na priamkach incidentných s hranami alebo v rovinách incidentných so stenami, prípadne s ľubovoľnými dvoma bočnými hranami telesa, atď.). Podstatné je, že každý bod *M* budeme môcť dourčiť usporiadanou dvojicou bodov, a to jeho rovnobežným priemetom M' a rovnobežným priemetom M_1' pomocného priemetu M_1 bodu *M* do roviny podstavy telesa. Toto pomocné (*vnútorné*) premietanie je v prípade hranolov určené osnovou *bočných hrán* a v prípade ihlanov ide o stredové premietanie so stredom *v hlavnom vrchole* telesa.

Aj odpoveď na otázku *úplnosti obrazu útvaru U vzhľadom na riešenie metrických úloh* (vrátane úloh súvisiacich s kolmosťou základných geometrických útvarov) dáva zobrazovacia metóda šikmej axonometrie: *treba poznať* rovnobežný priemet takzvaného *ortonormálneho štvorstena* (t. j. štvorstena, v ktorom sú všetky hrany incidentné s tým istým vrcholom navzájom kolmé a zhodné), ktorý je pevne spojený s útvarom *U* (22). Tento poznatok vyjasňuje, prečo sú *kocka*, *kváder* daných rozmerov alebo *pravidelný ihlan* s danou hranou a výškou (teda implicitne tiež kocka), tak obľúbenými telesami pri ilustrácii riešenia metrických (žiaľ, i polohových!) stereometrických úloh. Vyhnúť sa neželanému stereotypu by umožnilo a) v riešení polohových úloh viac pracovať s rovnobežnostenmi, šikmými hranolmi, ľubovoľnými ihlanmi (s predpísanou pravidelnou podstavou alebo podstavou daného tvaru) vrátane štvorstenov (23); b) v riešení metrických úloh by nacvičovanie algoritmov riešenia úloh o základných geometrických útvaroch mohlo štartovať z daného rovnobežného priemetu súradnicového štvorstena.

2. Po oboznámení sa s Pohlkeho vetou si iste každý čitateľ uvedomuje nenáležitosť požiadaviek, či príkazov na narysovanie „*správneho*“ rovnobežného priemetu kocky (dodržiavaním nezmyselných pravidiel na „skracovanie“ hrán kolmých na priemetňu, používaním uhlomeru na nameranie predpísaného uhla, ap.). Rovnako neprípustným je vyžadovať od žiaka rozpoznanie objektu z jeho – síce úplného obrazu vzhľadom na riešenie polohových, no neúplného vzhľadom na riešenie metrických úloh. Bude veľmi potešujúce, keď sa nájdu učitelia, ktorí po takto zámerne položenej *provokačnej otázke* vyhodnotia ako najlepšie odpovede typu „*nemôžem to vedieť*“, „*mohlo by to byť všeličo*“, ... Kiež by sa čoraz viac žiakov mohlo tešiť z takých učiteľov a obrátene!
3. Starší žiaci by si mali osvojiť, že vo voľnom rovnobežnom premietaní nejde o premietanie pravouhlé. Konštrukcia kolmého priemetu troch navzájom kolmých zhodných úsečiek so spoločným krajným bodom (vo všeobecnej polohe) nie je totiž celkom elementárna a vyžaduje poznatky presahujúce rámec stredoškolskej geometrie ([1], [2], [9], [10]). (24)

(22) Požiadavka úplnosti útvaru ***U*** vzhľadom na riešenie polohových úloh je splnená automaticky. Zrejmá je výhodnosť voľby jednej steny základného telesa (prípadne viacerých stien) v rovine steny (stien) spomenutého štvorstena.

(23) Štvorsten si zasluhuje pozornosť už tým, že je najjednoduchším základným telesom (analogón trojuholníka v planimetrii). Pozornosť si zasluhujú i pozoruhodné metrické vlastnosti niektorých špeciálnych druhov štvorstenov.

(24) Vlastnosť kolmého priemetu troch navzájom kolmých a zhodných úsečiek vyjadruje základná veta kolmej axonometrie (Gaussova), ako aj veta o štvorcoch pomerov skrátenia danej axonometrie (Weisbachova) ([1], s. 307 – 310; [2], s. 100, 108; [10], s. 119) alebo veta o pravouhlom priemete kružnice neležiacej v premietacej rovine ani v rovine s priemetňou rovnobežnej ([9], s. 165).

Literatúra
1. Dörrie,H.: 100 *Great Problems of Elementary Mathematics*. Dover, New York 1965, ISBN 0-486-61348-8
2. Glazunov, E. A. – Četveruchin, N. F.: *Axonometrija*. Gos. Iz. T.-Teoret. Lit., Moskva 1953
3. Hartshorne, R.: *Geometry: Euclid and beyond*. Springer, Berlin 2000, ISBN 0-387-98650-2
4. Klein, F.: *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte*, *Geometrie* II. Berlin 1925; preklad: Nauka, Moskva 1987
5. Loria, G.: *Storia della Gemetria Descrittiva*. Ulrico Hoepli, Milano 1921
6. Pelz, K.: *Über einen neuen Beweis des Fundamentalsatzes von Pohlke*. Stzgsb. Math. Nat., Akad. der W. LXXVI, Wien 1877, 123 - 138
7. Pémová, M.: *Kosouhlá axonometria – Pohlkeho veta*. Dipl. p., FMFI UK, Bratislava 2004
8. Perepjolkin, D., I.: *Kurs elementarnoj geometrii II*. Gos. Iz. Tech. Teor. Lit., Moskva 1949
9. Piják, V. a kol.: *Konštrukčná geometria*. SPN, Bratislava 1985
10. Sklenáriková, Z.: *Zobrazovacie metódy II*. Skriptum, vyd. UK, Bratislava 1980
11. Sklenáriková, Z. – Čižmár, J.: *Elementárna geometria euklidovskej roviny*. Skriptum, vyd. UK, Bratislava 2002, ISBN 80-223-1585-0, II. vyd. 2005, ISBN 80-223-2020-X

Adresa autorov

RNDr. Zita Sklenáriková, PhD.,
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského,
Mlynská dolina, 842 48, Bratislava 4
e-mail: zita.sklenarikova@fmph.uniba.sk

Mgr. Marta Pémová,
Katedra geometrie, algebry a didaktiky matematiky, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského
Mlynská dolina, 842 48, Bratislava 4
e-mail: marta.pemova@fmph.uniba.sk

The Pohlke-Schwarz Theorem and its Significance in the Didactic of Mathematics

As soon as the first volume of “Descriptive Geometry” by *Karl Pohlke* (1810 – 1876) had appeared (Berlin, 1860), inclusive the fundamental theorem of oblique axonometry with a note that “*the proof of the theorem probably could not be accomplished in an elementary way and that was why it was taken off for the second volume of the book*”, both synthetic and analytic proof has been made by many mathematicians (even these renowned ones) within the time period longer than half a century. The paper presents – besides the history of proofs of the Pohlke`s Theorem – the genial elementary proof of the generalized statement introduced by a young disciple of Pohlke, *H. A. Schwarz* (1843 – 1921) in 1864. The main goal of this paper is to point out the close connection between the method of oblique axonometry and a “free” parallel projection used in school practices within the tuition in stereometry. In conclusion there are notes on the problem of the completeness of the oblique image of a geometrical figure (considering the problems of geometry of position as well as problems involving perpendicularity and metrical problems).

Key words: the Pohlke-Schwarz Theorem, historic notes, “free” parallel projection, on the problem of the completeness of the oblique image of a geometrical figure with respect to problems of geometry of position and metrical problems.