

2. REZULTANTY

4. Nech $f, g \in k[x]$ (k je pole), nech f je stupňa m a g je stupňa n ($m, n > 0$). Ukážte:

- (a) $\text{Res}(f, g) = (-1)^{mn} \text{Res}(g, f)$,
- (b) $\text{Res}(af, bg) = a^n b^m \text{Res}(f, g)$, kde $a, b \in k$, $a, b \neq 0$,

Platia tieto rovnosti aj v prípade, keď $m = 0$ alebo $n = 0$?

5. Nech $f, g \in k[x]$ (k je pole), nech f je stupňa m a g je stupňa n ($m, n > 0$). Ukážte:

- (a) $\text{Res}(f(x+a), g(x+a)) = \text{Res}(f, g)$, kde $a \in k$,
- (b) $\text{Res}(f(ax), g(ax)) = a^{mn} \text{Res}(f, g)$, kde $a \in k$, $a \neq 0$,
- (c) ak 0 nie je koreňom f ani g , tak $\text{Res}(f_r, g_r) = (-1)^{mn} \text{Res}(f, g)$, kde $f_r(x) = x^m f(1/x)$ a $g_r(x) = x^n g(1/x)$.

6. Nech $f, g \in \mathbb{C}[x]$. Ukážte, že polynóm $f(x)g(y) - g(x)f(y)$ je deliteľný polynómom $x - y$.

Na základe cvičenia 6 môžeme pre polynómy $f, g \in \mathbb{C}[x]$ definovať tzv. *Bézoutovu maticu* $B(f, g) = (b_{ij})_{i,j=0}^{n-1}$ ($n = \max\{\deg f, \deg g\}$), kde b_{ij} sú koeficienty polynómu

$$\frac{f(x)g(y) - g(x)f(y)}{x - y} = \sum_{i,j=0}^{n-1} b_{ij} x^i y^j.$$

7. Nájdite Bézoutovu maticu polynómov $f = 2x^2 - 5$ a $g = x^3 + 2x$.

8. Porovnajte determinant Bézoutovej matice $B(f, g)$ a resultant $\text{Res}(f, g)$ polynómov $f = f_2 x^2 + f_1 x + f_0$ a $g = g_1 x + g_0$ ($f_2, g_1 \neq 0$).

9. Majme kubický polynóm

$$p(x) = x^3 + ax^2 + b \in \mathbb{C}[x].$$

Akú podmienku (aké podmienky) musia spĺňať koeficienty a, b , aby polynóm p mal dvojnásobný koreň? Viete medzi týmito polynómami nájsť taký, ktorý má trojnásobný koreň?