

## 3. APLIKÁCIE REZULTANTOV

**10.** Vyriešte pomocou resultantov nad  $\mathbb{C}$ :

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 10 \\x^2 + xy + 2y^2 &= 16.\end{aligned}$$

(Stačí, keď resultanty použijete na nájdenie jedného priemetu množiny riešení, druhú súradnicu dopočítajte podľa vlastného uváženia.)

**11.** Zistite, pre ktoré  $a \in \mathbb{C}$  má sústava

$$\begin{aligned}x + y &= a \\x^2 + y^2 &= a^3 \\x^3 + y^3 &= a^5\end{aligned}$$

riešenie nad  $\mathbb{C}$ .

**12.** Doplníte dôkaz lemy z prednášky:

- (a) Ukážte, že ak  $f, g \in k[x, y]$ , kde  $f$  je ireducibilný a  $f \nmid g$  v  $k[x, y]$ , tak za predpokladu, že  $x$  sa v polynóme  $f$  vyskytuje (t.j.  $f \notin k[y]$ ), platí  $f \nmid g$  v  $k(y)[x]$ .
- (b) Overte, že lema platí aj prípade, keď  $f \in k[y]$  (t.j. že pre ireducibilný  $f \in k[y]$  a pre  $g[x, y]$  taký, že  $f \nmid g$  majú  $f$  a  $g$  len konečne veľa spoločných koreňov).

**13.** Nech  $g \in \mathbb{R}[x]$  má korene  $\beta_1, \dots, \beta_r \in \mathbb{R}$ . Položme  $h(x, y) = g(y - x) \in \mathbb{R}[x, y]$ . Ako vyzerá množina riešení  $h(x, y) = 0$ ? (Ide o podmnožinu  $\mathbb{R}^2$ , skúste ju zakresliť.)

**14.** Nech  $f, g \in \mathbb{Q}[x]$ , nech  $\alpha \in \mathbb{C}$  je koreňom polynómu  $f$  (nie nutne jediným) a  $\beta \in \mathbb{C}$  je koreňom polynómu  $g$ . Nájdite polynóm  $p \in \mathbb{Q}[x]$ , ktorého jedným z jeho koreňov bude  $\alpha + \beta$ .

(Môžte využiť skúsenosť z predchádzajúcej úlohy: skúmajte spoločné riešenia sústavy  $f(x) = 0, g(y - x) = 0$ .)

**15.** Nájdite implicitnú rovnicu krivky v reálnej rovine, ak má táto krivka racionálnu parametrizáciu:

$$x = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \quad y = \frac{2t}{t^2 + 1} \quad (t \in \mathbb{R}).$$