

6. IDEÁLY A VARIETY, HILBERTOVA VETA O BÁZE

32. Zistite, či dané dve sústavy určujú tú istú lineárnu varietu v $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$, teda či platí $V(f_1, f_2, f_3) = V(g_1, g_2)$:

- (a) $f_1 = x + y + z - 1, f_2 = x - y + 2z - 4,$
 $g_1 = x + 5y - z + 5, g_2 = 3x + y + z - 2.$
- (b) $f_1 = 2x + 3y - z, f_2 = x + y - 1, f_3 = x + z - 3,$
 $g_1 = x + 3y - 2z + 3, g_2 = y - z + 2.$
- (c) Navrhните algoritmus, ktorý pre lineárne variety $X_1 = V(f_1, \dots, f_r), X_2 = V(g_1, \dots, g_s) \subset \mathbb{A}^n$ rozhodne, či $X_1 = X_2$ ($f_i, g_j \in k[x_1, \dots, x_n]$ sú lineárne polynómy).

33. Dvojbodovú množinu z prednášky $X = \{(1, 2), (3, 4)\} \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{Q})$ vieme popísať viacerými spôsobmi ako riešenie sústavy polynomických rovníc. Ukážte, že

$$((x - 2)^2 + (y - 3)^2 - 2, x - y + 1) = ((x - 1)(x - 3), x - y + 1).$$

Čiže obe sady polynómov generujú ten istý ideál. (Ide o silnejšie tvrdenie, než že obe sady polynómov popisujú tú istú algebraickú varietu.)

34. (m) Nech pole k je nekonečné a nech $X \subset \mathbb{A}^n(k)$ je konečná množina. Vieme už, že X je algebraická varietu. Ukážte, že existuje n polynómov $f_1, \dots, f_n \in k[x_1, \dots, x_n]$ tak, že $X = V(f_1, \dots, f_n)$. (Nápoveda: interpolácia.)

35. Nech $I, J \subset k[x_1, \dots, x_n]$ sú ideály a nech $X = V(I), Y = V(J)$ sú zodpovedajúce variety. Čo viete povedať o varietách $V(IJ), V(I \cap J), V(I + J)$? Svoje tvrdenie dokažte.

36. (m) Nech k je pole. Je okruh $k[x_1, x_2, \dots]$ polynómov s nekonečne veľa premennými noetherovský?

37. (m) Uvažujme množinu reálnych funkcií spojitých na intervale $[0, 1] \subset \mathbb{R}$. Táto množina tvorí okruh. Ukážte, že tento okruh nie je noetherovský.

38. Nech $S \subset \mathbb{A}^n(k)$ a nech $I(S) \subset k[x_1, \dots, x_n]$ je definovaná ako na prednáške. Ukážte, že $I(S)$ je ideál v okruhu $k[x_1, \dots, x_n]$.

39. Dokažte tvrdenie 4.15 z prednášky. (Dôkazy tvrdení (i) a (ii) sú len prepisovaním definícií pre $V()$ a $I()$. Tvrdenie (iii) potom vyplýva z (i) a (ii).)