7. Radikál ideálu, Nullstellensatz

40. Pre ľubovoľný ideál I okruhu R ukážte, že $\sqrt{I}$ je ideál.

41. Nech I je ideál v okruhu R. Ktoré z nasledovných tvrdení sú praavdivé?
- (a) Ak I je maximálny, potom je radikálový.
- (b) Ak I je prvoideál, potom je radikálový.
- (c) Ak I je radikálový, potom je maximálny.
- (d) Ak I je radikálový, potom je prvoideál.

Svoju odpoveď zdôvodnite.

42. Nech $I, J \subset k[x_1, \dots, x_n]$ sú ideály. Ukážte, že
$$\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}.$$

43. Nech $X \subset \mathbb{A}^n$. Ukážte, že ideál $I(X)$ je radikálový.

44. Nech $I = (x^2y + xy^2, x^2y - xy^2)$ je ideál v $k[x, y]$. Nájdite $\sqrt{I}$.

45. Nech $I = (x^4-2x^2y^2+y^2, x^4-y^2) \subset \mathbb{C}[x, y]$. Zistite, či $x^2-y^2 \in \sqrt{I}$ a či $x^2+y^2 \in \sqrt{I}$.

46. Nájdite radikál ideálu $(x^2y^4 - y^2, 1 - x^3y^3) \subset \mathbb{C}[x, y]$.

47. (m) Nech k je pole, ktoré nie je algebraicky uzavreté a nech $X \subset \mathbb{A}^n(k)$ je ľubovoľná algebraická varieta. Ukážte, že existuje polynóm $g \in k[x_1, \dots, x_n]$ taký, že $X = V(g)$. (Návod: existuje polynóm $h \in k[y_1, \dots, y_r]$ taký, že $V(h) = \{(0, \dots, 0)\}$? Ak áno, vedeli by ste ho využiť?