

9. SÚRADNICOVÝ OKRUH ALGEBRAICKEJ VARIETY, MORFIZMUS VARIET.

54. Nech φ je ľubovoľný homomorfizmus okruhov (komutatívnych s jednotkou)

$$\varphi: R_1 \rightarrow R_2.$$

Jadro homomorfizmu φ je množina

$$\ker \varphi = \{r \in R_1 \mid \varphi(r) = 0\}.$$

Ukážte, že $\ker \varphi$ je ideál v okruhu R_1 .

55. Nech φ je ľubovoľný homomorfizmus okruhov (komutatívnych s jednotkou) a nech J je ideál v okruhu R_2 . Ukážte, že vzor ideálu J v zobrazení φ , t.j. množina

$$\varphi^{-1}(J) = \{r \in R_1 \mid \varphi(r) \in J\}$$

je ideál v okruhu R_1 .

56. Nech $X = V(x^2 + y^2 - 1, x - 1) \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$. Nájdite $\mathbb{C}[X]$.

57. Nech $X = V(x^2 + y^2 - 1, y) \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$. Nájdite $\mathbb{C}[X]$.

58. Uvažujte morfizmus $\mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^2$ daný predpisom $\sigma: (x, y) \mapsto (x, xy)$.

- (a) Čo je obrazom $\mathbb{A}^2$ v tomto zobrazení? Je obraz $\mathbb{A}^2$ v Zariskiho topológii uzavretou množinou? Je otvorenou?
- (b) Nájdite obraz priamky $V(y - x)$ v tomto zobrazení.
- (c) Pokúste sa nájsť obraz jednotkovej kružnice v tomto zobrazení.

(Uvedené zobrazenie je veľmi významným zobrazením v algebraickej geometrii, využíva sa pri štúdiu singularít rovinných kriviek.)

V príkladoch 56 a 57 popíšte bližšie, čo je to za množinu, akú má štruktúru. Nestačí mi len definícia, že $\mathbb{C}[X] = \mathbb{C}[x, y]/I(X)$, kde za $I(X)$ dosadíte správny ideál.