KAPITOLA 2

Afinné zobrazenia

Definícia 2.1. Nech $A, B \in \mathbb{A}(k)$, $A \neq B$. **Priamka** $\overleftrightarrow{AB}$ je množina

$$\{(1-t)A + tB \mid \forall t \in k\} = \{A + t(B-A) \mid \forall t \in k\}.$$

1. Definícia a základné vlastnosti afinného zobrazenia

Definícia 2.2. Nech $(\mathbb{A}_1, V_1)$ a $(\mathbb{A}_2, V_2)$ sú afinné priestory nad rovnakým poľom. Dvojicu (f, Df), kde $f\colon \mathbb{A}_1 \to \mathbb{A}_2$, $Df\colon V_1 \to V_2$ takú, že

- Df je lineárne zobrazenie vektorových priestorov,
- $f(P) - f(Q) = Df(P-Q)$ pre všetky $P, Q \in \mathbb{A}_1$

nazývame **afinným zobrazením** prestoru $\mathbb{A}_1$ do priestoru $\mathbb{A}_2$.

Poznámka 2.3. Zjavne je definícia afinného zobrazenia do veľkej miery redundantná. Df je jednoznačne determinované zobrazením f (tzv. **bodovou zložkou** afinného zobrazenia). Preto sa budeme zvyčajne na zobrazenie $f\colon \mathbb{A}_1 \to \mathbb{A}_2$ z dvojice (f, Df) odkazovať ako na afinné zobrazenie.

Lineárne zobrazenie $Df\colon V(\mathbb{A}_1) \to V(\mathbb{A}_2)$ vektorových priestorov budeme nazývať aj **asociované** zobrazenie k afinnému zobrazeniu f alebo tiež **vektorovou** alebo **lineárnou zložkou** afinného zobrazenia f.

Afinné zobrazenie je určené bodovou zložkou $f\colon \mathbb{A}_1 \to \mathbb{A}_2$, význam vektorovej zložky je, že dáva zobrazeniu štruktúru.

Príklad 2.4. Posunutie v reálnej rovine $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ (alebo $\mathbb{E}^2$) v smere vektora $\mathbf{u}$ zobrazí bod A na bod $A + \mathbf{u}$. Usporiadanú dvojicu bodov (A, B) tak zobrazí na usporiadanú dvojicu $(A + \mathbf{u}, B + \mathbf{u})$, teda je dobre definované na $V(\mathbb{A}^2(\mathbb{R}))$: vektor $B - A$ zobrazí na vektor $B - A$. Ide o identitu na $V(\mathbb{A}^2(\mathbb{R}))$, čo je lineárne zobrazenie. Teda posunutie je afinné zobrazenie.

Príklad 2.5. Podobne overíme, že stredová súmernosť v $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ je afinné zobrazenie, lebo je dobre definované na $V(\mathbb{A}^2(\mathbb{R}))$, kde vektor $\mathbf{v}$ zobrazí na vektor $-\mathbf{v}$, čo je tiež lineárne zobrazenie.

Príklad 2.6. Zobrazenie $\mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, $(a, b) \mapsto (a, |b|)$ nie je afinným zobrazením: vieme nájsť body A, B, C, D tak, že $B - A = D - C$, ale $f(B) - f(A) \neq f(D) - f(C)$.

Príklad 2.7. Premietanie na x-os:

$$\mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{A}^2(\mathbb{R}), \quad (a_1, a_2) \mapsto (a_1, 0)$$

je afinné zobrazenie.

Veta 2.8. *Nech $(\mathbb{A}_1, V_1)$ a $(\mathbb{A}_2, V_2)$ sú afinné priestory. Pre každú dvojicu bodov $P_1 \in \mathbb{A}_1$, $P_2 \in \mathbb{A}_2$ a každé lineárne zobrazenie $g\colon V_1 \to V_2$ existuje práve jedno afinné zobrazenie $f\colon \mathbb{A}_1 \to \mathbb{A}_2$ také, že $f(P_1) = P_2$ a $Df = g$.*

(Príjemnou ľudskou rečou: afinné zobrazenie f je jednoznačne determinované zobrazením Df a obrazom jedného bodu.)

Dôkaz. Existencia zobrazenia: Nech $f\colon \mathbb{A}_1 \to \mathbb{A}_2$ je definované nasledovne:

$$f(X) = P_2 + g(X - P_1).$$

Ľahko sa presvedčíme, že zobrazenie f má požadované vlastnosti:

- $f(P_1) = P_2 + g(P_1 - P_1) = P_2 - g(\mathbf{0}) = P_2$,
- pre ľubovoľné $A, B \in A_1$ platí

$$\begin{aligned} Df(B - A) &= f(B) - f(A) = P_2 + g(B - P_1) - (P_2 + g(A - P_1)) \\ &= g((B - P_1) - (A - P_1)) \\ &= g(B - A), \end{aligned}$$

  odkiaľ vidíme, že na V_1 je Df dobre definovaným lineárnym zobrazením totožným so zobrazením g.

Jednoznačnosť: nech $h\colon \mathbb{A}_1 \to \mathbb{A}_2$ je ďalšie zobrazenie vyhovujúce daným podmienkam, t.j. nech $h(P_1) = P_2$ a $Dh = g$. Potom pre ľubovoľné $X \in \mathbb{A}_1$ platí

$$h(X) = h(P_1) + Dh(X - P_1) = P_2 + g(X - P_1) = f(P_1) + Df(X - P_1) = f(X),$$

kde prvá rovnosť vyplýva z definície afinného zobrazenia, druhá z podmienok pre zobrazenie h, tretia z podmienok pre zobrazenie f a štvrtá znovu z definície afinného zobrazenia. □

Dôsledok. *(určenosť afinného zobrazenia) Nech $E_0, E_1, \ldots, E_n$ je barycentrický súradnicový systém v $\mathbb{A}_1 = \mathbb{A}^n$ a nech $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$ sú ľubovoľné body v $\mathbb{A}_2$. Potom existuje jediné afinné zobrazenie $f\colon \mathbb{A}_1 \to \mathbb{A}_2$ také, že $f(E_i) = Q_i$ pre $i = 0, \ldots, n$.*

Dôkaz. Pre zobrazenie $f\colon \mathbb{A}_1 \to \mathbb{A}_2$ musí platiť

(1) $f(E_0) = Q_0$,
(2) $Df(P_i - P_0) = Q_i - Q_0$ pre $i = 1, \ldots, n$

Z lineárnej algebry vieme, že existuje práve jedno lineárne zobrazenie $g\colon V(\mathbb{A}_1) \to V(\mathbb{A}_2)$ spĺňajúce druhú podmienku, a z práve dokázanej vety potom máme, že existuje jediné zobrazenie f spĺňajúce dané podmienky. □

Z tohto dôsledku napríklad vidíme, že afinné zobrazenie roviny je jednoznačne určené obrazmi troch nekolineárnych bodov.

Tvrdenie 2.9. *Nech $f\colon \mathbb{A}_1 \to \mathbb{A}_2$ je afinné zobrazenie, nech $P_0, \ldots P_r \in \mathbb{A}_1$ sú body a nech $\lambda_0 \ldots, \lambda_r \in k$ tak, že $\sum_{i=0}^r \lambda_i = 1$. Potom*

$$f\left(\sum_{i=0}^r \lambda_i P_i\right) = \sum_{i=0}^r \lambda_i f(P_i). \tag{1}$$

Dôkaz.

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=0}^{r}\lambda_i P_i\right) &= f\left(P_0+\sum_{i=1}^{r}\lambda_i(P_i-P_0)\right)\\ &= f(P_0)+Df\left(\sum_{i=1}^{r}\lambda_i(P_i-P_0)\right)\\ &= f(P_0)+\sum_{i=1}^{r}\lambda_i Df(P_i-P_0)\\ &= f(P_0)+\sum_{i=1}^{r}\lambda_i(f(P_i)-f(P_0))\\ &= \sum_{i=0}^{r}\lambda_i f(P_i), \end{aligned}$$

kde druhá a štvrtá rovnosť vyplývajú z definície afinného zobrazenia a tretia rovnosť z lineárnosti zobrazenia Df. □

DÔSLEDOK. *Kolineárne body sa afinným zobrazením zobrazia na kolineárne body. Teda obrazom priamky v afinnom zobrazení je priamka alebo bod.*

Dôkaz. P_1, P_2, P_3 - kolineárne. Ak $P_1 = P_2 = P_3$, triv. Inak nech $P_1 \neq P_2$. Potom $P_3 = (1-\lambda)P_1 + \lambda P_2$, teda $f(P_3) = (1-\lambda)f(P_1) + \lambda f(P_2)$, teda $f(P_1), f(P_2), f(P_3)$ sú kolineárne. □

TVRDENIE 2.10. *Nech zobrazenie $f\colon \mathbb{A}_1(k) \to \mathbb{A}_2(k)$ zachováva afinné kombinácie bodov, t.j. nech pre ľubovoľné $P_0, \dots P_r \in \mathbb{A}_1$ a $\lambda_0 \dots, \lambda_r \in k$ také, že $\sum_{i=0}^{r} \lambda_i = 1$, platí (1). Potom je f afinné zobrazenie.*

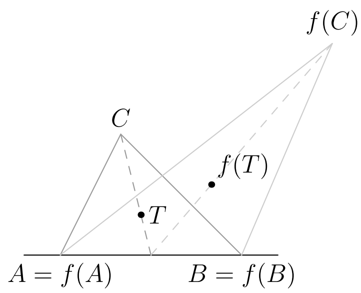
Dôkaz. dú □

DÔSLEDOK. *Zobrazenie $f\colon \mathbb{A}_1 \to \mathbb{A}_2$ je afinné práve vtedy, keď zachováva afinné kombinácie bodov.*

Vlastnosť, že afinné zobrazenie zachováva afinné kombinácie bodov, sa niekedy používa aj na definovanie afinného zobrazenia. Čiže to, čo sme si práve formulovali ako dôsledok nejakých tvrdení, je možné napísať aj pod hlavičkou „definícia". Vtedy zas naopak vlastnosti, ktoré sme my použili na definovanie afinného zobrazenia (t.j. že na vektorovej zložke priestoru indukuje dobre definované lineárne zobrazenie) treba dokázať.

PRÍKLAD 2.11.

Nech afinné zobrazenie $\mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ zobrazí dva rôzne body A, B na seba, t.j. $f(A) = A$, $f(B) = B$ (ide o tzv. **pevné** body). Bod $C \notin \overleftrightarrow{AB}$ sa zobrazí na $f(C)$. Potom podľa Tvrdenia 2.9 sa napr. ťažisko $\triangle ABC$ zobrazí na ťažisko $\triangle f(A)f(B)f(C) = \triangle ABf(C)$. Overíme ešte, že všetky body na priamke $\overleftrightarrow{AB}$ sú pevné.



Nech $X \in \overleftrightarrow{AB}$, teda $X = (1-\lambda)A + \lambda B$. Potom

$$f(X) = f((1-\lambda)A + \lambda B) = (1-\lambda)f(A) + \lambda f(B) = (1-\lambda)A + \lambda B = X.$$

Poučenie z príkladu: nové pojmy:

DEFINÍCIA 2.12. Ak $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ je afinné zobrazenie priestoru $\mathbb{A}$ do seba, potom f nazývame aj **afinnou transformáciou**. Bijektívna afinná transformácia priestoru $\mathbb{A}$ sa nazýva tiež **afinitou** priestoru $\mathbb{A}$.

Nech f je afinná transformácia $\mathbb{A}$ a nech $P \in \mathbb{A}$. Ak $f(A) = A$, potom A nazývame **pevným (samodružným, invariantným)** bodom zobrazenia f.

PRÍKLAD 2.13. Premietanie na x-os, posunutie aj stredová súmernosť sú afinnými transformáciami $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$. Z nich posunutie a stredová súmernosť sú aj afinitami.

A ešte už dokázané (v Príklade 2.11)

TVRDENIE 2.14. *Nech f je afinná transformácia a nech A, B $(A \neq B)$ sú jej pevné body. Potom všetky body na priamke $\overleftrightarrow{AB}$ sú pevné.*

TVRDENIE 2.15. *Afinné zobrazenie $f\colon \mathbb{A}_1 \to \mathbb{A}_2$ je injektívne (surjektívne) práve vtedy, keď $Df\colon V(\mathbb{A}_1) \to V(\mathbb{A}_2)$ je injektívne (surjektívne).*

Dôkaz. Surjektívnosť: Nech Df je surjektívne a nech $Y \in \mathbb{A}_2$ je ľubovoľný bod. Nech ďalej A je ľubovoľný bod v $\mathbb{A}_1$. Označme $\mathbf{v} := Y - f(A)$. Keďže je Df surjektívne, má vektor $\mathbf{v}$ v zobrazení Df svoj vzor: $\mathbf{v} = Df(\mathbf{u})$. Potom

$$f(A + \mathbf{u}) = f(A) + Df(\mathbf{u}) = f(A) + \mathbf{v} = Y,$$

čiže bod Y má vzor $A + \mathbf{u}$.

Nech teraz naopak je zobrazenie f surjektívne a nech $\mathbf{v} \in V(\mathbb{A}_2)$, nájdeme vzor $\mathbf{v}$ v zobrazení Df. Uvažujme ľubovoľné umiestnenie $\mathbf{v} = Y - X$. Keďže f je surjektívne, existujú body $A, B \in \mathbb{A}_1$ také, že $f(A) = X$ a $f(B) = Y$. Potom $Df(B - A) = \mathbf{v}$, t.j. $B - A$ je vzorom $\mathbf{v}$.

Injektívnosť: dú. □

TVRDENIE 2.16. *Nech $f_1\colon \mathbb{A}_1 \to \mathbb{A}_2$ a $f_2\colon \mathbb{A}_2 \to \mathbb{A}_3$ sú afinné zobrazenia. Potom aj zložené zobrazenie $f_2 \circ f_1\colon \mathbb{A}_1 \to \mathbb{A}_3$ je afinné a pre jeho vektorovú zložku platí $D(f_2 \circ f_1) = Df_2 \circ Df_1$.*

Ak $f\colon \mathbb{A}_1 \to \mathbb{A}_2$ je bijektívne afinné zobrazenie, potom aj $f^{-1}\colon \mathbb{A}_2 \to \mathbb{A}_1$ je afinné zobrazenie a $D(f^{-1}) = (Df)^{-1}$

Dôkaz. Vynechaný, je to únavné mechanické prepisovanie. □

DÔSLEDOK. *Afinity priestoru $\mathbb{A}^n$ tvoria grupu.*

2. Súradnicové (analytické) vyjadrenie afinného zobrazenia

Popis lineárneho zobrazenia vektorových priestorov maticou má analógiu v afiných zobrazeniach.

Majme v $\mathbb{A}^m$ resp. v $\mathbb{A}^n$ zvolený súradnicový systém $(O_1, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m)$ resp. $(O_2, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$.

Nech $f\colon \mathbb{A}^m \to \mathbb{A}^n$ je afinné zobrazenie, ktoré je popísané obrazom bodu O_1 a vektorovou zložkou Df (t.j. obrazmi bázových vektorov $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$):

$$\begin{aligned}
f(O_1) &= (a_{10}, \dots, a_{n0}) \quad (= O_2 + a_{10}\mathbf{f}_1 + \dots + a_{n0}\mathbf{f}_n) \\
Df(\mathbf{e}_1) &= (a_{11}, \dots, a_{n1}) \quad (= a_{11}\mathbf{f}_1 + \dots + a_{n1}\mathbf{f}_n) \\
&\dots \\
Df(\mathbf{e}_m) &= (a_{1m}, \dots, a_{nm}) \quad (= a_{1m}\mathbf{f}_1 + \dots + a_{nm}\mathbf{f}_n)
\end{aligned}$$

Potom pre každý bod $P = (p_1, \dots, p_m) = O_1 + p_1\mathbf{e}_1 + \dots + p_m\mathbf{e}_m \in \mathbb{A}^m$ platí

$$f(P) = f(O_1) + p_1 Df(\mathbf{e}_1) + \dots + p_m Df(\mathbf{e}_m).$$

Označme $f(P) = Q = (q_1, \ldots, q_n)$. Toto všetko môžme zapísať maticovo

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \ldots \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \ldots \\ p_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ \ldots \\ a_{n0} \end{pmatrix},$$

skrátene

$$\mathbf{Q} = \mathbf{AP} + \mathbf{A}_0.$$

Ak uvažujeme rozšírené súradnice (t.j. $f(O_1) = (a_{10}, \ldots, a_{n0}, 1)$, $Df(\mathbf{e}_i) = (0, a_{1i}, \ldots, a_{ni})$), máme zápis

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \ldots \\ q_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} & a_{20} \\ \ldots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} & a_{n0} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \ldots \\ p_m \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

skátene

$$\widetilde{\mathbf{Q}} = \widetilde{\mathbf{A}}\widetilde{\mathbf{P}}.$$

Príklad 2.17. Preferujeme matice v rozšírených súradniciach oproti bežným afinným, lebo tak sa ľahko zobrazenia skladajú: skladanie zobrazení zodpovedá násobeniu matíc.

Nech $t_{\mathbf{u}}$ resp. $t_{\mathbf{v}}$ je posunutie v $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ pozdĺž vektora $\mathbf{u}$ resp. $\mathbf{v}$.

Ak $\mathbf{u}$ má súradnice (u_1, u_2) a $\mathbf{v}$ má súradnice (v_1, v_2), potom maticu zloženého zobrazenia $t_{\mathbf{v}} \circ t_{\mathbf{u}}$ nájdeme ako súčin matíc pre $t_{\mathbf{v}}$ a $t_{\mathbf{u}}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_1 \\ 0 & 1 & u_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_1 + v_1 \\ 0 & 1 & u_2 + v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že ide o posunutie pozdĺž vektora $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, ako sme aj očakávali:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & u_1 + v_1 \\ 0 & 1 & u_2 + v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + u_1 + v_1 \\ x_2 + u_2 + v_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

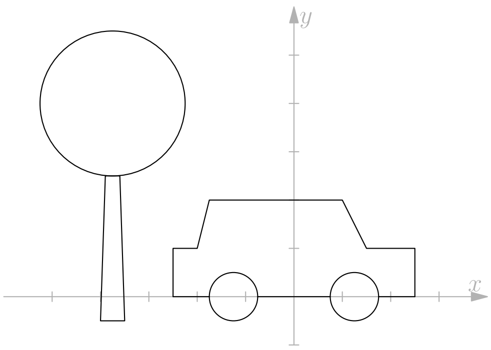
Príklad 2.18. Súvis medzi skladaním afinných zobrazení a násobením matíc býva užitočný pri hľadaní predpisu pre komplikovanejšie zobrazenia. Predpis pre stredovú súmernosť podľa $S = (s_1, s_2)$ vieme tak nájsť pomocou matíc pre posunutie a súmernosť podľa $(0, 0)$: najprv urobíme posunutie o $(-s_1, -s_2)$, potom stredovú súmernosť podľa $(0, 0)$ a nakoniec posunutie o (s_1, s_2). Výslednú maticu dostaneme ako súčin jednotlivých matíc:

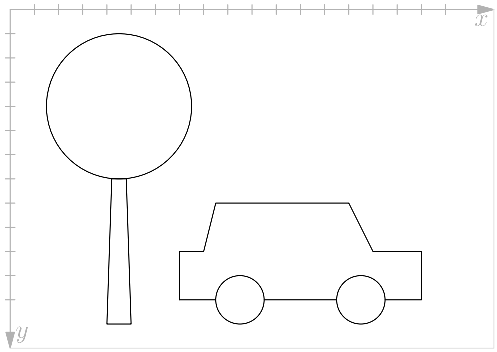
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & s_1 \\ 0 & 1 & s_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -s_1 \\ 0 & 1 & -s_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2s_1 \\ 0 & -1 & 2s_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Zmena súradnicovej sústavy

Príklad 2.19. Namodelovali sme si scénu (napríklad pomocou lomených čiar a kružníc) v súradnicovej sústave, v ktorej sa nám pohodlne pracovalo (obrázok vľavo).

Ak ju chceme zobraziť na obrazovku, potrebujeme všetky súradnice (vrcholy lomených čiar, stredy kružníc) prepočítať: vyjadriť ich v súradnicovej sústave obrazovky (obrázok vpravo). V tejto podkapitolke si predvedieme, ako sa s takýmto problémom čo najefektívnejšie vysporiadať.





V $\mathbb{A}^n$ uvažujme dve afinné súradnicové sústavy:
$E = (O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$: „stará” sústava
$E' = (O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_n)$: „nová” sústava

Vyjadrime „nový” začiatok sústavy a „nové” bázové vektory pomocou „starých”:

$$\begin{aligned} O' &= O + t_{01}\mathbf{e}_1 + t_{02}\mathbf{e}_2 + \cdots + t_{0n}\mathbf{e}_n \\ \mathbf{e}'_1 &= t_{11}\mathbf{e}_1 + t_{12}\mathbf{e}_2 + \cdots + t_{1n}\mathbf{e}_n \\ \mathbf{e}'_2 &= t_{21}\mathbf{e}_1 + t_{22}\mathbf{e}_2 + \cdots + t_{2n}\mathbf{e}_n \\ \dots \\ \mathbf{e}'_n &= t_{n1}\mathbf{e}_1 + t_{n2}\mathbf{e}_2 + \cdots + t_{nn}\mathbf{e}_n, \end{aligned}$$

čo môžme prehľadne zapísať pomocou matíc

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 & \dots & \mathbf{e}'_n & O' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \dots & \mathbf{e}_n & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11} & t_{21} & \dots & t_{n1} & t_{01} \\ t_{12} & t_{22} & \dots & t_{n2} & t_{02} \\ \dots & & & & \\ t_{1n} & t_{2n} & \dots & t_{nn} & t_{0n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

skátene

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}\mathbf{T}.$$

Matica $\mathbf{T}$ sa nazýva **maticou prechodu** od súradnicovej sústavy $E = (O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ k súradnicovej sústave $E' = (O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_n)$. Niekedy sa pre spresnenie označuje aj ako $\mathbf{T}(E, E')$.

TVRDENIE 2.20. *Matica prechodu od jednej sústavy k druhej je regulárna.*

Dôkaz. $\mathbf{T}$ je tvaru

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_{11} & \mathbf{t}_0 \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{t}_0 = \begin{pmatrix} t_{01} & t_{02} & \dots & t_{0n} \end{pmatrix}^T$ a $\mathbf{T}_{11}$ je matica typu $n \times n$. Pre determinant matice $\mathbf{T}$ teda platí $|\mathbf{T}| = |\mathbf{T}_{11}|$, čiže $\mathbf{T}$ je regulárna práve vtedy, keď $\mathbf{T}_{11}$ je regulárna. Všimnime si, že i-ty stĺpec matice $\mathbf{T}_{11}$ obsahuje súradnice vektora $\mathbf{e}'_i$ v báze $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$. Ak by stĺpce matice $\mathbf{T}_{11}$ boli lineárne závislé, teda existovali by $c_1, c_2, \dots, c_n \in k$ $((c_1, \dots, c_n) \neq (0, 0, \dots, 0))$ také, že

$$c_1\mathbf{e}'_1 + c_2\mathbf{e}'_2 + \cdots + c_n\mathbf{e}'_n = \mathbf{0},$$

potom by vektory $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_n$ netvorili bázu $V(\mathbb{A}^n)$. Matica $\mathbf{T}_{11}$ je teda regulárna, čiže aj matica $\mathbf{T}$ je regulárna. □

Maticu $\mathbf{T}$ je možné využiť na prepočítanie súradníc bodov z jednej sústavy do druhej:

Nech $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ v „novej” sústave, t.j.

$$P = O' + p'_1\mathbf{e}'_1 + p'_2\mathbf{e}'_2 + \cdots + p'_n\mathbf{e}'_n.$$

Potom

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 & \dots & \mathbf{e}'_n & O' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ \dots \\ p'_n \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}'\widetilde{\mathbf{P}}' = \mathbf{E}\mathbf{T}\widetilde{\mathbf{P}}',$$

teda

$$\widetilde{\mathbf{P}} = \mathbf{T}\widetilde{\mathbf{P}}' \tag{3}$$

je stĺpcová matica obsahujúca rozšírené súradnice bodu P vzhľadom na „starú" bázu. Pre prepočet „starých" súradníc na „nové" teda použijeme inverznú maticu (prenásobíme rovnosť (3) zľava maticou $\mathbf{T}^{-1}$):

$$\widetilde{\mathbf{P}}' = \mathbf{T}^{-1}\widetilde{\mathbf{P}}.$$

PRÍKLAD 2.21. S použitím matice prechodu vypočítame súradnice bodu $A = (2, 1)$ v súradnicovej sústave $(O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$, kde

$$O' = (2, 3),\ \mathbf{e}'_1 = (0, -1),\ \mathbf{e}'_2 = (1, 1).$$

Matica prechodu k súradnicovej sústave $(O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$ je

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Každý svojou obľúbenou metódou vypočíta maticu k nej inverznú:

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A potom (rozšírené) súradnice bodu A v novej súradnicovej sústave (t.j. vzhľadom na $(O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$) sú

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Teda $A = O' + 2.\mathbf{e}'_1 + 0.\mathbf{e}'_2 = (2, 0)_{(O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)}$.

Prirodzene, metóda ilustrovaná týmto príkladom je naozaj dosť „overkill", pokiaľ chceme získať súradnice jedného bodu v novej sústave. Avšak stáva sa veľmi užitočnou, ak potrebujeme napríklad prepočítať komplexnejšiu scénu.

POZNÁMKA 2.22. V rôznej literatúre sa môžete stretnúť s rôznymi maticami prechodu. Niekedy sa ňou nazýva matica transponovaná k našej, niekedy dokonca inverzná.

POZNÁMKA 2.23. Všimnime si, že súradnicová sústava a súradnice bodu sú navzájom duálne pojmy: matica $\mathbf{T}$ popisuje „novú" súradnicovú sústavu pomocou „starej", ale „nové" súradnice bodu sa zo „starých" počítajú pomocou $\mathbf{T}^{-1}$.

POZNÁMKA 2.24. A na záver si uvedomme, že zmena súradnicovej sústavy v $\mathbb{A}^n$ zodpovedá afinite priestoru $\mathbb{A}^n$ a naopak.

4. Orientácia afinného priestoru

V tejto časti budeme uvažovať afinný priestor nad reálnymi číslami.

V praxi sa pri dvoj- a trojrozmernom reálnom priestore stretávame s pojmom „pravotočivá" alebo „ľavotočivá" súradnicová sústava, prípadne tiež „kladne" alebo „záporne orientovaná" súradnicová sústava: napríklad v dvojrozmernom priestore sa za kladne orientovanú súradnicovú sústavu považuje taká sústava $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, že body $O, E_1 = O + \mathbf{e}_1, E_2 = O + \mathbf{e}_2$ sú v tomto poradí usporiadané proti smeru hodinových ručičiek. Cieľom tejto časti je popísať tento jav matematicky.

Príklad 2.25. Majme v $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ novú súradnicovú sústavu:

$$O' = O,\ \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2 = t_{21}\mathbf{e}_1 + t_{22}\mathbf{e}_2,$$

čiže matica prechodu k novej súradnicovej sústave je

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & t_{21} & 0 \\ 0 & t_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Predpokladajme, že pôvodná súradnicová sústava je kladne orientovaná (t.j. proti smeru hodinových ručičiek). Pre aké hodnoty t_{21} a t_{22} bude aj nová súradnicová sústava kladne orientovaná?

Príklad 2.26. Nech $E_e = (O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ je štandardná afinná súradnicová sústava $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$. Majme ďalšie sústavy $E_f = (O, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ a $E_g = (O, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2)$, kde

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{f}_2 = -\mathbf{e}_1$$
$$\mathbf{g}_1 = -\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{g}_2 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2.$$

Sledujme determinanty matíc prechodu medzi jednotlivými súradnicovými sústavami.

Veta 2.27. *V afinnom priestore $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ $(n \geq 2)$ uvažujme nasledovnú reláciu na množine všetkých súradnicových sústav: Pre $E = (O, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ a $E' = (O', \mathbf{e}_1', \dots, \mathbf{e}_n')$ nech*

$$E \sim E' \text{ práve vtedy, keď } |\mathbf{T}(E, E')| > 0.$$

Takto definovaná relácia $\sim$ je reláciou ekvivalencie a určuje rozklad množiny všetkých súradnicových sústav na dve triedy.

Dôkaz. Reflexívnosť: $|\mathbf{T}(E, E)| = |\mathbf{I}_{n+1}| = 1$ ($\mathbf{I}_{n+1}$ je jednotková matica stupňa $n+1$), preto $E \sim E$.

Symetrickosť: nech $E_1 \sim E_2$, teda $|\mathbf{T}(E_1, E_2)| > 0$. Platí, že $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_1\mathbf{T}(E_1, E_2)$, po vynásobení inveznou maticou k $\mathbf{T}(E_1, E_2)$ máme, že $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2\mathbf{T}(E_1, E_2)^{-1}$. Vidíme, že $\mathbf{T}(E_2, E_1) = \mathbf{T}(E_1, E_2)^{-1}$. Preto $|\mathbf{T}(E_2, E_1)| = |\mathbf{T}(E_1, E_2)^{-1}| = 1/|\mathbf{T}(E_1, E_2)| > 0$, čiže $E_2 \sim E_1$.

Tranzitívnosť: kľúčom k dôkazu je pozorovanie: ak $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_1\mathbf{T}(E_1, E_2)$ a $\mathbf{E}_3 = \mathbf{E}_2\mathbf{T}(E_2, E_3)$, potom $\mathbf{E}_3 = \mathbf{E}_1\mathbf{T}(E_1, E_2)\mathbf{T}(E_2, E_3)$, teda $\mathbf{T}(E_1, E_3) = \mathbf{T}(E_1, E_2)\mathbf{T}(E_2, E_3)$. Nech teraz $E_1 \sim E_2$ a $E_2 \sim E_3$, čiže $|\mathbf{T}(E_1, E_2)| > 0$ a $|\mathbf{T}(E_2, E_3)| > 0$, odkiaľ potom $|\mathbf{T}(E_1, E_3)| > 0$, čiže $E_1 \sim E_3$.

Rozklad na dve triedy: zrejme existujú aspoň dve triedy rozkladu: pre danú súradnicovú sústavu E určite existuje sústava E' taká, že $\mathbf{T}(E, E') < 0$ (viete nájsť takú sústavu E'?). Teda existujú aspoň dve triedy rozkladu. Nech teraz $E_1 \not\sim E_2$ a $E_2 \not\sim E_3$, čiže $|\mathbf{T}(E_1, E_2)| < 0$ a $|\mathbf{T}(E_2, E_3)| < 0$. Potom $|\mathbf{T}(E_1, E_3)| = |\mathbf{T}(E_1, E_2)||\mathbf{T}(E_2, E_1)| > 0$, teda $E_1 \sim E_3$. Vidíme tak, že existujú len dve triedy ekvivalencie. □

Definícia 2.28. Nech E_1, E_2 sú súradnicové sústavy v $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$. Hovoríme, že sústavy E_1, E_2 sú **súhlasne orientované**, ak $E_1 \sim E_2$ (v zmysle predchádzajúcej vety). V opačnom prípade sú sústavy E_1, E_2 **nesúhlasne orientované**.

V danom reálnom afinnom priestore potom jednu dvoch tried ekvivalencie súradnicových sústav prehlásime za **kladnú**, a všetky sústavy v tejto triede budú **kladne orientované**. Druhá trieda bude **záporná** a bude pozostávať zo **záporne orientovaných** súradnicových sústav.

Orientovaný afinný priestor je afinný priestor spolu so zvolenou orietnáciou, t.j. dvojica $(\mathbb{A}, [E])$, kde $[E]$ označuje triedu ekvivalencie súradnicovej sústavy E.

V orientovanej rovine môžme potom hovoriť aj o orientácii trojuholníka: nekolineárne body A, B, C (v tomto poradí) určujú kladne orientovaný trojuholník $\triangle ABC$, ak je súradnicová sústava $(A, B - A, C - A)$ kladne orientovaná; v opačnom prípade ide o záporne orientovaný trojuholník. Podobne hovoríme v trojrozmernom orientovanom priestore o kladne alebo záporne orientovanom štvorstene, či v n-rozmernom orientovanom priestore o kladne alebo záporne orientovanom n-rozmernom simplexe.

PRÍKLAD 2.29. Nech $E_e = (O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ je štandardná súradnicová sústava (repér).

Nech $E_f = (O, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$, kde

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{f}_2 &= -\mathbf{e}_1. \end{aligned}$$

Platí, že $|T(E_e, E_f)| = -1 < 0$, teda tieto súradnicové sústavy sú nesúhlasne orientované: Ak E_e bola kladne orientovaná, E_f je záporne orientovaná.

Nech $E_g = (O, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2)$, kde

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= -\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{g}_2 &= -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

Znovu máme $|T(E_e, E_g)| = -1 < 0$, takže aj E_g je záporne orientovaná.

Ak si však zvolíme takú orientáciu priestoru, že E_f je kladne orientovaná, z determinantov matíc $T(E_f, E_e)$, $T(E_f, E_g)$ naozaj zistíme, že E_e je záporne a E_g kladne orientovaná, presne ako vidíme, keď si repéry zakreslíme do obrázka.