

1. RELÁCIA EKVIVALENCIE

Binárna relácia R na množine M je podmnožina kartézského súčinu $M \times M$ (t.j. $R \subset M \times M$). Ak $(a, b) \in R$, píšeme často tiež $a R b$.

Binárna relácia $\sim$ sa nazýva *ekvivalenciou* (tiež *reláciou ekvivalencie*), ak je

- reflexívna: $a \sim a$ pre všetky $a \in M$,
- symetrická: ak $a \sim b$, potom $b \sim a$ pre všetky $a, b \in M$,
- a tranzitívna: ak $a \sim b$ a $b \sim c$, potom $a \sim c$ pre všetky $a, b, c \in M$.

Ak je na množine M definovaná relácia ekvivalencie $\sim$, potom pre ľubovoľné $a \in M$ budeme označovať

$$[a] = \{b \in M \mid a \sim b\}$$

a nazývať túto množinu *triedou ekvivalencie*.

1. Ktorú z troch vlastností „reflexívnosť“, „symetria“ a „tranzitívnosť“ majú nasledovné relácie medzi celými číslami:

- (a) $a \geq b$.
- (b) $a > b$,
- (c) $a \mid b$.
- (d) $a^2 + a = b^2 + b$.
- (e) $a < |b|$.

2. To isté zadanie ako v predchádzajúcej úlohe pre relácie na množine všetkých ľudí:

- (a) „Je otcom”,
- (b) „je bratom”,
- (c) „je strýkom”,
- (d) „je potomkom”.

* 3. Hovoríme, že relácia R je *cyklická*, ak $a R b$ a $b R c$ implikuje $c R a$. Ukážte, že relácia je reflexívna a cyklická práve vtedy, keď je reflexívna, symetrická a tranzitívna.

* 4. Kde je chyba v nasledujúcom „dôkaze“, že každá symetrická a tranzitívna relácia R je aj reflexívna?

„Podľa zákona symetrie $a R b$ implikuje $b R a$, a na základe tranzitívnosti $a R b, b R a$ implikuje $a R a$.”

5. Nech je na množine M definovaná relácia ekvivalencie $\sim$.

- (a) Ukážte, že ak $a \sim b$, potom $[a] = [b]$.
- (b) Ukážte, že ak $a \not\sim b$, potom $[a] \cap [b] = \emptyset$.

Čiže triedy ekvivalencie sú rozkladom množiny M na disjunktné podmnožiny.

6. Nech $M = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} M_\alpha$ je rozklad množiny M na disjunktné podmnožiny, t.j. každý prvok množinu M patrí práve jednej z množín M_α . Overte, že relácia $\sim$ definovaná nasledovne:

$$a \sim b \quad \text{práve vtedy, keď} \quad a, b \in M_\alpha \text{ pre nejaké } \alpha \in \mathcal{A}$$

je reláciou ekvivalencie.

7. Nech $\sim$ je relácia na množine úsečiek v $\mathbb{R}^2$ definovaná

$$AB \sim CD \quad \text{práve vtedy, keď} \quad |AB| = |CD|.$$

Je táto relácia reláciou ekvivalencie?

8. Na množine $\mathbb{R}^2$ (body reálnej roviny) zavedme reláciu $\sim$ nasledovne:

$$(a_1, a_2) \sim (b_1, b_2) \quad \text{práve vtedy, keď} \quad a_1 - b_1 = 0.$$

Je táto relácia reláciou ekvivalencie? Ak áno, čo sú triedy ekvivalencie?

9. Na množine $\mathbb{R}^2$ (body reálnej roviny) zaveďme reláciu $\sim$ nasledovne:

$$(a_1, a_2) \sim (b_1, b_2) \quad \text{práve vtedy, keď} \quad a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0.$$

Je táto relácia reláciou ekvivalencie? Ak áno, čo sú triedy ekvivalencie?

10. Ukážte, že relácia $\sim$ na množine orientovaných úsečiek definovaná

$$AB \sim CD \quad \text{práve vtedy, keď} \quad \mathcal{S}(A, D) = \mathcal{S}(C, B)$$

je reláciou ekvivalencie.

11. Na množine $\mathbb{Z}$ celých čísel uvažujme nasledovnú reláciu:

$$a \sim b \quad \text{práve vtedy, keď} \quad 3|(b - a).$$

Je takto definovaná relácia ekvivalenciou? Svoje tvrdenie zdôvodnite. Ak ide o ekvivalenciu, čo sú triedy ekvivalencie?

12. Na množine $\mathbb{R}^2$ (body reálnej roviny) zaveďme reláciu $\sim$ nasledovne:

$$(a_1, a_2) \sim (b_1, b_2) \quad \text{práve vtedy, keď} \quad a_1^2 + a_2^2 = b_1^2 + b_2^2.$$

Je táto relácia reláciou ekvivalencie? Ak áno, čo sú triedy ekvivalencie?

13. Na množine $\mathbb{R}$ reálnych čísel zaveďme reláciu $\sim$ nasledovne:

$$a \sim b \quad \text{práve vtedy, keď} \quad |a - b| < 1.$$

Je táto relácia reláciou ekvivalencie? Ak áno, čo sú triedy ekvivalencie?

*** 14.** Na množine $\mathbb{Z}$ celých čísel zaveďme reláciu $\sim$ nasledovne: pre $x, y \in \mathbb{Z}$ bude $x \sim y$ práve vtedy, keď $7|(x^3 - y^3)$. Ukážte, že $\sim$ je reláciou ekvivalencie. Aký rozklad množiny $\mathbb{Z}$ predstavuje?

2. BODY A VEKTORY V EUKLIDOVSKÉJ ROVINE

15. Daný je rovnobežník $ABCD$. Vyjadrite vektor $M - A$ ako lineárnu kombináciu vektorov $\mathbf{u} = B - A$ a $\mathbf{v} = D - A$, ak

- (a) $M = B$,
- (b) $M = C$,
- (c) M je priesečník uhlopriečok rovnobežníka,
- (d) M je stred strany AD ,
- (e) M je stred strany CD ,
- (f) M rozdeľuje stranu BC v pomere 2:1.

16. Daný je rovnobežník $ABCD$. Vyjadrite vektor

- (a) $S - B$, kde S je stred CD ,
- (b) $T - C$, kde T je stred AB ,

ako lineárnu kombináciu vektorov $\mathbf{u} = B - A$ a $\mathbf{v} = D - A$.

17. Daný je pravidelný šesťuholník $ABCDEF$. Vyjadrite zadané vektory ako lineárne kombinácie vektorov $\mathbf{u} = B - A$, $\mathbf{v} = F - A$.

- (a) $C - B$, (c) $E - F$, (e) $E - B$, (g) $D - F$.
- (b) $D - C$, (d) $E - D$, (f) $E - C$,

18. V pravidelnom šesťuholníku $ABCDEF$ vyjadrite pomocou bodu A a vektorov $\mathbf{e}_1 = B - A$, $\mathbf{e}_2 = C - B$ všetky vrcholy šesťuholníka.

19. Nech S je priesečník uhlopriečok štvorca $ABCD$. Vyjadrite vrcholy a stredy strán štvorca ako kombinácie bodu S a vektorov $A - S$ a $B - S$.

3. OPAKOVANIE ANALYTICKEJ GEOMETRIE

20. Úlohou je nájsť ťažisko trojuholníka v rovine.

- Ťažnica je úsečka spájajúca vrchol trojuholníka a stred protilahlej strany.
- Vieme, že ťažnice trojuholníka sa pretínajú v jedinom bode, ktorý nazývame ťažiskom.
- Vieme, že ťažisko delí ťažnicu v pomere 1 : 2.

Nájdite ťažisko (čiže uveďte jeho súradnice)

- (i) v trojuholníku ABC , kde $A = (-2, -2)$, $B = (4, 0)$, $C = (-5, 2)$,
- (ii) v trojuholníku ABC , kde $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$.

(Dôležité je zadanie (b). Zadanie (a) je len pomôcka na „ohmatanie si“ problému, riešiť ho nemusíte, ak si trúfate rovno odvodiť vzorec v (b).)

21. Určte vrcholy trojuholníka ABC , ak body $D = (1, 2)$, $E = (3, 4)$, $F = (5, -1)$ sú stredy jeho strán BC , CA , AB .

22. Dané sú vrcholy $A = (1, 3, 5)$, $B = (-1, 2, 1)$ trojuholníka ABC a jeho ťažisko $T = (1, 0, 1)$. Nájdite vrchol C .

23. Dané sú vrcholy $A = (1, 3, 5)$, $B = (-1, 2, 1)$ rovnobežníka $ABCD$ a priesečník jeho uhlopriečok $S = (1, 0, 1)$. Nájdite súradnice bodov C, D .

4. NIEKTORÉ ZOBRAZENIA ROVINY

24. Nájdite obraz bodu A v súmernosti podľa S

- (i) keď $S = (0, 0)$, $A = (a_1, a_2)$,
- (ii) keď $S = (s_1, s_2)$, $A = (a_1, a_2)$ (môžte si pomôcť predpisom pre stred úsečky, viď úloha 105)

25. Analyticky (t.j. pomocou súradníc) ukážte, že zložením dvoch stredových súmerností je posunutie. (Využijete zrejme príklad 24.)

26. Ukážte, že každé posunutie sa dá napísať ako zloženie dvoch stredových súmerností. Presnejšie, pre ľubovoľný vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ nájdite body S_1 a S_2 tak, že $t = f_2 \circ f_1$, kde f_1 je stredová súmernosť so stredom S_1 , f_2 je stredová súmernosť so stredom S_2 a t je posunutie v smere vektora $\mathbf{u}$. (Pozor, body S_1, S_2 nie sú určené jednoznačne.)

27. Popíšte pomocou súradníc osovú súmernosť v prípade, že os súmernosti je rovnobežná s niektorou súradnicovou osou.

5. BODOVO-VEKTOROVÝ KALKULUS

28. Nech $A = (1, 3)$, $B = (-1, 5)$, $\mathbf{u} = (2, -5)$, $\mathbf{v} = (3, 1)$. Rozhodnite, či napísaný objekt je bod alebo vektor, a aj je, určte jeho súradnice:

- (a) $\frac{1}{2}(B - A) - \mathbf{v}$,
- (b) $(B + \mathbf{v}) - (A + \mathbf{u})$,
- (c) $(B - A) + (\mathbf{v} - \mathbf{u})$,

(d) $A + \mathbf{u} - \mathbf{v}$.

29. Dané sú body A, B, C, D . Nech $M = \mathcal{S}(A, B)$ a $N = \mathcal{S}(C, D)$. Vyjadrite vektor $N - M$ ako lineárnu kombináciu vektorov $D - A$ a $C - B$.

30. Vyjadrite daný bod alebo vektor ako afinnú kombináciu bodov:

- (a) $A + 2(B - A) + 3(A - C)$,
- (b) $(A + 2(B - A)) - (B + 2(C - A))$.

31. Vyjadrite body P_i ako afinné kombinácie bodov $A = (2, 1), B = (-1, 2)$:

- (a) $P_1 = (8, -1)$,
- (b) $P_2 = (-7, 4)$,
- (c) $P_3 = (4, 7)$.

Body načrtnite. Vyslovte hypotézu o riešiteľnosti úlohy.

32. Nech $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{A}$, nech $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in k$. Dokážte, že ak $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$ ($\lambda \in k$), potom pre ľubovoľné body A, B platí

$$\lambda_1(P_1 - A) + \dots + \lambda_n(P_n - A) = \lambda_1(P_1 - B) + \dots + \lambda_n(P_n - B).$$

(Ide o dôkaz korektnosti definície afinnej kombinácie bodov v prípade, že súčet koeficientov je 0.)

33. Nech $\mathcal{S}(A, B) = A + \frac{1}{2}(B - A) = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ je stred úsečky AB . Dokážte, že pre všetky body A, B, C, D platí

$$B - A = D - C \text{ práve vtedy, keď } \mathcal{S}(A, D) = \mathcal{S}(B, C).$$

34. Body D, E sú stredy strán BC, CA trojuholníka ABC . Dokážte, že $D - E = \frac{1}{2}(B - A)$.

35. Body E, F nech sú v tomto poradí stredmi základní AB, CD lichobežníka $ABCD$. Vyjadrite vektor $F - E$ ako lineárnu kombináciu vektorov $\mathbf{a} = B - A$ a $\mathbf{b} = D - A$.

36. Dané sú body A, B, C, D . Bod M je stredom AB a bod N stredom CD . Vyjadrite vektor $N - M$ ako lineárnu kombináciu vektorov $D - A$ a $C - B$.

37. Nech $M = A + k(B - A)$, $N = D + k(C - D)$, $k \in \mathbb{R}$.

- (a) Vyjadrite vektor $N - M$ ako lineárnu kombináciu vektorov $D - A$ a $C - B$.
- (b) Dokážte: ak body A, B, C, D neležia v rovine, tak priamka $\overleftrightarrow{MN}$ je rovnobežná s rovinou $\overleftrightarrow{ADE}$, kde $E = A + (C - B)$.

38. Pre bod M v rovine $\overleftrightarrow{ABC}$ platí $(A - M) + 2(B - M) + 3(C - M) = \mathbf{0}$.

- (a) Vyjadrite vektor $M - A$ ako lineárnu kombináciu vektorov $B - A$ a $C - A$.
- (b) Leží bod M v trojuholníku ABC ?

39. Na hranách štvorstena $ABCD$ nájdite všetky také body $K \in AB$, $L \in BC$, $M \in CD$, $N \in DA$, že $L - K = M - N$.

6. AFINNÁ SÚRADNICOVÁ SÚSTAVA

40. V rovine je daný trojuholník ABC a body $D = \mathcal{S}(B, C)$, $E = \mathcal{S}(A, C)$, $F = \mathcal{S}(A, B)$. Nájdite súradnice vrcholov trojuholníka v afinnej súradnicovej sústave $(F, E - F, D - F)$.

41. V trojrozmernom priestore je daný štvorsten $OABC$. Zdôvodnite, že

$$(O, A - O, B - O, C - O)$$

je afinná súradnicová sústava v tomto priestore, a zistite, aké súradnice majú ťažiská stenových trojuholníkov v tejto súradnicovej sústave.

42. V rovine je daný lichobežník $ABCD$, v ktorom platí $B - A = -\frac{5}{3}(D - C)$. V afinnej súradnicovej sústave $(A, C - A, D - B)$ nájdite súradnice vrcholov a stredov strán lichobežníka.

7. AFINNÉ ZOBRAZENIA

43. Uvažujme v reálnej rovine osovú súmernosť, ktorej os súmernosti je rovnobežná s niektorou súradnicovou osou (úloha 27). Ukážte, že toto zobrazenie $\mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ je afinné.

44. Nech $P \in \mathbb{E}^n$ je pevne zvolený bod. Zobrazenie $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ nech každému bodu $X \in \mathbb{E}^n$ priradí stred úsečky PX . Zobrazenie si načrtnite pre $n = 2$ (zakreslite obrazy niekoľkých bodov). Zistite, či je f afinné zobrazenie.

45. Nech $f: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ je zobrazenie, ktoré bodu A so súradnicami (a_1, a_2) priradí bod $A' = (a_1, a_1 a_2)$. Zobrazenie si načrtnite (zakreslite obrazy niekoľkých bodov). Zistite, či je f afinné zobrazenie.

46. Nech $P \in \mathbb{A}^n$ je pevne zvolený bod. Zobrazenie $f: \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$ nech každému bodu $X \in \mathbb{A}^n$ priradí bod P . Zistite, či je f afinné zobrazenie.

47. Afinné zobrazenie $f: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ zobrazuje body $(2, 1)$, $(3, 0)$, $(1, 4)$ do bodov $(1, 6)$, $(1, 9)$, $(3, 1)$ v tomto poradí. Kam sa zobrazí bod $(5, 7)$? Ktorý bod sa zobrazí sám na seba?

48. Nech $P \in \mathbb{E}^n$ je pevne zvolený bod. Zobrazenie $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ nech každému bodu $X \in \mathbb{E}^n$ priradí stred úsečky PX . Zobrazenie si načrtnite pre $n = 2$ (zakreslite obrazy niekoľkých bodov). Zistite, či je f afinné zobrazenie.

49. Dané je afinné zobrazenie

$$\begin{aligned} f: x' &= 2x + 3y + 5, \\ y' &= 4x - 3y - 2. \end{aligned}$$

Do akých bodov sa zobrazia body $(0, 0)$, $(5, 3)$, $(-1, 4)$? Čo je obrazom súradnicových osí?

50. Dané je afinné zobrazenie

$$\begin{aligned} f: x' &= 3x + y - 6, \\ y' &= x + y + 1. \end{aligned}$$

Ktoré body sa zobrazia do bodov $(9, 8)$ a $(-6, 1)$?

51. Dané je afinné zobrazenie $f: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$, $(x, y) \mapsto (x', y', z')$, kde

$$\begin{aligned} x' &= x - y + 1, \\ y' &= x + y, \\ z' &= y + 2. \end{aligned}$$

Určte obraz začiatku $\mathbb{E}^2$.

52. Nájdite afinné zobrazenie, ktoré

- (a) zobrazuje bod $(6, -2)$ na bod $(1, 1)$ a vektory $(2, 1)$, $(-1, 2)$ do vektorov $(4, 2)$ a $(-3, 6)$
 (b) zobrazuje každý z bodov $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 1, 0)$ na seba a $(0, 0, 1)$ na $(1, 1, 1)$.

53. Vrcholy štvorstena $ABCD$ sú v bodoch $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 0)$, $C = (0, 1, 0)$, $D = (0, 0, 1)$. Nájdite afinné zobrazenie, ktoré ponechá bod A na mieste a stredy hrán AB , AC , AD zobrazuje do stredov protilahlých hrán.

54. Dané je afinné zobrazenie $f: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x', y', z')$, kde

$$\begin{aligned} x' &= -2x - 2y + z + 1, \\ y' &= 2x + 3y - 3z, \\ z' &= y - z + 4. \end{aligned}$$

Zistite, či je f injektívne.

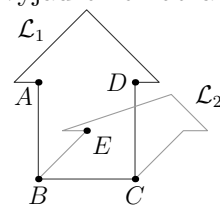
- 55.** (a) Vo vhodnej súradnicovej sústave napíšte analytické vyjadrenie (napr. maticou) afinného zobrazenia $f: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$, ktoré vrcholom trojuholníka ABC priradí stredy protilahlých strán.
 (b) V tej istej súradnicovej sústave napíšte vyjadrenie afinného zobrazenia g , ktoré zobrazuje body A, B, C v tomto poradí do bodov A, B, T , kde T je ťažisko $\triangle ABC$.
 (c) Určte analytické vyjadrenia zobrazení $f \circ g$, $g \circ f$, f^{-1} a g^{-1} .

56. Ukážte, že afinné zobrazenie $f: \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$ je injektívne práve vtedy, keď je asociované lineárne zobrazenie $Df: V(\mathbb{A}_1) \rightarrow V(\mathbb{A}_2)$ injektívne.

(Obe implikácie sa dobre ukazujú nepriamo: predpokladajte, že f nie je injektívne, a skúste nájsť nenulový vektor vo $V(\mathbb{A}_1)$, ktorý sa zobrazením Df zobrazí na nulový. Pre druhú implikáciu: ak Df nie je injektívne, skúste nájsť dva rôzne body v $\mathbb{A}_1$, ktoré majú v zobrazení f ten istý obraz.)

57. Vhodne si zvolte súradnicovú sústavu a nájdite analytické vyjadrenie zobrazenia, ktoré lomenú čiaru $\mathcal{L}_1$ zobrazí na lomenú čiaru $\mathcal{L}_2$ (viď obrázok: body A, B, C, D sú vrcholmi štvorca a bod E je jeho stredom, ide o uzavreté lomené čiary: úsečka BC je spoločná pre obe).

Koľko takých zobrazení existuje?



58. Zapište analyticky (napríklad maticou) otočenie v $\mathbb{E}^2$ okolo začiatku súradnicovej sústavy, ktoré bod so súradnicami $(5, 0)$ otočí do bodu so súradnicami $(4, 3)$ (teda body $(5, 0)$, $(0, 0)$ a $(4, 3)$ určujú uhol otočenia).

(Môžte predpokladať, že otočenie je afinné zobrazenie a pomôcť si dokázaným tvrdením, že afinné zobrazenie je dané obrazmi troch nekolineárnych bodov.)

59. Zapište analyticky otočenie v $\mathbb{E}^2$ o uhol φ okolo začiatku súradnicovej sústavy.

60. Zapište analyticky otočenie v $\mathbb{E}^2$ okolo bodu $S = (s_1, s_2)$. Uhol otočenia si zvolte podľa vlastných preferencií buď všeobecne φ (ako v úlohe 59) alebo konkrétne uhol z úlohy 58.

8. ZMENA SÚRADNICOVEJ SÚSTAVY

61. Vrcholy štvorstena $ABCD$ sú v bodoch $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 0)$, $C = (0, 1, 0)$, $D = (0, 0, 1)$. Uvažujme novú súradnicovú sústavu:

$$\begin{aligned} O' &= A, \\ \mathbf{e}'_1 &= \frac{C + D}{2} - A, \\ \mathbf{e}'_2 &= \frac{B + D}{2} - A, \\ \mathbf{e}'_3 &= \frac{B + C}{2} - A. \end{aligned}$$

Napíšte maticu prechodu k súradnicovej sústave $(O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ a použite ju vhodným spôsobom na výpočet nových súradníc (t.j. súradníc vhladom na $(O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$) vrcholov štvorstena $ABCD$.

62. Nech body

$$P = (2, 1), \quad Q = (1, -1), \quad R = (0, 2)$$

majú v novej súradnicovej sústave súradnice

$$P = (1, 0), \quad Q = (0, 0), \quad R = (4, 5).$$

Nájdite túto súradnicovú sústavu (čiže súradnice bodu O' a vektorov $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$ v pôvodnej súradnicovej sústave)!

63. Nájdite súradnice bodov $A = (4, 6)$, $B = (4, 0)$ a vektorov $\mathbf{u} = (2, -1)$, $\mathbf{v} = (-1, 8)$ v sústave súradníc

$$O' = (2, 1), \mathbf{e}_1 = (1, 1), \mathbf{e}_2 = (-1, 2).$$

64. Nájdite sústavu súradníc, v ktorej majú body $A = (0, 5)$, $B = (2, 8)$, $C = (-1, -4)$ nové súradnice $A = (1, 1)_{E'}$, $B = (2, 1)_{E'}$, $C = (-1, -2)_{E'}$.

65. V rovine si zvolíme nový repér:

$$O' = (-3, 1), \mathbf{e}'_1 = (2, 1), \mathbf{e}'_2 = (1, 1).$$

Nájdite vyjadrenie nových súradníc bodov a vektorov pomocou starých súradníc.

9. ORIENTÁCIA AFINNÉHO PRIESTORU

66. Pre ktoré hodnoty parametra m sú dané bázy $\mathbf{a}_1 = (3, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (2, -1)$ a $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ priestoru $\mathbb{R}^2$ rovnako (súhlasne) orientované?

- (a) $\mathbf{b}_1 = (1, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (2, m)$,
- (b) $\mathbf{b}_1 = (m, 2)$, $\mathbf{b}_2 = (2, m)$.

67. Zistite, či sú bázy $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ a $(\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$ rovnako orientované.

68. Zistite, ktoré z báz $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, $(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1)$, $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$, $(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)$, $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2)$ priestoru $\mathbb{R}^3$ sú rovnako orientované.

69. V $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ nájdite maticu prechodu od bázy $(Q - P, R - P)$ k báze $(R - Q, P - Q)$ a na jej základe zistite, či bázy sú rovnako orientované (P, Q a E sú navzájom rôzne nekolineárne body).

70. V $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ majme štvorsten $ABCD$. Nájdite maticu prechodu od bázy $(B - A, C - A, D - A)$ k báze $(A - B, C - B, D - B)$ a na jej základe zistite, či sú tieto bázy rovnako orientované.

Cieľom nasledujúcich cvičení je presvedčiť sa, že orientácia súradnicových sústav v reálnej rovine, ako sme si ju definovali pomocou signatúry determinantu matice prechodu od jednej sústavy k druhej, naozaj popisuje naše intuitívne vnímanie orientácie: ak štandardnú sústavu (x -os doprava, y -os nahor) nazveme kladne orientovanou, tak potom je kladne orientovaná každá súradnicová sústava, v ktorej sa z kladného smeru x -osi na kladný smer y -osi dostaneme otočením o menej ako π proti smeru hodinových ručičiek.

71. Overte, že ak v $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ zvolíme nový začiatok súradnicovej sústavy (t.j. $O' = (a_1, a_2, \dots, a_n)$) a jednotkové vektory necháme nezmenené (t.j. $\mathbf{e}'_i = \mathbf{e}_i$, pre $i = 1, 2, \dots, n$), bude mať nová súradnicová sústava rovnakú (súhlasnú) orientáciu ako stará.

72. Overte, že ak v súradnicovej sústave v $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ iba pre násobíme bázoové vektory kladným číslom, (t.j. $O' = O$, $\mathbf{e}'_i = c_i \mathbf{e}_i$, kde $c_i \in \mathbb{R}$, $c_i > 0$ pre $i = 1, 2, \dots, n$), bude nová súradnicová sústava súhlasne orientovaná so starou.

73. Overte, že ak v reálnej rovine $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ zvolíme novú súradnicovú sústavu tak, že otočíme starú okolo začiatku (t.j. $O' = O$, $\mathbf{e}'_1 = \rho(\mathbf{e}_1)$ a $\mathbf{e}'_2 = \rho(\mathbf{e}_2)$, kde $\rho: \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ je otočenie okolo začiatku súradnicovej sústavy, viď zadanie 59), bude mať nová súradnicová sústava rovnakú orientáciu ako stará.

74. Nech $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ je „štandardná“ súradnicová sústava, t.j. kladný smer x -osi smeruje doprava a kladný smer y -osi nahor, čiže zvierá s kladným smerom x -osi uhol $\pi/2$ proti smeru hodinových ručičiek. Nech v novej súradnicovej sústave $(O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$ platí

$$\begin{aligned} O' &= O, \\ \mathbf{e}'_1 &= \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{e}'_2 &= a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

Pre aké $a, b \in \mathbb{R}$ bude $(O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$ súradnicovou sústavou? Pre aké $a, b \in \mathbb{R}$ bude táto súradnicová sústava súhlasne orientovaná so sústavou $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$?

10. VZDIALENOSŤ DVOCH BODOV, METRICKÝ PRIESTOR

75. V rovine sú dané body $A = (-1, 0)$ a $B = (3, 2)$.

- (a) Na y -osi nájdite bod C tak, aby trojuholník ABC mal pri vrchole C pravý uhol.
- (b) Vypočítajte obsah tohto trojuholníka.

76. Nech $A, B \in \mathbb{E}^2$, $A = (0, -1)$, $B = (0, 1)$. Nájdite množinu bodov X takých, že $|AX| = |BX|$. (Zrejme túto množinu vidíte na prvý pohľad, ale skúste formálne ukázať, že naozaj je to správna množina: rozpíšte do detailov podmienku $|AX| = |BX|$.)

77. Nech $A, B \in \mathbb{E}^2$, $A \neq B$. Nájdite množinu bodov, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od A a B .

78. Na súradnicových osiach v reálnej rovine nájdite body, ktorých vzdialenosť od bodu $(5, 2)$ je 3.

79. Overte, že body

$$A_0 = (0, 0, 0), \quad A_1 = (0, 1, 1), \quad A_2 = (1, 0, 1), \quad A_3 = (1, 1, 0)$$

sú vrcholmi pravidelného štvorstena.

80. Nech $A, B \in \mathbb{E}^2$, $A = (4, 0)$, $B = (1, 0)$. Nájdite množinu bodov X takých, že $|AX| = 2|BX|$.

81. Nech $A, B \in \mathbb{E}^2$, $A \neq B$. Nájdite množinu bodov X takých, že $|AX| = 2|BX|$.

82. Overte, že euklidovská vzdialenosť bodov v $\mathbb{E}$ je naozaj metrikou. Presnejšie, overte, že pre $d(A, B) = \|B - A\|$ platí

- (i) $d(A, B) \geq 0$ pričom $d(A, B) = 0$ práve vtedy, keď $A = B$,
- (ii) $d(A, B) = d(B, A)$,
- (iii) $d(A, B) + d(B, C) \geq d(A, C)$.

(V dôkaze sa zrejme budete odkazovať na vhodné vlastnosti normy.)

83. V reálnom afinnom priestore $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ sa dajú okrem štandardnej euklidovskej definovať i iné, menej štandardné metriky:

- Manhattanská (taxikárska) metrika: koľko najmenej musí taxikár najazdiť, aby sa v Manhattane dostal z bodu A do bodu B :

$$d_M(A, B) = |b_1 - a_1| + |b_2 - a_2| + \dots + |b_n - a_n|.$$

- Čebyševova (šachovnicová, maximová) metrika: koľko najmenej krokov musí šachový kráľ urobiť na šachovnici, aby sa dostal z bodu A do bodu B :

$$d_C(A, B) = \max\{|b_1 - a_1|, |b_2 - a_2|, \dots, |b_n - a_n|\}.$$

- diskrétna metrika:

$$\begin{aligned} d_D(A, B) &= 0 && \text{pre } A = B \\ d_D(A, B) &= 1 && \text{pre } A \neq B \end{aligned}$$

- (a) Aká je vzdialenosť bodov $A = (5, -3)$ a $B = (2, 1)$ v štandardnej, manhattanskej, Čebyševovej a diskkrétnej metrike?
- (b) Ako vyzerá v týchto metrikách jednotková kružnica (t.j. množina bodov, ktorých vzdialenosť od začiatku súradnicovej sústavy je 1)?

* **84.** Určte oblasť všetkých bodov v rovine, ktorých pravouhlé súradnice vyhovujú nerovnostiam:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &\geq 3/2 \\ \cos(2x - y) &< 0 \end{aligned}$$

* **85.** V rovine je daná úsečka AB a na nej pohyblivý bod M . Nad úsečkami AM , BM zostrojte štvorce tak, aby ležali v jednej polrovine vzhľadom na priamku $\overleftrightarrow{AB}$. Zistite geometrické miesto stredov úsečiek, ktoré spájajú stredy oboch uvažovaných štvorcov.

* **86.** Dané sú body A, B, C tak, že $AB \perp AC$, $|AB| = 3$, $|AC| = 4$. Vyšetrite geometrické miesto bodov X v priestore, pre ktorých vzdialenosti od bodov A, B, C platí

$$\begin{aligned} |AX| : |BX| &= 1 : 2 \\ |AX| : |CX| &= 1 : 1 \end{aligned}$$

* **87.** Je daná kružnica k so stredom S a polomerom r a bod A ležiaci zvonka kružnice k . Vyšetrite geometrické miesto bodov v rovine, ktoré sú rovnako vzdialené od kružnice k a od bodu A .

* **88.** Nájdite geometrické miesto bodov v rovine, ktorých súčin vzdialeností od ramien rovnoramenného trojuholníka sa rovná štvorcu vzdialeností od základne tohto trojuholníka.

11. VEKTOROVÝ SÚČIN

89. V priestore $V^3(\mathbb{R})$ ($= \mathbb{R}^3$) dokážte:

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} : \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$$

(tzv. Lagrangeova identita).

Pre zaujímavosť, na pravej strane rovnosti sa nachádza tzv. Gramov determinant vektorov $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$, čo je determinant matice

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} & \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} & \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \end{pmatrix}.$$

90. Vypočítajte obsah trojuholníka s vrcholmi $A = (-1, 1)$, $B = (3, -2)$ a $C = (2, 2)$.

91. Vypočítajte obsah trojuholníka s vrcholmi

$$A = (-1, 1, 2), \quad B = (3, -2, 0) \quad \text{a} \quad C = (2, 2, -1).$$

92. V reálnej rovine máme body

$$P = (1, 2), \quad Q = (2, 1), \quad R = (4, 3).$$

Nájdite vzdialenosť bodu R od priamky $\overleftrightarrow{PQ}$ (t.j. výšku na stranu PQ v $\triangle PQR$).

12. AFINNÁ A KONVEXNÁ KOMBINÁCIA BODOV

93. Nech $A, B \in \mathbb{A}$, $A \neq B$,

$$\overleftrightarrow{AB} = \{A + t(B - A) \mid \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Akej hodnote parametra t zodpovedá bod A ? Bod B ? Stred úsečky AB ?

94. Nech $A, B \in \mathbb{E}^2$, $A \neq B$ a

$$\overleftrightarrow{AB} = \{(1-t)A + tB \mid \forall t \in \mathbb{R}\} = \{A + t(B - A) \mid \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Ako by ste pomocou parametra t charakterizovali úsečku AB ? A ako polpriamku $\overleftrightarrow{AB}$?

Ak v afinity kombinácii bodov

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_n P_n \quad \sum \lambda_i = 1$$

navyše platí $\lambda_i \geq 0 \quad \forall i$, hovoríme o tzv. *konvexnej kombinácii bodov*.

95. Pracujme v $\mathbb{E}^2$.

- Nech $A = (0, 0)$, $B = (3, 0)$, $C = (1, 2)$. Nájdite všetky konvexné kombinácie bodov A, B, C . (Bude ich, prirodzene, nekonečne veľa, skúste ich množinu načrtnúť.)
- To isté pre štvoricu bodov $P = (0, 0)$, $R = (1, 0)$, $S = (0, 1)$, $T = (2, 2)$.
- Vyslovte hypotézu o množine všetkých konvexných kombinácií konečného počtu bodov.

13. PRIAMKA V ROVINE

- 96.** Nájdite parametrické vyjadrenie priamky v $\mathbb{A}^2$, ktorá
- prechádza bodom $A = (3, -2)$ a má smerový vektor $\mathbf{a} = (-4, 2)$,
 - prechádza bodom $A = (3, -2)$ a má ten istý smer ako os x (prvá súradnicová os),
 - prechádza bodmi $B = (2, 3)$ a $C = (-5, -6)$,
 - prechádza bodom $D = (-4, 10)$ a vytína na súradnicových osiach rovnaké úseky (priamka p vytína na i -tej súradnicovej osi úsek a , ak a je i -ta súradnica priesečníku priamky p s touto osou),
 - na y -osi vytína úsek 3 a prechádza bodom $M = (-5, 3)$.
- 97.** Napíšte všeobecnú rovnicu priamky, ktorá
- prechádza bodom $(2, -4)$ a má smer $\mathbf{u} = (-3, -1)$,
 - má parametrické vyjadrenie $x = 5t$, $y = -8 + 4t$,
 - os x pretína v bode $(2, 0)$ a os y v bode $(0, -6)$
 - je rovnobežná s priamkou $7x - 3y + 5 = 0$ a prechádza bodom $(1, 1)$,
 - je kolmá na priamku $4x + 5y - 3 = 0$ a prechádza začiatkom súradnicovej sústavy.
- 98.** Nájdite parametrické vyjadrenie priamky:
- $5x - 2y + 10 = 0$,
 - $x = 0$,
 - $y - 3 = 0$,
 - $x - y = 0$.
- Ako overíte správnosť výsledku? (Inak ako pozrieť sa na učiteľa a čakať, že prikývne.)
- 99.** Aké súradnice majú priesečníky priamky p : $x - 4y + 3 = 0$
- so súradnicovými osami,
 - s priamkou q : $x - y + 1 = 0$,
 - s priamkou r : $x = 2 + t$, $y = 4 - t$?
- 100.** Uvažujme afinnú/euklidovskú rovinu so súradnicami. Napíšte rovnicu priamky p , ktorá prechádza bodmi $A = (3, 1)$ a $B = (-1, 2)$ (t.j. $p = \overleftrightarrow{AB}$). Pre body $C = (1, 4)$, $D = (8, 0)$, $E = (-5, 3)$ a $F = (0, -1)$ rozhodnite, či ležia na priamke p . Priamku aj body načrtnite.
- 101.** Zistite, či ide o tú istú priamku v $\mathbb{E}^2$:
- p : $x = 1 + 3t$, $y = 2 - t$, q : $x = 3t$, $y = 1 - t$,
 - p : $x = -2 - t$, $y = 5 + t$, q : $x = -2 + t$, $y = 5 + t$,
 - p : $x = 2 + t$, $y = 2 + 2t$, q : $x = 1 - t$, $y = -2t$.
- 102.** Nech A, B, C, D, E, F a p sú ako v cvičení 100. Pre každý z bodov C, D, E a F napíšte rovnicu priamky, ktorá týmto bodom prechádza a je rovnobežná s priamkou p .
- 103.** Dané sú dva protiľahlé vrcholy štvorca $A = (4, -1)$, $C = (-3, 0)$.
- Nájdite jeho zvyšné dva vrcholy.
 - Nájdite rovnice priamok, na ktorých ležia jeho strany.
 - Čo viete povedať o všeobecných rovniciach navzájom rovnobežných priamok?
- 104.** Nájdite stred a polomer kružnice opísanej trojuholníku ABC , keď
- $$A = (-10, 3), \quad B = (15, -2), \quad C = (-3, 10).$$
- (Dá sa riešiť viacerými postupmi, podľa Vašich preferencií, napríklad:

- stratégia 1: stred opísanej kružnice je v priesečníku osí strán
- stratégia 2: treba napísať rovnicu kružnice prechádzajúcej danými bodmi)

105. Overte, že pre rôzne body $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ je $S = (\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2})$ naozaj stredom úsečky AB , presnejšie overte, že

- (a) $|AS| = |BS|$,
 (b) Overte, že $S \in \overleftrightarrow{AB}$.

106. Vypočítajte obsah trojuholníka v $\mathbb{E}^2$, ktorého strany majú rovnice $3x - y - 9 = 0$, $2x + y - 1 = 0$, $x + y - 3 = 0$.

107. Na priamke $p : x + y - 8 = 0$ nájdite také body, ktoré sú rovnako vzdialené od bodu $P = (2, 8)$ i od priamky $q : x - 3y + 2 = 0$.

108. Určte množinu všetkých bodov X , pre ktoré $|Xp| = 3|Xq|$, ak $p : x + y - 1 = 0$, $q : 2x - y + 2 = 0$.

109. Určte všeobecné rovnice priamok, ktoré sú kolmé na priamku

$$\begin{aligned} p : x &= 1 + 3t, \\ y &= 1 - t \end{aligned}$$

a ich vzdialenosť od bodu $P = (5, 9)$ je $\sqrt{10}$.

110. Určte všeobecné rovnice dotyčníc zostrojených ku kružnici $k(S, r)$ zo začiatku súradnicovej sústavy, ak $S = (3, -2)$, $r = 1$.

111. Ťažisko rovnostranného trojuholníka leží v bode $T = (1, 4)$ a jeden jeho vrchol v bode $A = (-2, 2)$. Nájdite súradnice zvyšných dvoch vrcholov trojuholníka.

112. Vyjadrite maticou alebo nájdite predpis pre kolmé premietanie v rovine na priamku prechádzajúcu bodmi $(0, -1)$ a $(2, 3)$.

(Je viac spôsobov ako nájsť predpis pre toto zobrazenie: dá sa odvodiť priamo, dá sa aj vyskladať z jednoduchších zobrazení.)

113. Dané sú rovnice dvoch strán obdĺžnika: $5x + 2y - 7 = 0$, $5x + 2y - 36 = 0$ a rovnica jeho diagonály: $3x + 7y - 10 = 0$. Nájdite rovnice zvyšných strán a druhej diagonály.

114. Nájdite priemet bodu $P = (2, 2)$ na priamku prechádzajúcu bodmi $(2, 0)$ a $(0, 1)$.

115. Priamka $p \subset \mathbb{E}^2$ má všeobecnú rovnicu $2x - y - 1$. Body $R = (-1, 1)$ a $S = (0, 4)$ ležia v jednej polrovine vytvorenej priamkou p . Nájdite bod T na priamke p tak, aby mal $\triangle RST$ čo najmenší obvod.

(Pri hľadaní bodu T Vám možno pomôže využiť osovú súmernosť.)

116. Dokážte: priamky

$$\begin{aligned} p_1 : a_1x + b_1y + c_1 &= 0, \\ p_2 : a_2x + b_2y + c_2 &= 0, \\ p_3 : a_3x + b_3y + c_3 &= 0 \end{aligned}$$

prechádzajú jedným bodom alebo sú navzájom rovnobežné práve vtedy, keď

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

117. Určte všeobecnú rovnicu priamky p priestoru $\mathbb{E}^2$, ktorá obsahude bod $M = (2, 1)$ a jej uhol s osou x je $\pi/4$.

118. Lúč svetla sa pohybuje po priamke $p: x - 2y + 5 = 0$. Napíšte rovnicu priamky q , po ktorej sa lúč pohybuje po odraze od priamky $r: 3x - 2y + 7 = 0$ a určte bod odrazu M .

119. Svetelný lúč prechádza bodom $A = (2, 3)$ a po odraze od priamky $p: x + y + 1 = 0$ bodom $B = (1, 1)$. Určte všeobecné rovnice priamok, v ktorých sa dopadajúci i odrazený lúč pohybuje.

120. V priestore $\mathbb{E}^2$ sú dané body $A = (3, 3)$ a $B = (0, 2)$. Na priamke $p: x + y - 4 = 0$ nájdite taký bod (body), z ktorého vidieť úsečku AB pod uhlom $\pi/4$.

14. PRIAMKA A ROVINA V PRIESTORE

121. Nájdite parametrické vyjadrenie roviny v $\mathbb{A}^3$, ktorá

- (a) prechádza bodom $A = (1, 2, 3)$ a má smer $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ ($\mathbf{e}_i$ sú jednotkové súradnicové vektory),
- (b) prechádza bodom A a má smerové vektory $\mathbf{u} = (-5, 6, 4)$, $\mathbf{v} = (2, -1, 0)$,
- (c) prechádza bodmi $B = (3, 2, 1)$, $C = (1, -1, 0)$ a jej smer obsahuje smer y -osi,
- (d) prechádza bodom $M = (-1, 1, 1)$ a obsahuje y -os,
- (e) prechádza bodom $N = (-2, 3, 0)$ a obsahuje priamku $p: (x = 1, y = 2 + t, z = 2 - t)$,
- (f) prechádza priamkou $q: (x = 2 + 3t, y = -1 + 6t, z = 4t)$ a jej smer obsahuje smer priamky $r: (x = -1 + 2t, y = 3t, z = -t)$.

122. Napíšte kanonické rovnice priamky a prepíšte ich do tvaru sústavy rovníc:

- (a) $x = 1 + 2t, y = 2 + 3t, z = 3 + 6t$,
- (a) $x = 8 + 3t, y = -3t, z = 1 + 2t$.

123. Napíšte rovnice priamky p , ktorá prechádza bodom $A = (0, 1, -4)$ rovnobežne s priamkou $q: x + 2y + z - 1 = 0, 2x + 2y - 3z + 6 = 0$.

124. Napíšte rovnicu roviny ρ , ktorá prechádza z -osou rovnobežne s priamkou $p: x = 1 + t, y = 2 + 2t, z = 1 + 3t$.

125. Nájdite všeobecnú rovnicu roviny v $\mathbb{A}^3$:

$$\alpha: x = 1 - u + 2v, y = 2 + u + v, z = 1 + 2u - 3v.$$

Ako môžete overiť správnosť výsledku?

126. Dokážte, že roviny

$$\begin{aligned}\alpha: x &= 1 + u - v, y = -u + 2v, z = u + v, \\ \beta: 3x + 2y - z - 3 &= 0\end{aligned}$$

sú totožné, a že priamka

$$p: x = 2 + t, y = -1, z = 1 + 3t$$

leží v rovine α .

127. Zistite, ktoré z bodov

$$A = (6, 8, 15), B = (0, -1, -3), C = (6, 7, 1), D = (1, \frac{1}{2}, 0), E = (1, 0, 1)$$

ležia na priamke $p: x_1 = 2 + 2t, x_2 = 2 + 3t, x_3 = 3 + 6t$.

128. Zisite, či bod M leží v podpriestore $A+V_\alpha$, kde $A = (2, 2, 1)$, $V_\alpha = \langle (1, 2, 1), (1, 3, 0) \rangle$.

129. Nájdite parametrické vyjadrenie priamky, ktorá leží v rovine

$$\alpha: x + 2y - z + 1 = 0$$

a pretína priamky

$$p: x = 1 + t, y = t, z = 4t,$$

$$q: 3x + y + z - 11 = 0, x + z - 3 = 0.$$

130. Napíšte rovnicu roviny, ktorá prechádza priamkou $p: x + 2y - z + 4 = 0, 3x - y + 2z - 1 = 0$ a bodom $A = (-3, 1, 0)$.

131. Napíšte rovnicu roviny, ktorá prechádza priamkou

$$p: 2x + 3y - z + 5 = 0$$

$$3x - 2y + 2z - 1 = 0$$

a má smerový vektor

(a) $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$,

(a) $\mathbf{u} = (4, -7, -13)$.

132. Nájdite súradnice vrcholov nejakej kocky v $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$, ktorej jedna hrana je úsečka spájajúca body $(-1, -1, -1)$ a $(2, 3, 4)$.

133. Dopĺňte body $A = (1, 0, 0), B = (1, 2, 3), C = (2, -1, 2)$ priestoru $\mathbb{A}^3$ bodom D rôznym od A, B, C tak, aby celá štvorica bola koplanárna.

134. Zistite, či body $(-1, 1, 0), (0, 1, 0), (-1, 1, 1), (2, 2, -1)$ priestoru $\mathbb{A}^3$ sú alebo nie sú koplanárne.

135. Dokážte, že prienik roviny

$$\alpha: 7x - 6y + 5z - 35 = 0$$

s rovinou

$$\beta: x = 1 - u + v, y = 2 + u - 2v, z = u + v$$

je priamka a nájdite jej parametrické vyjadrenie.

136. Nájdite kolmý priemet bodu $P = (10, 10, 7)$ do roviny prechádzajúcej bodmi $(1, 0, 0), (0, 2, 0)$ a $(0, 0, 3)$.

137. Zistite, či bod M leží v rovine $A + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, kde $A = (2, 2, 1)$, $\mathbf{u} = (1, 2, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 3, 0)$:

(a) $M = (6, 30, 13)$,

(b) $M = (7, 17, 8)$,

(c) $M = (7, 13, 5)$,

(d) $M = (12, 32, 15)$.

138. Napíšte sústavy rovníc pre strany (priamky) trojuholníka, ktorého vrcholy sú priesečníky súradnicových osí s rovinou $\alpha: 3x + 7y - 4z - 5 = 0$.

139. Určte vnútorné uhly trojuholníka vytatého na rovine $\alpha: 3x - y + 4z - 12 = 0$ súradnicovými rovinami.

140. Vypočítajte dĺžky výšok štvorstena $ABCD$ ak $A = (6, 0, 0)$, $B = (0, 4, 0)$, $C = (0, 0, 2)$ a $D = (0, 0, 0)$.

141. Napíšte parametrické rovnice priamky p , ktorá prechádza bodom $A = (5, 1, -12)$ rovnobežne s rovinou

$$\alpha: 3x - 2y + z - 14 = 0$$

a pretína priamku

$$q: x = 10 + 3t, y = -5 - 2t, z = 6 + 2t.$$

142. Určte parametrické vyjadrenie i všeobecné rovnice priamky p , ktorá obsahuje bod $M = (3, -2, 1)$, je rovnobežná s rovinou

$$\alpha: 3x + 4y + 2z + 1 = 0$$

a pretína priamku

$$q: x = -t, y = -1 - t, z = 2 + 3t.$$

143. Zostavte rovnicu roviny, ktorá prechádza bodom $A = (9, 8, -7)$ kolmo na priamku p , ak

- (a) $p: x = 35 + 2t, y = -435 - t, z = 3t,$
 (b) $p: x - y - 3z - 91 = 0, 2x + y - 2z + 2 = 0.$

144. Napíšte parametrické vyjadrenie aj rovnicu priamky q , ktorá prechádza bodom $M = (m, n)$ kolmo na priamku $p: ax + by + c = 0$.

145. Určte vzájomnú polohu rovín α, β z $\mathbb{E}^3$, ak

- (a) $\alpha: 2x + 3y + 4z - 12 = 0; \beta: 3x - 6y + 1 = 0,$
 (b) $\alpha: 3x - 2y - 3z + 5 = 0; \beta: 9x - 6y - 9z - 5 = 0,$
 (c) $\alpha: x = 1 + u + v, y = 2 + u, z = 3 + u - v; \beta: x = 1 + u, y = 3u + v, z = 4 + 2u + 2v,$
 (d) $\alpha: x - 2y + z = 0; \beta: x = 1 + u + v, y = 2 + u, z = 3 + u - v.$

146. Vyšetrite vzájomnú polohu priamky p a roviny α (prípadne určte ich prienik), ak

- (a) $p: x = 12 + 4t, y = 9 + 3t, z = 1 + t; \alpha: 3x + 5y - z - 2 = 0,$
 (b) $p: x = -1 + 2t, y = 3 + 4t, z = 3t; \alpha: 3x - 3y + 2z - 5 = 0,$
 (c) $p: 2x + 3y + 6z - 10 = 0, x + y + z + 5 = 0; \alpha: y + 4z + 17 = 0,$
 (d) $p: x + 2y + 3z + 8 = 0, 5x + 3y + z - 16 = 0; \alpha: x = 2 + u + 3v, y = -8 + 6u - 8v, z = -3 - u + 3v.$

147. Dokážte, že priamka $p: x_1 = 0, x_2 = 1 + t, x_3 = 3 - 2t, x_4 = 2t$ je rovnobežná s rovinou $\alpha: x_1 = 1 + u + v, x_2 = u, x_3 = -1 - 2u, x_4 = u - v$ a vypočítajte $|\rho\alpha|$.

148. Vyšetrite vzájomnú polohu priamok v $\mathbb{E}^3$:

$$p: x - 2z = 7, y = 2$$

$$q: x + z = -1, 2x + y = 1.$$

149. Vyšetrite vzájomnú polohu priamok p, q , ak

- (a) $p: x = 1 + 2t, y = 2 - 2t, z = -t; q: x = -2t, y = -5 + 3t, z = 4,$
 (b) $p: x = 3 + t, y = -1 + 2t, z = 4; q: x - 3y + z = 0, x + y - z + 4 = 0,$
 (c) $p: 2x + 3y = 0, x + z - 8 = 0; q: z - 4 = 0, 2x + 3y = 0.$

Body A, A' sa nazývajú *súmerné podľa priamky p* , ak

- $A' - A \perp p$,
- stred úsečky AA' leží na priamke p .

150. Nájdite bod súmerný k bodu $M = (1, -2, -2)$ podľa priamky

$$\frac{x - 6}{1} = \frac{y - 5}{3} = \frac{z - 2}{-1}.$$

151. Nájdite bod súmerný k bodu $M = (1, 2, 3)$ podľa priamky

$$\frac{x-8}{1} = \frac{y-11}{3} = \frac{z-4}{-1}.$$

152. Nájdite parametrické vyjadrenie a všeobecné rovnice priamky, ktorá prechádza bodom $M = (1, 2, 3)$ a pretína priamky

$$p: x = 2t, y = -1 - 2t, z = 2 + t,$$

$$q: x = 4t, y = -2, z = 3t.$$

(Môžte napríklad najprv nájsť rovinu, ktorá obsahuje priamku p a prechádza bodom M , a následne nájsť jej prienik s priamkou q .)

153. Sú dané priamky:

$$p: x = 3 + t, y = -1 + 2t, z = 4t,$$

$$q: x = -2 + 3t, y = -1, z = 4 - t,$$

$$r: x - 3y + z = 0, x + y - z + 4 = 0.$$

Určte parametrické vyjadrenie priamky, ktorá pretína prvé dve a je rovnobežná s tretou priamkou.

(Podobne ako v predchádzajúcom príklade môžete najprv nájsť rovinu, ktorá obsahuje priamku p a smer priamky r , a následne nájsť jej prienik s priamkou q .)

154. Nájdite priamku pretínajúcu mimobežky

$$p: x + y = 0, x - y + z = -4 \text{ a}$$

$$q: x + 3y = -4, y + z = 2,$$

ktorá

(a) prechádza bodom $M = (2, 3, 8)$,

(b) má smerový vektor $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$

155. Nájdite vzdialenosť bodu $M = (1, 2, -3)$ od roviny prechádzajúcej bodmi

$$(1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 0, 2).$$

156. Nájdite priamku, ktorá kolmo pretína priamku

$$p: x = 3 + 4t, y = 1 - t, z = 2 + 5t$$

a y -os.

157. Vypočítajte vzdialenosť mimobežiek p, q :

$$p: x = 9 + 6t, y = -2t, z = 2 - t,$$

$$q: \frac{x+5}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-1}{-2}.$$

158. V množine všetkých rovín priestoru $\mathbb{E}^3$ obsahujúcich priamku

$$p: 2x + y - 3z + 2 = 0, 5x + 5y - 4z + 3 = 0$$

nájdite dvojicu navzájom kolmých rovín tak, aby jedna z nich obsahovala bod $P = (4, -3, 1)$.

159. Napíšte všeobecnú rovnicu roviny, ktorá obsahuje priamku

$$p: x - 3y + 7z + 36 = 0, 2x + y - z + 15 = 0$$

a jej vzdialenosť od bodu $O = (0, 0, 0)$ je 3.

160. Nájdite príklad troch priamok v $\mathbb{E}^3$ tak, aby ľubovoľné dve z nich boli mimobežné.

161. Nájdite parametrické vyjadrenie a všeobecné rovnice priamky určenej

- (a) bodom $A = (5, -1, 4, 2)$ a smerovým vektorom $\mathbf{a} = (3, -1, 4, 2)$,
- (b) bodmi $B = (5, -1, 3, 2)$, $C = (6, -1, 5, 5)$.

162. Presvedčte sa, že

$$\begin{aligned}x_1 &= 1 + u - 2v - w \\x_2 &= u + w \\x_3 &= -1 - u + v \\x_4 &= 2u - v + w\end{aligned}$$

je parametrické vyjadrenie roviny v štvorrozmernom afinnom priestore. Ktorým parametrom zodpovedá v tomto vyjadrení bod $M = (4, 1, -3, 3)$?

163. Nájdite parametrické vyjadrenie podpriestoru v $\mathbb{E}^5$, ktorého všeobecné rovnice sú

$$\begin{aligned}5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 - 3 &= 0 \\2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 - 6 &= 0.\end{aligned}$$

164. V $\mathbb{E}^4$ nech $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$ určuje súradnicovú sústavu. Určte vzájomnú polohu roviny $O + \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ s priamkou $E_4 + \langle \mathbf{e}_3 \rangle$, kde $E_4 = O + \mathbf{e}_4$.

165.

- (a) V $\mathbb{E}^4$ nájdite príklad dvoch rovín, ktoré sa pretínajú v jedinom bode.
- (b) V $\mathbb{E}^4$ nájdite príklad mimobežnej priamky a roviny.
- (c) Nájdite príklad dvoch mimobežných rovín v $\mathbb{E}^5$.

166.

- (a) Nájdite príklad troch priamok v $\mathbb{E}^3$ tak, aby ľubovoľné dve z nich boli mimobežné.
- (b) Dokážte, že priamka a rovina v $\mathbb{E}^3$ nemôžu byť mimobežné.
- (c) V $\mathbb{E}^4$ nájdite príklad mimobežnej priamky a roviny.
- (d) Dokážte, že dve roviny v $\mathbb{E}^4$ nemôžu byť mimobežné.
- (e) Nájdite príklad dvoch mimobežných rovín v $\mathbb{E}^5$.

167. V $\mathbb{E}^4$ sú dané body

$$P_0 = (1, 1, 2, 2), \quad P_1 = (0, 1, 0, 1), \quad P_2 = (1, 2, 0, 3) \text{ a } Q = (0, 2, -4, 2), \quad R = (-1, 2, -4, 1).$$

- (a) Zistite, či platí $Q \in \langle P_0, P_1, P_2 \rangle$, $R \in \langle P_0, P_1, P_2 \rangle$.
- (b) Vypočítajte dimenzie afinných podpriestorov $\langle P_0, P_1, P_2 \rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, Q \rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, R \rangle$.
- (c) Vypočítajte dimenziu afinného podpriestoru $\langle P_0, P_1, P_2 \rangle \cap \langle Q, R \rangle$.
- (d) Vypočítajte dimenziu afinného podpriestoru $\langle P_0, P_1 \rangle \cap \langle Q, R \rangle$, a zistite vzájomnú polohu $\langle P_0, P_1 \rangle$ a $\langle Q, R \rangle$.

15. INVARIANTY AFINNÝCH TRANSFORMÁCIÍ

168. Nech $\pi: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ je kolmé premietanie na x -os: $\pi: (a, b) \mapsto (a, 0)$.

- (1) Nájdite invariantné body premietania π , tiež invariantné smery a ich vlastné čísla.
- (2) Nájdite invariantné priamky transformácie π . Sú medzi nimi aj bodovo samodružné priamky?

169. Nech $\varphi: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ je súmernosť podľa priamky $y - x = 0$, t.j. $\varphi: (a, b) \mapsto (b, a)$.

- (1) Nájdite invariantné body zobrazenia φ , tiež invariantné smery a ich vlastné čísla.
- (2) Nájdite invariantné priamky transformácie φ . Sú medzi nimi aj bodovo samodružné priamky?

170. Nech f je transformácia euklidovskej roviny daná maticou

$$\mathbf{A}_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (1) Nájdite invariantné body zobrazenia f , tiež invariantné smery a ich vlastné čísla.
- (2) Nájdite invariantné priamky transformácie f . Sú medzi nimi aj bodovo samodružné priamky?
- (3) Viete povedať, čo za zobrazenie je f ?

171. To isté zadanie ako pri predchádzajúcom cvičení pre zobrazenie g s analytickým predpisom

$$g(x, y) = (x - 1, x + 1).$$

172. To isté zadanie ako pri cvičení 170 pre zobrazenie g s analytickým predpisom

$$g(x, y) = (-y - 1, x - 3).$$

173. Dané je afinné zobrazenie

$$f: (x, y) \mapsto (3x + 4y - 12, 4x - 3y + 6).$$

Na priamke

$$p: 7x - 2y - 24 = 0$$

nájdite bod, ktorého obraz leží na tej istej priamke.

174. Napíšte maticu inverzného zobrazenia k afinite $f: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$:

$$f: (x, y) \mapsto (2x + 3y - 7, 3x + 5y - 9).$$

175. Môže byť 0 vlastným číslom afinity? Ak áno, uveďte príklad. Ak nie, zdôvodnite.

176. Určite samodružné body a samodružné smery afinnej transformácie $\mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ ($\mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$):

- (a) $(x, y) \mapsto (2x - y + 1, x + 2y + 3)$,
- (b) $(x, y) \mapsto (2x - 5y, 2x + 3y)$,
- (c) $(x, y) \mapsto (\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3})$,
- (d) $(x, y) \mapsto (3x - y, x + y)$,
- (e) $(x, y) \mapsto (3x - y + 6, 3y + 4)$,
- (f) $(x, y) \mapsto (3x + 4y - 8, x + 3y - 4)$,
- (g) $(x, y) \mapsto (4x + 5y - 11, 2x + 4y - 7)$,
- (h) $(x, y) \mapsto (5x + y, 4x + 8y)$,
- (i) $(x, y, z) \mapsto (2x - 2y - 2z + 1, 2x + 3y - 3z, y - z + 4)$,
- (j) $(x, y, z) \mapsto (4x - y - 2z, 2x + y - 2z, x - y + z)$,
- (k) $(x, y, z) \mapsto (x - y + 2z - 7, y + z - 5, x - 2y + z + 6)$.

177. Určte samodružné body a priamky afinnej transformácie:

- (a) $(x, y) \mapsto (-x + 4y - 2, 2x - 3y + 3)$,
- (b) $(x, y) \mapsto (3x + y - 1, 2x + 2y - 1)$,
- (c) $(x, y) \mapsto (7x - y - 1, 4x + 2y + 4)$,
- (d) $(x, y) \mapsto (\frac{13}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{8}{5}, \frac{4}{5}x + \frac{7}{5}y - \frac{4}{5})$,

178. Určte samodružné body, priamky a roviny afinnej transformácie:

- (e) $(x, y, z) \mapsto (x + 4y + z + 1, 2x + 2y + z, -8x - 2z - 1),$
- (f) $(x, y, z) \mapsto (2x + y + 1, 2y + z, 2z + 3),$
- (g) $(x, y, z) \mapsto (3x - 4y + 6, 4x + 3y - 8, -2z + 9),$
- (h) $(x, y, z) \mapsto (2x + y - 2z + 2, -y + z, 2y + 2),$
- (i) $(x, y, z) \mapsto (2y, 2x, z + 1),$
- (j) $(x, y, z) \mapsto (x + y, y + z, z + 1),$
- (k) $(x, y, z) \mapsto (2x - 2, -6x - y + 14, 19x + 6y + z - 44),$
- (l) $(x, y, z) \mapsto (x - y, x + y, z + 2),$
- (m) $(x, y, z) \mapsto (x + z + 1, 2x + 2y + z - 1, -2z),$
- (n) $(x, y, z) \mapsto (x + 2y + z - 3, -y + 4, x + 4y + z - 2),$
- (o) $(x, y, z) \mapsto (2x + y - z + 1, -x + z - 1, 2x + 2y + z + 2),$
- (p) $(x, y, z) \mapsto (6x - 2y - 3z, -2x + 3y - 6z + 6, -3x - 6y - 2z + 1),$
- (q) $(x, y, z) \mapsto (-2x - 2y + 2z + 1, 2x + 3y - 3z, y - z + 4),$
- (r) $(x, y, z) \mapsto (2x + 4y - 2z + 2, 2x + 5y - 2z + 2, -2x - 4y + 3z - 2),$
- (s) $(x, y, z) \mapsto (\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y, -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y, z),$

179. Transformácia roviny $\mathbb{E}^2$ sa nazýva *hyperbolická rotácia*, ak má tvar

$$\begin{aligned} f : x' &= ax, \\ y' &= \frac{1}{a}y \end{aligned}$$

alebo

$$\begin{aligned} f : x' &= ay, \\ y' &= \frac{1}{a}x \end{aligned}$$

pre nejaké $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Nech $p \in \mathbb{R}$ a nech h_p je množina

$$\{X = (x, y) \mid xy = p\}.$$

Ukážte, že ak $X \in h_p$, tak aj $f(X) \in h_p$. Pokúste sa geometricky interpretovať toto zobrazenie.

16. IZOMETRIE EUKLIDOVSKÉJ ROVINY

180. Nájdite izometriu euklidovskej roviny, pre ktorú je bod $(3, -1)$ samodružný a smery $(1, 1)$, $(1, -1)$ sú tiež samodružné. Koľko je takých zobrazení?

181. Koľko existuje izometrií euklidovskej roviny, pre ktoré sú smery súradnicových osí samodružné a ktoré začiatok súradníc zobrazia do bodu $(1, -2)$? Nie je nutné napísať analytické predpisy ani matice týchto zobrazení, ale svoju odpoveď zdôvodnite, nestačí len napísať počet.

182. Koľko existuje izometrií euklidovskej roviny zobrazujúcich bod $(0, 0)$ do bodu $(3, 1)$ a bod $(0, 4)$ do niektorého bodu priamky $5x + 3y - 30 = 0$?

183. V rovine je daný trojuholník ABC . Určte samodružné body a samodružné smery transformácie, ktorá body A, B, C zobrazí v poradí do bodov B, C, A .

184. Určte afinnú transformáciu roviny, pre ktorú

- (a) sú priamky $x + y + 1 = 0$ a $x - y + 2 = 0$ invariantné a bod $(1, 1)$ sa zobrazí do bodu $(2, 2)$,

- (b) je každý bod priamky $x + 2y - 1 = 0$ samodružný a bod $(1, 2)$ sa zobrazí do bodu $(2, 2)$,
 (c) sú súradnicové osi invariantnými priamkami a body $(2, 0)$ a $(0, 4)$ sa zobrazia do bodov $(-6, 0)$ a $(0, 8)$.

185. Ak má transformácia roviny dve rôznobežné samodružné priamky, tak ich priesečník je samodružným bodom tejto transformácie. Zdôvodnite.

186. Vrcholy štvorstena sú v bodoch

$$A = (0, 0, 0), B = (1, 0, 0), C = (0, 1, 0), D = (0, 0, 1).$$

Nájdite afinné zobrazenie, ktoré zobrazí body A, B, C, D do bodov B, C, D, A v tomto poradí. Nájdite invariantné priamky a roviny tohto zobrazenia.

187. Určte obraz priamky p , ktorej parametrické vyjadrenie je

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2t, \\ y &= 1 - t, \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

v osovej súmernosti zobrazujúcej bod $(0, 0)$ do bodu $(4, -2)$.

188. Zistite, či f je zhodnosť

- (a) $f : (x, y) \mapsto (x - \frac{1}{2}y + 1, \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y + 1)$,
 (b) $f : (x, y) \mapsto (x + 4, y + 3)$,
 (c) $f : (x, y, z) \mapsto (\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}y + 1, \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}y + 1, \frac{1}{2}x)$.

189. Nájdite priamu a nepriamu izometriu, ktorá zobrazuje

- (a) $(1, 0) \mapsto (0, 0)$ a $(0, 0) \mapsto (0, 1)$,
 (b) $(1, 0) \mapsto (1, 1)$ a $(5, 2) \mapsto (-1, 5)$.

190. V euklidovskej rovine nájdite predpis pre súmernosť podľa osi

- (a) $2x + y - 2 = 0$.
 (a) $x + y - 5 = 0$.

191. Určte $s \in \mathbb{R}$ tak, aby existovala zhodnosť, ktorá zobrazí bod $(0, 0) \mapsto (5, 0)$ a $(3, 4) \mapsto (9, s)$. Nájdite rovnice takéhoto zobrazenia a určte obraz bodu $(5, 0)$.

192. Rovina sa otáča okolo bodu $(-1, 3)$ o uhol $\pi/4$. Do akých priamok sa zobrazia osi súradnicovej sústavy?

193. Napíšte rovnice strán pravidelného šesťuholníka, ak na priamke $4x + 2y - 1 = 0$ leží jedna jeho strana a začiatok sústavy súradníc je jeho stredom súmernosti.

194. Daná je priamka p , na ktorej leží strana rovnostranného trojuholníka. Nech T je ťažisko tohto trojuholníka. Určte vrcholy tohto trojuholníka, ak p má všeobecnú rovnicu

$$2x - y = 0$$

a $T = (5, 1)$.

195. Nájdite vrcholy ostrých uhlov rovnoramenného pravouhlého trojuholníka, ak poznáte tretí vrchol $C = (1, 2)$ a priamky

$$\begin{aligned} p : 8x - y - 20 &= 0 \\ q : 7x + 4y - 41 &= 0, \end{aligned}$$

na ktorých ležia hľadané vrcholy.

196. Nech f je otočenie roviny $\mathbb{E}^2$ o uhol φ okolo S a g je otočenie o uhol ψ okolo T . Nech $g \circ f$ je posunutie. Určte vektor posunuta $g \circ f$. Čo viete povedať o $f \circ g$?

197. Pre aké s a t je zobrazenie $f : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$

$$\begin{aligned} f : x' &= sx + \frac{12}{13}y - 3, \\ y' &= \frac{12}{13}x + ty + \frac{7}{13} \end{aligned}$$

zhodnosťou? A o akú zhodnosť sa jedná?

LITERATÚRA

- [1] Korešpondenčný seminár z matematiky, 1980/1981.
- [2] Pavel Chalmovianský. Geometria afinných zobrazení euklidovských priestorov. <http://www.sccg.sk/~chalmo/Materialy/g2.pdf>.
- [3] H. S. M Coxeter. *Introduction to Geometry, Second Edition*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., 2nd edition, 1969.
- [4] Pavel Kršňák Milan Hejný, Valent Zaťko. *Geometria 1. pre študentov matematiky učiteľského štúdia na univerzitách a pedagogických fakultách*. Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1985.
- [5] Pavol Zlatoš. *Lineárna algebra a geometria: Cesta z troch rozmerov s presahmi do príbuzných odborov*. Albert Marenčin, 2011.