KAPITOLA 3

Euklidovský priestor

1. Skalárny súčin vo vektorovom priestore

Pracujeme vo vektorovom priestore V nad $\mathbb{R}$. Možnosti, ako zadefinovať skálárny súčin (s narastajúcou abstraktnosťou):

(1) ako na strednej škole: ak vieme (pravítkom) merať dĺžky vektorov a vieme (uhlomerom) merať veľkosti uhlov, tak skalárny súčin môžme zadefinovať:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \cos \angle \mathbf{uv}.$$

(2) ak máme zavedené súradnice, tak **skalárny súčin vektorov** $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ môžme zadefinovať:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n.$$

Prvá definícia sa dá použiť aj prípade, že nemeriame pravítkom a uhlomerom, ale máme súradnice a počítame dĺžku z nich, ale je to zjavne dosť náročné počítanie, v porovnaní s druhou definíciou.

(3) **skalárny súčin** je ľubovoľné zobrazenie $V \times V \to \mathbb{R}$, ktoré má nasledovné vlastnosti:

- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$,
- $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$,
- $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$,
- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$ a $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ práve vtedy, keď $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Porovnanie definícií:

(1) konkrétna, najnázornejšia, poskytujúca geometrický vhľad, no výpočtovo náročná
(2) vyžaduje zavedenie súradníc v ortonormálnej báze, ale potom je už počítanie pohodlné
(3) najabstraktnejšia, žiadne počítanie, vhodná pre dokazovanie tvrdení

Vektorový priestor so zavedeným salárnym súčinom sa nazýva **euklidovský vektorový priestor** alebo jednoducho **vektorový priestor so skalárnym súčinom**.

Definíciu (1) používať nebudeme. My nebudeme skalárny súčin definovať pomocou uhla, ale naopak, uhol budeme definovať pomocou skalárneho súčinu.

Z lineárnej algebry asi už viete, že definície (2) a (3) skalárneho súčinu sú ekvivalentné. Kto si nepamätá, pripomenieme. Najprv ľahko overíme, že ak je zobrazenie $V \times V \to \mathbb{R}$ skalárnym súčinom podľa (2), tak je skalárnym súčinom aj podľa (3):

VETA 3.1. *Nech pre vektory* $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ *platí*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n.$$

Potom

- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$,
- $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$,

- $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$,
- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$ *a* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ *práve vtedy, keď* $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Dôkaz. dú □

Teraz chceme overiť, že ak je zobrazenie $V \times V \to \mathbb{R}$ skalárnym súčinom podľa (3), tak po zvolení vhodnej bázy sa počíta ako v (2). Potrebujeme k tomu pojem kolmosti vektorov a dĺžky (normy) vektora.

Definícia 3.2. Vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sú na seba **kolmé**, ak $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Poznámka 3.3. Všimnite si, že nulový vektor má novú špeciálne vlastnosť, a síce, že je kolmý na všetky vektory vektorového priestoru, dokonca aj sám na seba.

Definícia 3.4. Nech $V = \mathbb{R}^n$ je vektorový priestor so skalárnym súčinom. Potom **dĺžka vektora** alebo tiež **norma vektora** je

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}.$$

Veta 3.5 (Cauchy-Schwartzova nerovnosť, Cauchy-Buňakovského-Schwartzova nerovnosť). *Pre vektory* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ *platí*

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \, .$$

Dôkaz. Ak niektorý z vektorov $\mathbf{u}$ alebo $\mathbf{v}$ je nulový, dostávame na oboch stranách nerovnosti nulu a tvrdenie je tak pravdivé.

Predpokladajme teda, že $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ a $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Majme vektor

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \lambda \mathbf{v},$$

kde λ je reálne číslo. Potom

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{w}\|^2 &\geq 0 \\
\|\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}\|^2 &\geq 0 \\
(\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}) &\geq 0 \\
\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + 2\lambda \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \lambda^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} &\geq 0
\end{aligned}$$

Položme teraz

$$\lambda = -\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}.$$

Potom v našej nerovnosti máme

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} - 2\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2}{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})^2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} &\geq 0 \\
\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} - 2\frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} + \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} &\geq 0 \\
\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} &\geq \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \\
\|\mathbf{u}\|^2 \, \|\mathbf{v}\|^2 &\geq (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2
\end{aligned}$$

a odtiaľ už vyplýva tvrdenie vety. □

Veta 3.6 (trojuholníková nerovnosť). *Pre vektory* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ *platí*

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|.$$

Dôkaz. Počítajme:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 &= (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \\
&= \|\mathbf{u}\|^2+\|\mathbf{v}\|^2+2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} \\
&\le \|\mathbf{u}\|^2+\|\mathbf{v}\|^2+2|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| \\
&\le \|\mathbf{u}\|^2+\|\mathbf{v}\|^2+2\|\mathbf{u}\|.\|\mathbf{v}\| \\
&= (\|\mathbf{u}\|+\|\mathbf{v}\|)^2.
\end{aligned}$$

(Druhá nerovnosť vyplýva z Cauchy-Schwartzovej nerovnosti.) Ukázali sme

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 \le (\|\mathbf{u}\|+\|\mathbf{v}\|)^2,$$

a keďže norma vektora je vždy nezáporná, dostávame tak dokazovanú trojuholníkovú nerovnosť. □

TVRDENIE 3.7. *Pre vektory* $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ *platí*

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \frac{1}{2}(\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2).$$

Dôkaz. dú □

2. Ortonormálna báza

DEFINÍCIA 3.8. Vektory $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\dots,\mathbf{u}_k$ tvoria **ortogonálny systém vektorov**, ak

(i) $\mathbf{u}_i \neq \mathbf{0}$ pre všetky i,
(ii) $\mathbf{u}_i \perp \mathbf{u}_j$ pre všetky $i \neq j$.

Tento systém sa nazýva **ortonormálnym**, ak navyše

(iii) $\|\mathbf{u}_i\| = 1$ pre všetky i.

Skrátene môžme povedať, že $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\dots,\mathbf{u}_k$ tvoria ortonormálny systém vektorov, ak

$$\mathbf{u}_i\cdot\mathbf{u}_\mathbf{j} = \delta_{ij},$$

kde symbol δ_{ij} je tzv. **Kroneckerovo delta**:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$$

TVRDENIE 3.9. *Vektory každého ortogonálneho systému vektorov sú lineárne nezávislé.*

Dôkaz. Nech $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\dots,\mathbf{u}_k$ je ortogonálny systém vektorov.

$$\begin{aligned}
c_1\mathbf{u}_1+\dots+c_k\mathbf{u}_k &= \mathbf{0} \mid \cdot\mathbf{u}_i \\
c_i\mathbf{u}_i\cdot\mathbf{u}_i &= 0 \\
c_i &= 0.
\end{aligned}$$

□

DEFINÍCIA 3.10. **Ortonormálna báza** je ortonormálny systém vektorov $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\dots,\mathbf{u}_n$, kde n je dimenzia príslušného vektorového priestoru.

PRÍKLAD 3.11. Ak skalárny súčin dvoch vektorov $\mathbf{u}=(u_1,u_2,\dots,u_n)$ a $\mathbf{v}=(v_1,v_2,\dots,v_n)$ priestoru $\mathbb{R}^n$ počítame štandardne

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_1v_1+u_2v_2+\dots+u_nv_n,$$

je báza, v ktorej pracujeme, ortonormálna.

PRÍKLAD 3.12. Iné ortonormálne bázy v $\mathbb{R}^2$:

- $\mathbf{e}_1' = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, $\mathbf{e}_2' = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$
- $\mathbf{e}_1'' = (-5/13, 12/13)$, $\mathbf{e}_2'' = (= 12/13, -5/13)$

TVRDENIE 3.13. *Nech je báza*

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0),\ \ldots,\ \mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$$

ortonormálna. Potom pre skalárny súčin vektorov $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ *a* $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ *platí*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n.$$

Dôkaz.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \left(\sum_{i=1}^{n} u_i \mathbf{e}_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} v_j \mathbf{e}_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_i v_j\, \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \\ &= \sum_{i_1}^{n} u_i v_i\, \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i \\ &= u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n. \end{aligned}$$

□

Z tohto tvrdenia a z Príkladu 3.11 tak máme, že báza, v ktorej počítame, je ortonormálna práve vtedy, keď sa skalárny súčin vektorov v tejto báze počíta „štandardne". Teda skalárny súčin podľa (3) je skalárnym súčinom podľa (2) vtedy, ak vieme vo vektorovom priestore nájsť ortonormálnu bázu. A to vďaka Gram-Schmidtovmu ortogonalizačnému procesu, ktorý poznáte z lineárnej algebry, vieme.

PRÍKLAD 3.14. Nech $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ je štandardná ortonormálna báza. Uvažujme bázu:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= 2\mathbf{e}_1 = (2, 0) \\ \mathbf{f}_2 &= -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = (-1, 1) \end{aligned}$$

Zjavne $\mathbf{f}_1$ a $\mathbf{f}_2$ nie sú navzájom kolmé vektory, tiež $\|\mathbf{f}_1\| = 2$, $\|\mathbf{f}_2\| = \sqrt{2}$, teda skalárny súčin sa v tejto báze určite nepočíta štandardne.

PRÍKLAD 3.15. Ak vieme, ako vyzerá skalárny súčin na báze, vieme vypočítať skalárny súčin ľubovoľných dvoch vektorov zapísaných v tejto báze. Nech pre bázu $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$ platí

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_1 &= 4 \\ \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{g}_2 &= 5 \\ \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_2 &= 2 \end{aligned}$$

Odtiaľ o tejto báze vieme povedať, že $\|\mathbf{g}_1\| = 2$, $\|\mathbf{g}_2\| = \sqrt{5}$ a bázové vektory na seba nie sú kolmé. Ako ale táto báza vyzerá v štandardnej euklidovskej rovine?

Ak vektor $\mathbf{g}_1$ nakreslíme vodorovne, smerujúci doprava, vieme, že jeho dĺžka bude 2. Vieme, že druhý bázový vektor má dĺžku $\sqrt{5}$, aký ale bude jeho smer?

Môžme najprv skúsiť nájsť vektor kolmý na $\mathbf{g}_1$ (vieme, že to bude vektor so zvislým smerom):

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{g}_1 &= 0 \\ (u_1\mathbf{g}_1 + u_2\mathbf{g}_2) \cdot \mathbf{g}_1 &= 0 \\ u_1\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_1 + u_1\mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{g}_1 &= 0 \\ 4u_1 + 2u_2 &= 0 \end{aligned}$$

Teda napríklad vektor $\mathbf{u} = (1, -2)$ je kolmý na $\mathbf{g}_1$. Nájdeme dĺžku tohto vektora:

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{g}_1 - 2\mathbf{g}_2) \cdot (\mathbf{g}_1 - 2\mathbf{g}_2) = \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_1 - 4\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_2 + 4\mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{g}_2 = 4 - 8 + 20 = 16,$$

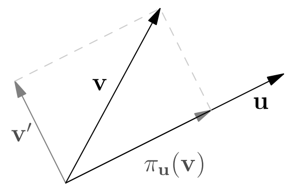
Takže $\mathbf{u}$ môžme nakresliť napríklad ako vektor smerujúci nahor s dĺžkou 4. Ešte vyjadrime $\mathbf{g}_2$ ako kombináciu $\mathbf{g}_1$ a $\mathbf{u}$ a už presne vieme, ako vyzerá báza $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{g}_1 - 2\mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_2 &= \frac{\mathbf{g}_1 - \mathbf{u}}{2} \end{aligned}$$

3. Gram-Schmidtov ortogonalizačný proces

Vektorový priestor generovaný vektormi $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ budeme označovať $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$.

Uvažujme najprv situáciu, že máme dva lineárne nezávislé vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, viď obrázok (všetky vektory na obrázku sú umiestnené do spoločného bodu).



Pod kolmým priemetom vektora $\mathbf{v}$ do priestoru $\langle \mathbf{u} \rangle$ rozumieme vektor $\pi_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})$ taký, že

$$\pi_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) \perp (\mathbf{v} - \pi_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})).$$

Vektor $\mathbf{v}$ sa nám tak rozkladá na súčet dvoch navzájom kolmých vektorov:

$$\mathbf{v} = \pi_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) + \mathbf{v}' \tag{4}$$

Vektor $\pi_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) \in \langle \mathbf{u} \rangle$ je násobkom vektora $\mathbf{u}$:

$$\pi_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{u} \quad \text{kde } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Pre presnejšie vyjadrenie vynásobíme rovnicu (4) skalárne vektorom $\mathbf{u}$ a tak dostaneme

$$\pi_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \mathbf{u} \tag{5}$$

Z (4) tiež vyplýva, že vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ generujú ten istý vektorový podpriestor ako vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}'$.

Predchádzajúce pozorovania teraz využijeme pri Gram-Schmidtovom ortogonalizačnom procese.

Dané sú lineárne nezávislé vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ generujúce podpriestor W vektorového priestoru $V = \mathbb{R}^n$. Chceme nájsť ortonormálnu bázu $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k$ priestoru W.

Najprv nájdeme ortogonálnu bázu W:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &:= \mathbf{v}_1, \\ \mathbf{u}_2 &:= \mathbf{v}_2 - \pi_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{v}_2), \\ \mathbf{u}_3 &:= \mathbf{v}_3 - \pi_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{v}_3) - \pi_{\mathbf{u}_2}(\mathbf{v}_3), \\ &\ldots \\ \mathbf{u}_k &:= \mathbf{v}_k - \pi_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{v}_k) - \pi_{\mathbf{u}_2}(\mathbf{v}_k) - \ldots - \pi_{\mathbf{u}_{k-1}}(\mathbf{v}_k). \end{aligned}$$

Takto dostaneme ortogonálnu bázu $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ priestoru W.

VETA 3.16. *Nech* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ *je báza priestoru* $W \subset \mathbb{R}^n$. *Pre vektory* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ *získané Gram-Schmidtovým ortogonalizačným procesom platí*

(1) $\mathbf{u}_i \perp \mathbf{u}_j$ *pre* $i, j = 1, \ldots, k$, $i \neq j$,

(2) $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_i \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_i \rangle$ *pre* $i = 1, \ldots, k$.

Dôkaz. (i) V časti o kolmom premietaní vektora sme sa už presvedčili, že $\mathbf{u}_1 \perp \mathbf{u}_2$. Prepokladajme teraz, že tvrdenie (i) platí pre $i, j = 1, \ldots, m-1$ a ukážeme, že potom platí aj pre $i, j = 1, \ldots, m$. Presnejšie, potrebujeme overiť, že $\mathbf{u}_m \perp \mathbf{u}_i$ pre $i = 1, \ldots, m-1$.

Pre $\mathbf{u}_m$ máme

$$\mathbf{u}_m = \mathbf{v}_m - \pi_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{v}_m) - \pi_{\mathbf{u}_2}(\mathbf{v}_m) - \ldots - \pi_{\mathbf{u}_{m-1}}(\mathbf{v}_m).$$

Podľa (5) to môžme presnejšie napísať ako

$$\mathbf{u}_m = \mathbf{v}_m - \frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_m}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1 - \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_m}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2} \mathbf{u}_2 - \ldots - \frac{\mathbf{u}_{m-1} \cdot \mathbf{v}_m}{\mathbf{u}_{m-1} \cdot \mathbf{u}_{m-1}} \mathbf{u}_{m-1}.$$

Ak túto rovnosť skalárne prenásobíme vektorom $\mathbf{u}_i$ $(i < m)$, z indukčného predpokladu dostávame

$$\mathbf{u}_m \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{v}_m \cdot \mathbf{u}_i - \frac{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_m}{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i} \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{v}_m \cdot \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_m = 0,$$

čiže $\mathbf{u}_m \perp \mathbf{u}_i$.

(ii) Zrejme $\langle \mathbf{u}_1 \rangle = \langle \mathbf{v}_1 \rangle$. Ľahko nahliadneme aj, že $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$, keďže vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ vieme vyjadriť ako kombinácie vektorov $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ a naopak. Rovnako odvodíme indukciou aj v m-tom kroku, že

$$\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \rangle = \langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{m-1}, \mathbf{v}_m \rangle = \langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m \rangle.$$

□

Na záver ortonormálnu bázu priestoru W potom už získame jednoducho tak, že každý z vektorov vydelíme jeho dĺžkou:

$$\mathbf{w}_i = \frac{\mathbf{u}_i}{\|\mathbf{u}_i\|} \quad i = 1, \ldots k.$$

4. Kolmosť množín vektorov

Definícia 3.17. Nech $S, T \subset \mathbb{R}^n$ sú ľubovoľné neprázdne množiny vektorov

- $\mathbf{u} \perp S$, keď $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ pre všetky $\mathbf{v} \in S$
- $S \perp T$, keď $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ pre všetky $\mathbf{u} \in S$ a $\mathbf{v} \in T$.
- $S^\perp = \{\mathbf{u} \mid \mathbf{u} \perp S\}$ (**ortogonálny (kolmý) doplnok množiny** S).

Príklad 3.18. Ortogonálne doplnky niektorých množín vektorového priestoru V:

- $\{\mathbf{0}\}^\perp = V$.
- $V^\perp = \{\mathbf{0}\}$.
- Ak $S \subset T$, tak $T^\perp \subset S^\perp$: Nech $\mathbf{v} \in T^\perp$. Potom $\forall \mathbf{u} \in T$ platí $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$. Keďže $S \subset T$, tak a fortiori pre všetky $\forall \mathbf{u} \in S$ platí $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$, teda $\mathbf{v} \in S^\perp$.

Veta 3.19. *Nech* $S \subset \mathbb{R}^n$, $S \neq \emptyset$. *Potom*

(i) $S^\perp$ *je podpriestor* $\mathbb{R}^n$,
(ii) $S \subset S^{\perp\perp} (= (S^\perp)^\perp)$.

Dôkaz. (i) Nech $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in S^\perp$, t.j. pre všetky $\mathbf{v} \in S$ platí, že $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v} = 0$ a $\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v} = 0$. Potom

$$(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v} = 0 + 0 = 0,$$

teda $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \in S^\perp$

Teraz nech $\mathbf{u} \in S^\perp$ a $\lambda \in \mathbb{R}$. Potom pre všetky $\mathbf{v} \in S$

$$(\lambda \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \lambda(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \lambda.0 = 0,,$$

teda aj $\lambda \in S^\perp$.

(ii) Nech $\mathbf{v} \in S$. Pre všetky $\mathbf{u} \in S^{\perp}$ platí, že $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. Z toho ale vyplýva, že $\mathbf{v} \in S^{\perp\perp}$. □

PRÍKLAD 3.20. Opačná inklúzia z Vety 3.19 (ii) vo všeobecnosti neplatí. Dá sa to usúdiť už z časti (i) tejto vety: ak S nie je popriestor, nemôže platiť, že $S = S^{\perp\perp}$, keďže $S^{\perp\perp}$ podpriestorom je.

Skúsme si to ilustrovať konkrétnejšie: v $\mathbb{R}^2$ nech $S = \{(1,2)\}$ je jednoprvková množina. Jej ortogonálny doplnok $S^{\perp}$ pozostáva zo všetkých vektorov kolmých na $(1,2)$. Ľahko sa presvedčíme, že je to jednorozmerný podpriestor generovaný vektorom $(2,-1)$:

$$S^{\perp} = \langle (2,-1) \rangle.$$

Ortogonálny dolpnok tejto množiny je vektorový priestor generovaný pôvodnou množinou S:

$$S^{\perp\perp} = \langle (1,2) \rangle \supsetneq S.$$

VETA 3.21. *Nech $U \subset \mathbb{R}^n$ je podpriestor s bázou $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$. Potom*

(i) $\mathbf{v} \perp U$ *práve vtedy, keď* $\mathbf{v} \perp \mathbf{u_i}$ *pre všetky* $i = 1, \dots, k$,
(ii) $\dim U^{\perp} = n - k$.

Dôkaz. (i) dú

(ii) Nech bázové vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ priestoru U majú súradnice $\mathbf{u}_i = (u_{i1}, \dots, u_{in})$. Potom všetky riešenia sústavy

$$\begin{aligned} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \dots + u_{1n}x_n &= 0 \\ u_{21}x_1 + u_{22}x_2 + \dots + u_{2n}x_n &= 0 \\ &\dots \\ u_{k1}x_1 + u_{k2}x_2 + \dots + u_{kn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

sú presne vektory tvoriace ortogonálny doplnok množiny $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$. Z tohto a z lineárnej algebry už vyplýva dokazované tvrdenie. □

V dôkaze predošlej vety sme urobili veľmi užitočné pozorovanie: vyriešiť sústavu homogénnych lineárnych rovníc znamená nájsť ortogonálny doplnok vektorového podpriestoru.

5. Uhol dvoch vektorov

Kým na strednej škole sa najprv žiaci zoznamujú s dĺžkou vektora a uhlom dvoch vektorov a až následne sa pomocou týchto pojmov definuje skalárny súčin dvoch vektorov (viď začiatok kapitoly), v lineárnej algebre sa postupuje naopak: najprv sme si zadefinovali skalárny súčin, potom pomocou neho dĺžku vektora a vzdialenosť bodov, a teraz pomocou skalárneho súčinu zadefinujeme uhol dvoch vektorov.

Z Cauchy-Schwartzovej nerovnosti máme, že

$$-1 \le \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|} \le 1,$$

a preto môžme uhol dvoch vektorov definovať nasledovne:

DEFINÍCIA 3.22. Nech $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Potom **uhol vektorov u a v** definujeme vzťahom

$$\cos \measuredangle \mathbf{uv} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|}.$$

6. Vektorový súčin

DEFINÍCIA 3.23. Nech $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sú vektory v orientovanom vektorovom priestore $\mathbb{R}^3$ so skalárnym súčinom. **Vektorový súčin** vektorov $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, ozn $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, definujeme nasledovne:

- ak vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sú lineárne závislé, potom $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$,
- ak vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sú lineárne nezávislé, potom $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ je taký vektor $\mathbf{w}$, že
  - $\mathbf{w} \perp \mathbf{u}$ a $\mathbf{w} \perp \mathbf{v}$,
  - vetory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ v tomto poradí tovria kladne orientovanú bázu $\mathbb{R}^3$ (súhlasne orientovanú so štandardnou bázou $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$),
  - dĺžka vektora $\mathbf{w}$ je rovná obsahu rovnobežníka určeného vektormi $\mathbf{u}, \mathbf{v}$:

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \sin \measuredangle \mathbf{uv}.$$

VETA 3.24. *(Vlastnosti vektorového súčinu.) Pre vektory* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v_i}$ *a skalár* λ *platí*

(i) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$,
(ii) $(\lambda \mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (\lambda \mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$.
(iii) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v_1} + \mathbf{u} \times \mathbf{v_2}$,

Dôkaz. Platnosť vlastností (i) a (ii) ľahko nahliadneme z definície vektorového súčinu.

O vlastnosti (iii) sa jednoducho presvedčíme, ak sú niektoré z vektorov lineárne závislé. Prepokladajme teda, že vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v_1}$ a $\mathbf{v_2}$ sú lineárne nezávislé.

Skúmajme najprv chvíľu vektorový súčin $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Nech $\mathbf{v} = \pi_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) + \mathbf{v}'$ je rozklad vektora $\mathbf{v}$ na zložku kolmú na vektor $\mathbf{u}$ a rovnobežnŭ s vektorom $\mathbf{u}$ (viď obrázok na strane 23.) Z definície vektorového súčinu vidíme, že $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}'$. Bez ujmy na všeobecnosti môžme teda predpokladať, že $\mathbf{u} \perp \mathbf{v_1}$ a $\mathbf{u} \perp \mathbf{v_2}$.

Z vlastnosti (ii) je ďalej zrejmé, že stačí tvrdenie dokázať pre prípad, keď $\|\mathbf{u}\| = 1$. Spolu s predpokladom, že $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ potom máme, že $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$. Odtiaľ spolu s ostatnými vlastnosťami vektorového súčinu vidíme, že vektor $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$ dostaneme rotáciou vektora $\mathbf{v}$ o 90° v rovine kolmej na $\mathbf{u}$, označme túto rotáciu r. Rotácia vektorov je lineárne zobrazenie (je to asociované zobrazenie k rotácii afinnej roviny), preto zrejme

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}) = r(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}) = r(\mathbf{v_1}) + r(\mathbf{v_2}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v_1} + \mathbf{u} \times \mathbf{v_2}.$$

□

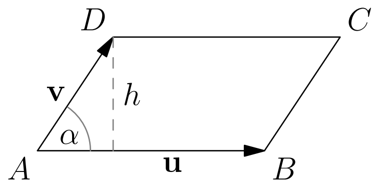
Pomocou týchto vlastností nájdeme teraz spôsob, ako vektorový súčin vypočítať. Nech $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ je štandardná báza:

$$\mathbf{e}_1 = (1,0,0),\ \mathbf{e}_2 = (0,1,0),\ \mathbf{e}_3 = (0,0,1).$$

Potom pre vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ pomocou vlastností vektorového súčinu máme:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \times \mathbf{v} &= (u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{u}_3) \times (v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{u}_3) \\
&= u_1^2\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 + u_1v_2\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 + u_1v_3\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 + u_2v_1\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 + \cdots + u_3v_3\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3 \\
&= (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1) \\
&= \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)
\end{aligned}$$

6.1. Výpočet obsahu rovnobežníka (trojuholníka). Vektorvý súčin nám dáva nový nástroj pre výpočet obsahu trojuholníka. Zrejme trojuholník, ktorého dve strany sú určené vektormi $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$, má polovičný obsah oproti rovnobežníku určeného týmito vektormi.



Obsah rovnobežníka $ABCD$ ($\mathbf{u} = B - A$, $\mathbf{v} = D - A$) je

$$S = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|.$$

Aby tento vektorový súčin dával zmysel, vnoríme našu rovinu do trojrozmerného priestoru tak, že x- a y-súradnice ostanú zachované a z-súradnica je nulová. Teda pôvodnú rovinu $\mathbb{E}^2$ sme stotožnili s rovinou $z = 0$ v $\mathbb{E}^3$. Potom

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(0, 0, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\right).$$

Čiže obsah rovnobežníka určeného vektormi $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ je

$$S = \left|\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\right| = |u_1 v_2 - u_2 v_1|.$$

7. Metrický a euklidovský priestor bodov

Definícia 3.25. Nech $\mathbb{A}$ je afinný priestor nad $\mathbb{R}$. **Vzdialenosť dvoch bodov** (alebo tiež **metrika**) je akékoľvek zobrazenie $\mathbb{A} \times \mathbb{A} \to \mathbb{R}$, $A, B \mapsto d(A, B)$, ktoré spĺňa nasledovné vlastnosti:

(i) $d(A, B) \geq 0$ pričom $d(A, B) = 0$ práve vtedy, keď $A = B$ (**separačná vlastnosť**),
(ii) $d(A, B) = d(B, A)$,
(iii) $d(A, B) + d(B, C) \geq d(A, C)$ (**trojuholníková nerovnosť**).

Pre vzdialenosť bodov A, B sa tiež zvykne používať označenie $|AB|$.

Priestor, v ktorom je definovaná metrika, sa nazýva **metrický**.

Pre metriku nie je nutné mať afinný priestor. Metrika sa dá zaviesť, a často sa aj zavádza, aj na omnoho všeobecnejších množinách, napríklad aj na krivých povrchoch. Aj v rovine existujú rôzne “podivné” metriky:

- Manhattanská metrika: koľko najmenej musí taxikár najazdiť, aby sa v Manhattane dostal z bodu A do bodu B.
- Čebyševova (šachovnicová, maximová) metrika: koľko najmenej krokov musí šachový kráľ urobiť na šachovnici, aby sa dostal z bodu A do bodu B.
- diskrétna metrika:

$$\begin{aligned} d(A, B) &= 0 \quad \text{pre} \quad A = B \\ d(A, B) &= 1 \quad \text{pre} \quad A \neq B \end{aligned}$$

Uvidíme teraz, že skalárny súčin vo vektorovej zložke euklidovského priestoru určuje aj metriku na bodovej zložke.

Definícia 3.26. Nech $\mathbb{A}$ je afinný priestor nad poľom reálnych čísel, v ktorého vektorovej zložke je definovaný skalárny súčin. **Euklidovskú vzdialenosť bodov** A a B definujeme

$$d(A, B) = \|B - A\| := \sqrt{(B - A) \cdot (B - A)}.$$

Takýto afinný priestor nazývame aj **euklidovským priestorom** a označujeme $\mathbb{E}$.

Veta 3.27. *Euklidovská vzdialenosť bodov podľa Definície 3.26 je naozaj metrikou podľa Definície 3.25. Inými slovami, euklidovský priestor je metrický.*

Dôkaz. dú. □

POZNÁMKA 3.28. Pozor, opačná implikácia k tej vo Vete 3.27 nie je pravdivá! Existujú metrické priestory, ktoré nie sú euklidovské. (Inak: nie každá metrika pochádza zo skalárneho súčinu.) Viď napríklad priestor s diskrétnou metrikou.

Budeme pracovať v euklidovskom priestore so štandardným skalárnym súčinom a štandardnou metrikou.

Nech $\mathbb{E}$ je n-rozmerný euklidovský priestor (označujeme tiež $\mathbb{E}^n$), v ktorého vektorovej zložke sa skalárny súčin počíta štandardne (inak: báza, v ktorej pracujeme, je ortonormálna). Ak $A = (a_1, a_2, \dots, a_n), B = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{E}$, potom vzdialenosť podľa tejto definície je

$$d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2}.$$

Ide teda o výpočet vzdialenosti pomocou Pytagorovej vety, ako ju poznáte zo ZŠ.

DEFINÍCIA 3.29. Súradnicová sústava $(O, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ euklidovského priestoru $\mathbb{E}^n$ sa nazýva **karteziánskou**, ak $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ tvorí ortonormálnu bázu vektorového priestoru $V(\mathbb{E}^n) = \mathbb{R}^n$.

(Názov pre karteziánsku sústavu súradníc je odvodený od mena René Descarta, ktorého sme si už spomínali ako jedného zo zakladateľov analytickej geometrie. Latinská („polatinštená”) podoba jeho mena je Renatus Cartesius.)