

KAPITOLA 1

Afinný priestor

1. Jemný historický úvod

- euklidovská rovina (zo strednej školy) (dvojmerný euklidovský priestor):
 - objekty štúdia v euklidovskej rovine: body (+ priamky, kružnice, ...)
 - s euklidovskými priestormi (dvoj- a trojmernými) pracoval a vynikajúco ich popísal už Euklides cca. 300 rokov pr.n.l.
- afinná rovina (dvojmerný afinný priestor): euklidovská rovina, v ktorej ešte nevieme merať (vzdialenosť, dĺžka, kolmosť, veľkosť uhla... neexistujú)

-300: Euklides: euklidovská rovina

1636: Descartes, Fermat: analytická geometria (súradnice)

1804: Bolzano: operácie s bodmi a priamkami, v ktorých je badateľný koncept vektora

1843: Hamilton: kvaternióny ako lineárne kombinácie

1844: Grassmann: prvýkrát prišiel s konceptom vektorového priestoru

1888: Peano: moderné poňatie vektorového priestoru

1920: Banach, Hilbert: axiomatická definícia vektorového priestoru

Dnes existujú vedľa seba dva prístupy ku geometrii: geometria

- syntetická
 - bez súradníc
 - názorná, konštrukčné dôkazy tvrdení
 - najprv máme afinný alebo euklidovský priestor, potom v ňom nájdeme vektorový
- analytická
 - so súradnicami, do hry vstupuje pole
 - ľahšie sa v nej pracuje, na pomoc si vieme pribrať aj počítače
 - viac príležitostí sklznúť k mechanickému počítaniu namiesto porozumenia geometrii problému
 - najprv skonštruujeme vektorový priestor a potom afinný

Spomíname na vektorový priestor:

- objekty: vektory
- štruktúra: vektory vieme sčítavať a násobiť skalármi
- významný vektor: $\mathbf{0}$:
 - v každom vektorovom priestore,
 - v každom podpriestore,
 - nemení sa pri zmene bázy
 - nenachádza sa v žiadnej lineárne nezávislej množine, ani nie je súčasťou žiadnej bázy
 - ...

Afinný priestor: podobný vektorovému, ale “neukotvený”, neexistuje nič ako nulový bod.

2. Analytická geometria, body euklidovskej roviny

*„Pre toho, kto sa chce vyznať problematike vecí,
je užitočné dostatočne sa ňou zaoberať.”*
Aristoteles

Nie hocijaká množina bodov je euklidovský priestor. Potrebujeme popísať štruktúru v množine bodov.

DEFINÍCIA 1.1. Stred úsečky AB (ozn. $\mathcal{S}(A, B)$) je taký bod na úsečke AB , ktorého vzdialenosť od A a od B sú rovnaké.

ÚLOHA 1. Pre dva body A a B nájsť stred úsečky AB , ak $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$. Pomocou obrázku (alebo si pamätáme zo SŠ) máme, že

$$\mathcal{S}(A, B) = \left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2} \right).$$

Treba ešte overiť, že tento bod je naozaj stredom úsečky AB podľa Definície 1.1 (dú).

POZOROVANIE. Sčítavanie bodov zmysel nemá, ale vypočítať $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ už, zdá sa, zmysel má.

DEFINÍCIA 1.2. Nech $S \in \mathbb{A}^2$ je pevne daný bod. **Stredová súmernosť** f so stredom S je zobrazenie množiny bodov roviny do seba, ktoré každý bod A zobrazí na bod $f(A) = A'$ taký, že $S = \mathcal{S}(A, A')$.

Je táto definícia korektná? Treba overiť, že stredová súmernosť f , ako sme ju popísali, je dobre definované zobrazenie, t.j. že pre každý bod A existuje práve jeden bod A' taký, že $f(A) = A'$, čiže taký, že $S = \mathcal{S}(A, A')$. (dú)

3. Štruktúra euklidovského priestoru: geometrický model vektorového priestoru

Uvažujme rovinu $\mathbb{R}^2$ (poznáte ju zrejme pod menom „euklidovská rovina”, ozn. $\mathbb{E}^2$).

DEFINÍCIA 1.3. Orientovaná úsečka AB je úsečka AB spolu s poradím bodov A, B , z ktorých jeden budeme nazývať **začiatočným bodom** a druhý **koncovým bodom** orientovanej úsečky. Ak $A = B$, potom AB je **nulová** (orientovaná) úsečka.

Pri popisovaní orientovanej úsečky budeme používať konvenciu, že prvý bod je začiatočný a druhý koncový, t.j. v orientovanej úsečke AB je bod A začiatočný a bod B koncový.

Každá orientovaná úsečka určuje vektor. Každý vektor má reprezentáciu medzi orientovanými úsečkami, táto reprezentácia ale nie je jednoznačná. Rôzne orientované úsečky môžu určovať ten istý vektor:

- Všetky nulové úsečky nech reprezentujú nulový vektor.
- Dve nenulové orientované úsečky AB a CD reprezentujú ten istý vektor, ak
 - sú zhodné ($|AB| = |CD|$),
 - majú rovnaký smer, teda $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$,
 - majú rovnakú orientáciu, čo v tomto prípade môžeme popísať tak, že
 - * koncové body B a D ležia na tej istej strane od priamky $\overleftrightarrow{AC}$, ak AB a CD neležia na tej istej priamke,
 - * $\overrightarrow{AB} \subset \overrightarrow{CD}$ alebo $\overrightarrow{CD} \subset \overrightarrow{AB}$, ak AB a CD ležia na tej istej priamke.

Alternatívne by sme fakt, že dve rôzne orientované úsečky reprezentujú ten istý vektor, mohli popísať aj tak, že stred úsečky AD splýva so stredom úsečky BC .

Matematicky: popísaná relácia na množine orientovaných úsečiek je reláciou ekvivalencie a vektor je trieda ekvivalencie orientovaných úsečiek.

Dokonca: pre ľubovoľný bod A má ľubovoľný vektor reprezentáciu orientovanou úsečkou AX pre nejaké X .

Súradnice vektora určeného orientovanou úsečkou AB , ak $A = (a_1, a_2)$ a $B = (b_1, b_2)$, sú $(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$. Máme tak ďalšiu zmysluplnú operáciu s bodmi: odčítavanie, pričom rozdielom dvoch bodov je vektor. Vektor určený orientovanou úsečkou AB tak budeme písať ako $B - A$.

Vektory v euklidovskej rovine tvoria vektorový priestor:

- vektory vieme sčítat: sčítavanie vektorov reprezentovaných orientovanými úsečkami AB a CD : priložíme začiatok orientovanej úsečky CD ku koncu orientovanej úsečky AB , t.j. nájdeme bod E taký, že $E - B = D - C$, potom súčet je reprezentovaný orientovanou úsečkou AE :

$$(B - A) + (D - C) = (B - A) + (E - B) = E - A.$$

- je to dobre definované? inak: nezávisí výsledok od voľby reprezentácie?
- je to asociatívne?
- je to komutatívne?
- existuje neutrálny prvok?
- existuje ku každému prvku opačný?
- vektory vieme násobiť skalárom: rozlíšime prípady $t = 0, t < 0, t > 0$:
 - ak $t = 0$, potom $t \cdot (B - A) = \mathbf{0}$,
 - ak $t > 0$, vieme že

$$\forall (B - A) \forall t \in \mathbb{R}^+ \exists ! C \in \overrightarrow{AB} : |AC| = t|AB|.$$

$$\text{a stanovíme } t \cdot (B - A) = C - A,$$

- ak $t < 0$, potom $t \cdot (B - A) = A - C$, kde $C - A = (-t) \cdot (B - A)$.

Znovu treba ešte overiť, že takéto násobenie je dobre definované, t.j. že výsledok operácie nezávisí od voľby reprezentácie vektora.

- platí distributívnosť násobenia vzhľadom na sčítanie (dôkaz sa rozpadá na spústu prípadov).

Pomocou euklidovského priestoru sme skonštruovali vektorový priestor $V(\mathbb{E})$. A s ním aj zobrazenie $\mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow V(\mathbb{E})$.

4. Posunutia

Skúmame ďalej súvis medzi $\mathbb{E}$ a $V(\mathbb{E})$.

ÚLOHA 2. Čo viete povedať o zobrazení, ktoré vznikne zložením dvoch stredových súmerností?

DEFINÍCIA 1.4. Nech $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ je pevne zvolený vektor. **Posunutie (translácia)** t v smere (pozdĺž) vektora $\mathbf{u}$ je zobrazenie $\mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$, ktoré každý bod $A = (a_1, a_2)$ zobrazí na bod $t(A) = A' = A + \mathbf{u} = (a_1 + u_1, a_2 + u_2)$.

POZOROVANIE. Súčet bodu A a vektora $\mathbf{u}$ je tiež zmysluplná operácia: výsledkom je bod, do ktorého sa zobrazí bod A pri translácii pozdĺž vektora $\mathbf{u}$.

Posunutie je jedno-jednoznačne dané vektorom posunutia:

- každý vektor jednoznačne určí posunutie (vyplýva z definície posunutia)

- rôzne vektory určujú rôzne posunutia (ľahko sa overí, stačí nájsť jeden bod, kde sa líšia)

Máme tak bijekciu medzi vektormi v $\mathbb{E}^2$ a posunutiami $\mathbb{E}^2$.

Vektory vieme sčítavať... posunutia vieme skladáť: ak t_1 je translácia pozdĺž $\mathbf{u}_1$ a t_2 je translácia pozdĺž $\mathbf{u}_2$, potom $t_2 \circ t_1 = t_1 \circ t_2$ je translácia pozdĺž $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$.

DEFINÍCIA 1.5. Dvojica $(G, \circ)$, kde $\circ: G \times G \rightarrow G$ je binárna operácia, tvorí **grupu**, ak

- pre všetky $g_1, g_2, g_3 \in G$ platí $(g_1 \circ g_2) \circ g_3 = g_1 \circ (g_2 \circ g_3)$ (operácia $\circ$ je **acosiatívna**),
- existuje $e \in G$ také, že $e \circ g = g \circ e = g$ pre všetky $g \in G$ (e je tzv. **neutrálny prvok** vzhľadom na operáciu $\circ$),
- pre každý prvok $g \in G$ existuje $g' \in G$ tak, že $g \circ g' = g' \circ g = e$ (g' je tzv. **opačný prvok** k prvku g vzhľadom na operáciu $\circ$).

Pokiaľ je operácia $\circ$ navyše komutatívna (t.j. platí $g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$ pre všetky $g_1, g_2 \in G$), potom horovíme, že $(G, \circ)$ (alebo jednoducho G) je **komutatívna grupa**.

POZOROVANIE. Posunutia tvoria komutatívnu grupu.

5. AFINNÝ PRIESTOR (konečne!)

Doteraz sme sa euklidovským priestorom zaoberali tak, ako sa jeho chápanie vyvíjalo historicky: začínali sme s rovinou ako s množinou bodov a až postupne sme v nej objavili vektory, ktoré tvorili vektorový priestor. Tento prístup má však jeden závažný problém: v skutočnosti nevieme poriadne, čo to je, tá bodová rovina.

Teraz si uvedieme moderný axiomatický prístup, keď euklidovský (presnejšie afinný) priestor vybudujeme pomocou vektorového, ktorý už dobre poznáme.

5.1. Definícia afinného priestoru.

- bod – poloha
- vektor – posunutie, pohyb, translácia
- $A + \mathbf{u}$ – bod A posunutý pozdĺž vektora $\mathbf{u}$

DEFINÍCIA 1.6. **Afinný priestor** nad poľom k je trojica $(\mathbb{A}, V, +)$, kde

- $\mathbb{A}$ je množina bodov
- V je vektorový priestor nad poľom k
- $+$: $\mathbb{A} \times V \rightarrow \mathbb{A}$ je binárna operácia s vlastnosťami:
 - (i) $\forall P \in \mathbb{A} \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V: (P + \mathbf{u}) + \mathbf{v} = P + (\mathbf{u} + \mathbf{v})$
(kompatibilita so sčítaním vo vektorovom priestore, môžeme teda písať $A + \mathbf{u} + \mathbf{v}$)
 - (ii) $\forall P \in \mathbb{A}: P + \mathbf{0} = P$
 - (iii) $\forall P, Q \in \mathbb{A} \exists! \mathbf{u} \in V$ taký, že $Q = P + \mathbf{u}$.

Afinný priestor $(\mathbb{A}, V, +)$ budeme tiež označovať $(\mathbb{A}, V)$ alebo jednoducho $\mathbb{A}$. Vtedy vektorový priestor prislúchajúci afinnému priestoru $\mathbb{A}$ budeme označovať ako $V(\mathbb{A})$.

DEFINÍCIA 1.7. **Dimenzia (rozmer) afinného priestoru** je dimenzia jeho vektorovej zložky: $\dim \mathbb{A} := \dim V(\mathbb{A})$. n -rozmerný afinný priestor sa tiež zvykne označovať ako $\mathbb{A}^n$.

Vektor $\mathbf{u}$ zo záveru definície afinného priestoru budeme označovať ako $Q - P$ a o usporiadanej dvojici bodov P, Q (inými slovami: o orientovanej úsečke PQ) budeme hovoriť, že je **umiestnením vektora $\mathbf{u}$** . Čiže máme

$$\mathbf{u} = Q - P \quad \text{práve vtedy, keď} \quad Q = P + \mathbf{u}.$$

Toto bude „naša známa“ operácia $-: \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow V(\mathbb{A})$.

TVRDENIE 1.8. Pre všetky $P, Q, R \in \mathbb{A}$ platí:

- (i) $Q = P + (Q - P)$,
- (ii) $-(Q - P) = P - Q$,
- (iii) $(Q - P) + (R - Q) = (R - P)$ (Chaslesov vzorec),

(t.j. vektory vnímané ako orientované úsečky v takomto afinnom priestore sa správajú presne tak, ako od nich očakávame v analógii s našou prvotnou naivnou predstavou „reálny svet”).

Dôkaz.

- (i) Len prepísaná definícia operácie $-$.
- (ii) $P + (Q - P) + (P - Q) = Q + (P - Q) = P$, čiže $(Q - P) + (P - Q) = \mathbf{0}$, teda $P - Q$ a $Q - P$ sú navzájom opačné vektory.
- (iii) $P + (Q - P) + (R - Q) = Q + (R - Q) = R$, teda $(Q - P) + (R - Q)$ je ten istý vektor ako $(R - P)$.

□

POZOROVANIE. Zdá sa, že aritmetické operácie s bodmi a vektormi prirodzene fungujú tak, ako sme zvyknutí u čísel.

5.2. Bodovo-vektorový kalkulus. Je odľahčením od prísnych pravidiel počítania s bodmi a vektormi.

Kedy má kombinácia bodov zmysel? Keď ju viem formálne korektnými úpravami prepísať na lineárnu kombináciu vektorov, poprípade na súčet bodu a lineárnej kombinácie vektorov.

PRÍKLAD 1.9.

- (a) $\frac{1}{2}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{6}C = A + \frac{1}{3}(B - A) + \frac{1}{6}(C - A)$. Zadaný výraz je korektný.
- (b) $\frac{1}{2}A - \frac{1}{3}B - \frac{1}{6}C = \frac{1}{3}(B - A) + \frac{1}{6}(C - A)$. Zadaný výraz je korektný.
- (c) $A + B = ?$ Zadaný výraz nie je korektný.

DEFINÍCIA 1.10. **Afinná (barycentrická, niekedy aj lineárna) kombinácia bodov.** Nech $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{A}$, nech $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in k$. Nech $P \in \mathbb{A}$.

- Ak $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$, tak súčtom $\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n$ rozumieme bod

$$P + \lambda_1(P_1 - P) + \dots + \lambda_n(P_n - P).$$

- Ak $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$, tak súčtom $\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n$ rozumieme vektor

$$\lambda_1(P_1 - P) + \dots + \lambda_n(P_n - P).$$

Dôkaz korektnosti definície. Treba ukázať, že výsledný bod/vektor nezávisí od voľby bodu P .

Nech $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ a nech $Q \in \mathbb{A}$ je ľubovoľný bod. Potom

$$\begin{aligned} Q + \lambda_1(P_1 - Q) + \dots + \lambda_n(P_n - Q) &= \\ &= P + (Q - P) + \lambda_1(Q - P) + \dots + \lambda_n(Q - P) = \\ &= P + (\lambda_1 + \dots + \lambda_n)(Q - P) + \lambda_1(P_1 - Q) + \dots + \lambda_n(P_n - Q) = \\ &= P + \lambda_1[(Q - P) + (P_1 - Q)] + \dots + \lambda_n[(Q - P) + (P_n - Q)] = \\ &= P + \lambda_1(P_1 - P) + \dots + \lambda_n(P_n - P), \end{aligned}$$

kde prvá a posledná rovnosť vyplývajú z Tvrdenia 1.8.

Dôkaz pre prípad, keď $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$: dú.

□

5.3. Súradnicová sústava. Súradnice v n -rozmernom vektorovom priestore: potrebujeme bázu. Súradnice v n -rozmernom afinnom priestore: okrem bázy potrebujeme aj začiatok súradnicovej sústavy, potrebujeme afinný priestor „ukotviť“ v nejakom bode.

Afinná súradnicová sústava (alebo tiež **afinný súradnicový systém**) v n -rozmernom afinnom priestore je určená usporiadanou $(n+1)$ -ticou

$$(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n),$$

kde $O \in \mathbb{A}$ a $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ tvoria bázu $V(\mathbb{A})$. Takúto $(n+1)$ -ticu tiež nazývame **repérom**. Každý bod P afinného priestoru $\mathbb{A}$ sa potom dá jednoznačne vyjadriť v tvare

$$P = O + p_1\mathbf{e}_1 + p_2\mathbf{e}_2 + \dots + p_n\mathbf{e}_n,$$

čo skrátene zapisujeme ako $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, a n -ticu $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ nazývame **súradnicami** bodu P . Existencia aj jednoznačnosť súradníc bodu vyplýva z

$$P - O = p_1\mathbf{e}_1 + p_2\mathbf{e}_2 + \dots + p_n\mathbf{e}_n$$

a lineárnej algebry ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ tvoria bázu $V(\mathbb{A})$).

$$\begin{array}{ll} O & - \text{začiatok súradnicovej sústavy} \\ E_i = O + \mathbf{e}_i & - \text{jednotkové body súradnicovej sústavy} \\ \overrightarrow{OE_i} & - \text{súradnicové osi} \end{array}$$

PRÍKLAD 1.11. Napíšte súradnice bodu $A = (2, 1)$ v súradnicovej sústave $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, keď

- (1) $O = (-1, 3), \mathbf{e}_1 = (1, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1),$
- (2) $O = (0, 0), \mathbf{e}_1 = (1, 0), \mathbf{e}_2 = (1, 1),$
- (3) $O = (2, 3), \mathbf{e}_1 = (0, -1), \mathbf{e}_2 = (1, 1).$

Nech $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ je afinná súradnicová sústava n -rozmerného afinného priestoru $\mathbb{A}$. Nech $P = (p_1, \dots, p_n) = O + p_1\mathbf{e}_1 + \dots + p_n\mathbf{e}_n$ je bod a $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) = v_1\mathbf{e}_1 + \dots + v_n\mathbf{e}_n$ je vektor. Potom **rozšírené súradnice bodu P resp. vektora $\mathbf{v}$** je $(n+1)$ -tica $(p_1, p_2, \dots, p_n, 1)$ resp. $(v_1, \dots, v_n, 0)$.

Alternatívne, body $E_0, E_1, \dots, E_n$ v n -rozmernom afinnom priestore tvoria **barycentrický súradnicový systém**, ak $(n+1)$ -tica

$$(E_0, E_1 - E_0, E_2 - E_0, \dots, E_n - E_0)$$

tvorí afinnú súradnicovú sústavu, t.j. každý bod A sa dá jednoznačne vyjadriť v tvare

$$P = p_0E_0 + p_1E_1 + \dots + p_nE_n, \quad \text{kde } p_0 + \dots + p_n = 1.$$

Číslam $p_0, \dots, p_n$ potom hovoríme, že ide o **barycentrické súradnice** bodu P vzhľadom na danú barycentrickú sústavu.

Existencia aj jednoznačnosť vyplýva z

$$P = p_0E_0 + p_1E_1 + \dots + p_nE_n = E_0 + p_1(E_1 - E_0) + \dots + p_n(E_n - E_0).$$

KAPITOLA 2

Afinné zobrazenia

DEFINÍCIA 2.1. Nech $A, B \in \mathbb{A}(k)$, $A \neq B$. **Priamka** $\overleftrightarrow{AB}$ je množina

$$\{(1-t)A + tB \mid \forall t \in k\} = \{A + t(B-A) \mid \forall t \in k\}.$$

1. Definícia afinného zobrazenia

DEFINÍCIA 2.2. Nech $\mathbb{A}_1$ a $\mathbb{A}_2$ sú afinné priestory nad rovnakým poľom. Zobrazenie $f: \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$ nazývame **afinným**, ak zachováva afinné kombinácie bodov. T.j. ak pre ľubovoľné $P_0, \dots, P_r \in \mathbb{A}_1$ a $\lambda_0, \dots, \lambda_r \in k$ také, že $\sum_{i=0}^r \lambda_i = 1$, platí

$$(1) \quad f\left(\sum_{i=0}^r \lambda_i P_i\right) = \sum_{i=0}^r \lambda_i f(P_i).$$

PRÍKLAD 2.3. Stredová súmernosť v $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ so stredom v $(0,0)$ je afinné zobrazenie: bod $B_i = (b_{i1}, b_{i2})$ sa zobrazuje na bod $B'_i = (-b_{i1}, -b_{i2})$. Lahko sa presvedčíme, že

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=0}^r \lambda_i B_i\right) &= f\left(\left(\sum_{i=0}^r \lambda_i b_{i1}, \sum_{i=0}^r \lambda_i b_{i2}\right)\right) = \left(-\sum_{i=0}^r \lambda_i b_{i1}, -\sum_{i=0}^r \lambda_i b_{i2}\right) \\ &= \sum_{i=0}^r \lambda_i (-b_{i1}, -b_{i2}) = \sum_{i=0}^r \lambda_i f(B_i). \end{aligned}$$

PRÍKLAD 2.4. Nech $f: \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ je zobrazenie, ktoré bod so súradnicami (b_1, b_2) zobrazí na bod so súradnicami $(b_1, 3b_2)$. Podobne ako v predchádzajúcom príklade overíme, že ide o afinné zobrazenie.

PRÍKLAD 2.5. Zobrazenie $\mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, $(a, b) \mapsto (a, |b|)$ nie je afinným zobrazením: vieme nájsť body A, B, C tak, že $C = \lambda_1 A + \lambda_2 B$ pre nejaké λ_1, λ_2 ($\lambda_1 + \lambda_2 = 1$), ale $f(C) \neq \lambda_1 f(A) + \lambda_2 f(B)$.

PRÍKLAD 2.6. Premietanie na x -os:

$$\mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{A}^2(\mathbb{R}), \quad (a_1, a_2) \mapsto (a_1, 0)$$

je afinné zobrazenie.

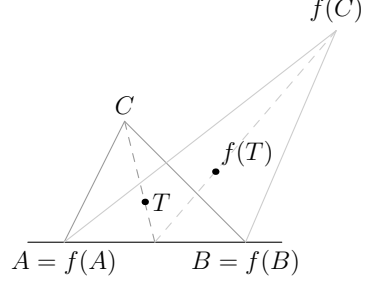
TVRDENIE 2.7. *Kolineárne body sa afinným zobrazením zobrazia na kolineárne body. Obrazom priamky v afinnom zobrazení je priamka alebo bod.*

Dôkaz. Nech P_1, P_2, P_3 sú kolineárne. Ak $P_1 = P_2$, tvrdenie zjavne platí. Inak nech $P_1 \neq P_2$. Potom $P_3 = (1-\lambda)P_1 + \lambda P_2$, teda $f(P_3) = (1-\lambda)f(P_1) + \lambda f(P_2)$, teda $f(P_1), f(P_2), f(P_3)$ sú kolineárne. Ak $f(P_1) = f(P_2)$, obrazom priamky $\overleftrightarrow{P_1 P_2}$ je bod. V opačnom prípade je ľubovoľný bod priamky $\overleftrightarrow{f(P_1) f(P_2)}$, t.j. bod $(1-\lambda')f(P_1) + \lambda'f(P_2)$ obrazom bodu $(1-\lambda')P_1 + \lambda'P_2$. $\square$

2. Pevné body afinity transformácie

PRÍKLAD 2.8.

Nech afinity zobrazenie $\mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ zobrazí dva rôzne body A, B na seba, t.j. $f(A) = A$, $f(B) = B$ (ide o tzv. **pevné** body). Bod $C \notin \overleftrightarrow{AB}$ sa zobrazí na $f(C)$. Potom sa napr. ťažisko $\triangle ABC$ zobrazí na ťažisko $\triangle f(A)f(B)f(C) = \triangle ABf(C)$. Overíme ešte, že všetky body na priamke $\overleftrightarrow{AB}$ sú pevné.



Nech $X \in \overleftrightarrow{AB}$, teda $X = (1 - \lambda)A + \lambda B$. Potom

$$f(X) = f((1 - \lambda)A + \lambda B) = (1 - \lambda)f(A) + \lambda f(B) = (1 - \lambda)A + \lambda B = X.$$

Poučenie z príkladu: nové pojmy:

DEFINÍCIA 2.9. Ak $f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ je afinity zobrazenie priestoru $\mathbb{A}$ do seba, potom f nazývame aj **afinnou transformáciou**. Bijektívna afinity transformácia priestoru $\mathbb{A}$ sa nazýva tiež **afinitou** priestoru $\mathbb{A}$.

Nech f je afinity transformácia $\mathbb{A}$ a nech $P \in \mathbb{A}$. Ak $f(P) = P$, potom P nazývame **pevným (samodružným, invariantným)** bodom zobrazenia f .

PRÍKLAD 2.10. Premietanie na x -os, posunutie aj stredová súmernosť sú afinity transformáciami $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$. Z nich posunutie a stredová súmernosť sú aj afinitami.

A ešte už dokázané (v Prípade 2.8)

TVRDENIE 2.11. Nech f je afinity transformácia a nech A, B ($A \neq B$) sú jej pevné body. Potom všetky body na priamke $\overleftrightarrow{AB}$ sú pevné.

3. Ďalšie vlastnosti afinity zobrazení

VETA 2.12. Zobrazenie $f: \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$ je afinity práve vtedy, keď pre každé $P, Q \in \mathbb{A}_1$ platí:

$$f((1 - \lambda)P + \lambda Q) = (1 - \lambda)f(P) + \lambda f(Q).$$

Dôkaz. Nech je zobrazenie afinity, potom z definície afinity zobrazenia zachováva afinity kombinácie ľubovoľných n -tíc bodov, teda špeciálne aj ľubovoľných dvojíc.

Nech naopak zobrazenie f zachováva afinity kombinácie dvojíc bodov. Indukciou vzhľadom na počet bodov v afinity kombinácii ukážeme, že toto zobrazenie potom zachováva afinity kombinácie ľubovoľného konečného počtu bodov. Pre dva body platí tvrdenie z predpokladu, môžeme teda hneď pristúpiť k indukčnému kroku.

Nech zobrazenie zachováva afinity kombináciu n bodov (indukčný predpoklad). Nech $\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$. Potom

$$\begin{aligned} f(\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n) &= f\left(\lambda_0 P_0 + (1 - \lambda_0) \left(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_0} P_1 + \dots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_0} P_n\right)\right) \\ &= \lambda_0 f(P_0) + (1 - \lambda_0) f\left(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_0} P_1 + \dots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_0} P_n\right) \\ &= \lambda_0 f(P_0) + \lambda_1 f(P_1) + \dots + \lambda_n f(P_n). \end{aligned}$$

Zobrazenie zachováva afinity kombinácie bodov a teda je afinity. □

POZNÁMKA 2.13. V geometrii sa často stretávame s tzv. **deliacim pomerom** trojice kolineárnych bodov: v reálnom priestore je číslo $(ABC) \in \mathbb{R}$ deliacim pomerom trojice bodov A, B, C (v tomto poradí a za predpokladu $C \neq B$), ak

$$C - A = (ABC)(C - B),$$

t.j. vektor $C - A$ je (ABC) -násobkom vektora $C - B$. Vtedy sa afinné zobrazenie často definuje aj ako zobrazenie afinných priestorov, ktoré zachováva kolinearitu a deliaci pomer bodov.

PRÍKLAD 2.14. Nech $p, q \subset \mathbb{A}^2$ sú rôznobežné priamky. Nech $f: \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ zobrazí bod $B = (b_1, b_2)$ na bod $B' = p \cap q^B$, kde q^B je priamka prechádzajúca bodom B a rovnobežná s q (**rovnobežné premietanie** na priamku p). Z podobnosti trojuholníkov pomocou predchádzajúcej vety vieme vyargumentovať, že rovnobežné premietanie je afinným zobrazením.

VETA 2.15. Nech $f: \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$ je afinné zobrazenie. Nech $B - A = D - C$, t.j. usporiadané dvojice bodov (A, B) a (C, D) sú umiestneniami toho istého vektora. Potom aj obrazy týchto dvojíc sú umiestneniami toho istého vektora: $f(B) - f(A) = f(D) - f(C)$.

Dôkaz. Ak $B - A = D - C$, potom stredy úsečiek AD a BC splývajú; označme tento spoločný bod S :

$$S = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}D = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C.$$

Keďže zobrazenie f je afinné, platí aj

$$f(S) = \frac{1}{2}f(A) + \frac{1}{2}f(D) = \frac{1}{2}f(B) + \frac{1}{2}f(C).$$

Z poslednej rovnosti tak dostávame

$$\frac{1}{2}f(A) - \frac{1}{2}f(B) = \frac{1}{2}f(C) - \frac{1}{2}f(D),$$

odkiaľ už dostaneme dokazovanú rovnosť. $\square$

DEFINÍCIA 2.16. Nech $f: \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$ je afinné zobrazenie. Zobrazenie $Df: V(\mathbb{A}_1) \rightarrow V(\mathbb{A}_2)$, ktoré vektoru $\mathbf{u} = B - A$ priradí vektor $Df(\mathbf{u}) = f(B) - f(A)$ sa nazýva **asociovaným** k zobrazeniu f alebo tiež **vektorovou**, **lineárnou** alebo **homogénnou** zložkou afinného zobrazenia f .

Keďže $\mathbf{u} = (B + \mathbf{u}) - B$ pre akýkoľvek vektor $\mathbf{u}$ a bod B , dostávame

$$Df(\mathbf{u}) = Df((B + \mathbf{u}) - B) = f(B + \mathbf{u}) - f(B),$$

teda z definície asociovaného zobrazenia Df k afinnému zobrazeniu f môžeme tiež písať

$$f(B + \mathbf{u}) = f(B) + Df(\mathbf{u}).$$

VETA 2.17. Vektorová zložka Df afinného zobrazenia $f: \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$ je lineárnym zobrazením vektorových priestorov $V(\mathbb{A}_1) \rightarrow V(\mathbb{A}_2)$.

Dôkaz. Potrebujeme ukázať, že

$$Df(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = Df(\mathbf{v}) + Df(\mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w},$$

$$Df(c\mathbf{v}) = cDf(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \forall c.$$

Zvoľme $P \in \mathbb{A}_1$ ľubovoľne. Nech $Q = P + \mathbf{v}$ a $R = Q + \mathbf{w}$. Potom

$$Df(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = Df(R - P) = f(R) - f(P) = f(R) - f(Q) + f(Q) - f(P) = Df(\mathbf{w}) + Df(\mathbf{v}).$$

Nech teraz $c \in k$ a nech $S = P + c\mathbf{v}$. Potom

$$\begin{aligned} Df(c\mathbf{v}) &= f(S) - f(P) = f((1 - c)P + cQ) - f(P) = (1 - c)f(P) + cf(Q) - f(P) \\ &= c(f(Q) - f(P)) = cDf(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

$\square$

PRÍKLAD 2.18.

- (i) Nech $f : \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ je stredová súmernosť. Zobrazenie $Df : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vektoru $\mathbf{u}$ priradí vektor $-\mathbf{u}$.
- (ii) Ak $t : \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ je posunutie, potom jeho vektorová zložka Dt je identita.

VETA 2.19. Nech $(\mathbb{A}_1, V_1)$ a $(\mathbb{A}_2, V_2)$ sú afinné priestory. Pre každú dvojicu bodov $P_1 \in \mathbb{A}_1$, $P_2 \in \mathbb{A}_2$ a každé lineárne zobrazenie $g : V_1 \rightarrow V_2$ existuje práve jedno afinné zobrazenie $f : \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$ také, že $f(P_1) = P_2$ a $Df = g$.

(Príjemnou ľudskou rečou: afinné zobrazenie f je jednoznačne determinované zobrazením Df a obrazom jedného bodu.)

Dôkaz. Existencia zobrazenia: Nech $f : \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$ je definované nasledovne:

$$f(X) = P_2 + g(X - P_1).$$

Lahko sa presvedčíme, že zobrazenie f má požadované vlastnosti:

- pre ľubovoľné $A, B \in \mathbb{A}_1$ platí

$$\begin{aligned} (1 - \lambda)f(A) + \lambda f(B) &= (1 - \lambda)(P_2 + g(A - P_1)) + \lambda(P_2 + g(B - P_1)) \\ &= (1 - \lambda)P_2 + \lambda P_2 + (1 - \lambda)g(A - P_1) + \lambda g(B - P_1) \\ &= P_2 + g((1 - \lambda)A + \lambda B - P_1) = f((1 - \lambda)A + \lambda B), \end{aligned}$$

- $f(P_1) = P_2 + g(P_1 - P_1) = P_2 - g(\mathbf{0}) = P_2$,
- znovu pre ľubovoľné $A, B \in \mathbb{A}_1$ platí

$$\begin{aligned} Df(B - A) &= f(B) - f(A) = P_2 + g(B - P_1) - (P_2 + g(A - P_1)) \\ &= g((B - P_1) - (A - P_1)) \\ &= g(B - A), \end{aligned}$$

Vidíme, že f je afinné zobrazenie a má požadované vlastnosti.

Jednoznačnosť: nech $h : \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$ je ďalšie zobrazenie vyhovujúce daným podmienkam, t.j. nech $h(P_1) = P_2$ a $Dh = g$. Potom pre ľubovoľné $X \in \mathbb{A}_1$ platí

$$h(X) = h(P_1) + Dh(X - P_1) = P_2 + g(X - P_1) = f(P_1) + Df(X - P_1) = f(X),$$

kde prvá rovnosť vyplýva z Vety 2.17 (ii), druhá z podmienok pre zobrazenie h , tretia z podmienok pre zobrazenie f a štvrtá znovu z Vety 2.17 (ii). $\square$

DÔSLEDOK. (Určenosť afinného zobrazenia) Nech $E_0, E_1, \dots, E_n$ je barycentrický súradnicový systém v $\mathbb{A}_1 = \mathbb{A}^n$ a nech $Q_0, Q_1, \dots, Q_n$ sú ľubovoľné body v $\mathbb{A}_2$. Potom existuje jediné afinné zobrazenie $f : \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$ také, že $f(E_i) = Q_i$ pre $i = 0, \dots, n$.

Dôkaz. Pre zobrazenie $f : \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$ musí platiť

- (1) $f(E_0) = Q_0$,
- (2) $Df(P_i - P_0) = Q_i - Q_0$ pre $i = 1, \dots, n$

Z lineárnej algebry vieme, že existuje práve jedno lineárne zobrazenie $g : V(\mathbb{A}_1) \rightarrow V(\mathbb{A}_2)$ spĺňajúce druhú podmienku, a z práve dokázanej vety potom máme, že existuje jediné zobrazenie f spĺňajúce dané podmienky. $\square$

Z tohto dôsledku napríklad vidíme, že afinné zobrazenie roviny je jednoznačne určené obrazmi troch nekolineárnych bodov.

TVRDENIE 2.20. Afinné zobrazenie $f : \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$ je injektívne (surjektívne) práve vtedy, keď $Df : V(\mathbb{A}_1) \rightarrow V(\mathbb{A}_2)$ je injektívne (surjektívne).

Dôkaz. Surjektívnosť: Nech Df je surjektívne a nech $Y \in \mathbb{A}_2$ je ľubovoľný bod. Nech ďalej A je ľubovoľný bod v $\mathbb{A}_1$. Označme $\mathbf{v} := Y - f(A)$. Keďže je Df surjektívne, má vektor $\mathbf{v}$ v zobrazení Df svoj vzor: $\mathbf{v} = Df(\mathbf{u})$. Potom

$$f(A + \mathbf{u}) = f(A) + Df(\mathbf{u}) = f(A) + \mathbf{v} = Y,$$

čiže bod Y má vzor $A + \mathbf{u}$.

Nech teraz naopak je zobrazenie f surjektívne a nech $\mathbf{v} \in V(\mathbb{A}_2)$, nájdeme vzor $\mathbf{v}$ v zobrazení Df . Uvažujme ľubovoľné umiestnenie $\mathbf{v} = Y - X$. Keďže f je surjektívne, existujú body $A, B \in \mathbb{A}_1$ také, že $f(A) = X$ a $f(B) = Y$. Potom $Df(B - A) = \mathbf{v}$, t.j. $B - A$ je vzorom $\mathbf{v}$.

Injektívnosť: dú. □

TVRDENIE 2.21. *Nech $f_1: \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$ a $f_2: \mathbb{A}_2 \rightarrow \mathbb{A}_3$ sú afinné zobrazenia. Potom aj zložené zobrazenie $f_2 \circ f_1: \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_3$ je afinné a pre jeho vektorovú zložku platí $D(f_2 \circ f_1) = Df_2 \circ Df_1$.*

Ak $f: \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$ je bijektívne afinné zobrazenie, potom aj $f^{-1}: \mathbb{A}_2 \rightarrow \mathbb{A}_1$ je afinné zobrazenie a $D(f^{-1}) = (Df)^{-1}$

Dôkaz. Vynechaný, je to únavné mechanické prepisovanie. □

DÔSLEDOK. *Afinity priestoru $\mathbb{A}^n$ tvoria grupu.*

4. Súradnicové (analytické) vyjadrenie afinného zobrazenia

Popis lineárneho zobrazenia vektorových priestorov maticou má analógiu v afinných zobrazeniach.

Majme v $\mathbb{A}^m$ resp. v $\mathbb{A}^n$ zvolený súradnicový systém $(O_1, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m)$ resp. $(O_2, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$.

Nech $f: \mathbb{A}^m \rightarrow \mathbb{A}^n$ je afinné zobrazenie, ktoré je popísané obrazom bodu O_1 a vektorovou zložkou Df (t.j. obrazmi básových vektorov $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$):

$$\begin{aligned} f(O_1) &= (a_{10}, \dots, a_{n0}) \quad (= O_2 + a_{10}\mathbf{f}_1 + \dots + a_{n0}\mathbf{f}_n) \\ Df(\mathbf{e}_1) &= (a_{11}, \dots, a_{n1}) \quad (= a_{11}\mathbf{f}_1 + \dots + a_{n1}\mathbf{f}_n) \\ &\dots \\ Df(\mathbf{e}_m) &= (a_{1m}, \dots, a_{nm}) \quad (= a_{1m}\mathbf{f}_1 + \dots + a_{nm}\mathbf{f}_n) \end{aligned}$$

Potom pre každý bod $P = (p_1, \dots, p_m) = O_1 + p_1\mathbf{e}_1 + \dots + p_m\mathbf{e}_m \in \mathbb{A}^m$ platí

$$f(P) = f(O_1) + p_1 Df(\mathbf{e}_1) + \dots + p_m Df(\mathbf{e}_m).$$

Označme $f(P) = Q = (q_1, \dots, q_n)$. Toto všetko môžeme zapísať maticovo

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ \dots \\ a_{n0} \end{pmatrix},$$

skrátene

$$\mathbf{Q} = \mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{A}_0.$$

Ak uvažujeme rozšírené súradnice (t.j. $f(O_1) = (a_{10}, \dots, a_{n0}, 1)$, $Df(\mathbf{e}_i) = (a_{1i}, \dots, a_{ni}, 0)$), máme zápis

$$(2) \quad \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & a_{20} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & a_{n0} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_m \\ 1 \end{pmatrix},$$

skátene

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{P}}.$$

PRÍKLAD 2.22. Preferujeme matice v rozšírených súradniciach oproti bežným afinným, lebo tak sa ľahko zobrazenia skladajú: skladanie zobrazení zodpovedá násobeniu matíc.

Nech $t_{\mathbf{u}}$ resp. $t_{\mathbf{v}}$ je posunutie v $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ pozdĺž vektora $\mathbf{u}$ resp. $\mathbf{v}$.

Ak $\mathbf{u}$ má súradnice (u_1, u_2) a $\mathbf{v}$ má súradnice (v_1, v_2) , potom maticu zloženého zobrazenia $t_{\mathbf{v}} \circ t_{\mathbf{u}}$ nájdeme ako súčin matíc pre $t_{\mathbf{v}}$ a $t_{\mathbf{u}}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_1 \\ 0 & 1 & u_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_1 + v_1 \\ 0 & 1 & u_2 + v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že ide o posunutie pozdĺž vektora $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, ako sme aj očakávali:

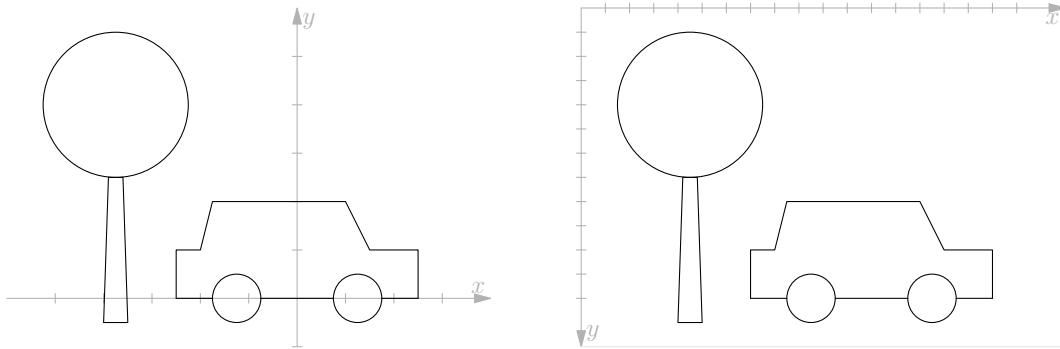
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & u_1 + v_1 \\ 0 & 1 & u_2 + v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + u_1 + v_1 \\ x_2 + u_2 + v_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

PRÍKLAD 2.23. Súvis medzi skladaním afinných zobrazení a násobením matíc býva užitočný pri hľadaní predpisu pre komplikovanejšie zobrazenia. Predpis pre stredovú súmernosť podľa $S = (s_1, s_2)$ vieme tak nájsť pomocou matíc pre posunutie a súmernosť podľa $(0, 0)$: najprv urobíme posunutie o $(-s_1, -s_2)$, potom stredovú súmernosť podľa $(0, 0)$ a nakoniec posunutie o (s_1, s_2) . Výslednú maticu dostaneme ako súčin jednotlivých matíc:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & s_1 \\ 0 & 1 & s_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -s_1 \\ 0 & 1 & -s_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2s_1 \\ 0 & -1 & 2s_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Zmena súradnicovej sústavy

PRÍKLAD 2.24. Namodelovali sme si scénu (napríklad pomocou lomených čiar a kružníc) v súradnicovej sústave, v ktorej sa nám pohodlne pracovalo (obrázok vľavo).



Ak ju chceme zobraziť na obrazovku, potrebujeme všetky súradnice (vrcholy lomených čiar, stredy kružníc) prepočítať: vyjadriť ich v súradnicovej sústave obrazovky (obrázok vpravo). V tejto podkapitolke si predvedieme, ako sa s takýmto problémom čo najefektívnejšie vysporiadať.

V $\mathbb{A}^n$ uvažujme dve afinné súradnicové sústavy:

$$\begin{aligned} E &= (O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) \quad (\text{„stará“ sústava}), \\ E' &= (O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_n) \quad (\text{„nová“ sústava}) \end{aligned}$$

Vyjadrime „nový” začiatok sústavy a „nové” bákové vektory pomocou „starých”:

$$\begin{aligned} O' &= O + t_{01}\mathbf{e}_1 + t_{02}\mathbf{e}_2 + \cdots + t_{0n}\mathbf{e}_n \\ \mathbf{e}'_1 &= t_{11}\mathbf{e}_1 + t_{12}\mathbf{e}_2 + \cdots + t_{1n}\mathbf{e}_n \\ \mathbf{e}'_2 &= t_{21}\mathbf{e}_1 + t_{22}\mathbf{e}_2 + \cdots + t_{2n}\mathbf{e}_n \\ &\vdots \\ \mathbf{e}'_n &= t_{n1}\mathbf{e}_1 + t_{n2}\mathbf{e}_2 + \cdots + t_{nn}\mathbf{e}_n, \end{aligned}$$

čo môžeme prehľadne zapísať pomocou matic

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 & \cdots & \mathbf{e}'_n & O' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_n & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11} & t_{21} & \cdots & t_{n1} & t_{01} \\ t_{12} & t_{22} & \cdots & t_{n2} & t_{02} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{1n} & t_{2n} & \cdots & t_{nn} & t_{0n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

skátene

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}\mathbf{T}.$$

Matica $\mathbf{T}$ sa nazýva **maticou prechodu** od súradnicovej sústavy $E = (O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ k súradnicovej sústave $E' = (O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_n)$. Niekedy sa pre spresnenie označuje aj ako $\mathbf{T}(E, E')$.

TVRDENIE 2.25. *Matica prechodu od jednej sústavy k druhej je regulárna.*

Dôkaz. $\mathbf{T}$ je tvaru

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_{11} & \mathbf{t}_0 \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{t}_0 = (t_{01} \ t_{02} \ \cdots \ t_{0n})^T$ a $\mathbf{T}_{11}$ je matica typu $n \times n$. Pre determinant matice $\mathbf{T}$ teda platí $|\mathbf{T}| = |\mathbf{T}_{11}|$, čiže $\mathbf{T}$ je regulárna práve vtedy, keď $\mathbf{T}_{11}$ je regulárna. Všimnime si, že i -ty stĺpec matice $\mathbf{T}_{11}$ obsahuje súradnice vektora $\mathbf{e}'_i$ v báze $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$. Ak by stĺpce matice $\mathbf{T}_{11}$ boli lineárne závislé, teda existovali by $c_1, c_2, \dots, c_n \in k$ ($(c_1, \dots, c_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$) také, že

$$c_1\mathbf{e}'_1 + c_2\mathbf{e}'_2 + \cdots + c_n\mathbf{e}'_n = \mathbf{0},$$

potom by vektory $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_n$ netvorili bázu $V(\mathbb{A}^n)$. Matica $\mathbf{T}_{11}$ je teda regulárna, čiže aj matica $\mathbf{T}$ je regulárna. $\square$

Maticu $\mathbf{T}$ je možné využiť na prepočítanie súradníc bodov z jednej sústavy do druhej:

Nech $P = (p'_1, p'_2, \dots, p'_n)$ v „novej” sústave, t.j.

$$P = O' + p'_1\mathbf{e}'_1 + p'_2\mathbf{e}'_2 + \cdots + p'_n\mathbf{e}'_n.$$

Potom

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 & \cdots & \mathbf{e}'_n & O' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ \cdots \\ p'_n \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}'\tilde{\mathbf{P}}' = \mathbf{E}\mathbf{T}\tilde{\mathbf{P}}',$$

teda

$$(3) \quad \tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{T}\tilde{\mathbf{P}}'$$

je stĺpcová matica obsahujúca rozšírené súradnice bodu P vzhľadom na „starú” bázu. Pre prepočet „starých” súradníc na „nové” teda použijeme inverznú maticu (prenásobíme rovnosť (3) zľava maticou $\mathbf{T}^{-1}$):

$$\tilde{\mathbf{P}}' = \mathbf{T}^{-1}\tilde{\mathbf{P}}.$$

PRÍKLAD 2.26. S použitím matice prechodu vypočítame súradnice bodu $A = (1, 3)$ v súradnicovej sústave $(O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$, kde

$$O' = (2, 3), \quad \mathbf{e}'_1 = (0, -1), \quad \mathbf{e}'_2 = (1, 1).$$

Matica prechodu k súradnicovej sústave $(O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$ je

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Každý svojou obľúbenou metódou vypočíta maticu k nej inverznú:

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A potom (rozšírené) súradnice bodu A v novej súradnicovej sústave (t.j. vzhľadom na $(O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$) sú

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Teda $A = O' - \mathbf{e}'_1 - \mathbf{e}'_2 = (-1, -1)_{(O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)}$.

Prirodzene, metóda ilustrovaná týmto príkladom je naozaj dosť „overkill“, pokiaľ chceme získať súradnice jedného bodu v novej sústave. Avšak stáva sa veľmi užitočnou, ak potrebujeme napríklad prepočítat komplexnejšiu scénu.

POZNÁMKA 2.27. V rôznej literatúre sa môžete stretnúť s rôznymi maticami prechodu. Niekedy sa ňou nazýva matica transponovaná k našej, niekedy dokonca inverzná.

POZNÁMKA 2.28. Všimnime si, že súradnicová sústava a súradnice bodu sú navzájom duálne pojmy: matica $\mathbf{T}$ popisuje „novú“ súradnicovú sústavu pomocou „starej“, ale „nové“ súradnice bodu sa zo „starých“ počítajú pomocou $\mathbf{T}^{-1}$.

POZNÁMKA 2.29. A na záver si uvedomme, že zmena súradnicovej sústavy v $\mathbb{A}^n$ zodpovedá afinite priestoru $\mathbb{A}^n$ a naopak.

6. Orientácia afinného priestoru

V tejto časti budeme uvažovať afinný priestor nad reálnymi číslami.

V praxi sa pri dvoj- a trojrozmernom reálnom priestore stretávame s pojmom „pravotočivá“ alebo „ľavotočivá“ súradnicová sústava, prípadne tiež „kladne“ alebo „záporne orientovaná“ súradnicová sústava: napríklad v dvojrozmernom priestore sa za kladne orientovanú súradnicovú sústavu považuje taká sústava $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, že body $O, E_1 = O + \mathbf{e}_1, E_2 = O + \mathbf{e}_2$ sú v tomto poradí usporiadané proti smeru hodinových ručičiek. Cieľom tejto časti je popísať tento jav matematicky.

PRÍKLAD 2.30. Majme v $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ novú súradnicovú sústavu:

$$O' = O, \quad \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_2 = t_{21}\mathbf{e}_1 + t_{22}\mathbf{e}_2,$$

čiže matica prechodu k novej súradnicovej sústave je

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & t_{21} & 0 \\ 0 & t_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Predpokladajme, že pôvodná súradnicová sústava je kladne orientovaná (t.j. proti smeru hodinových ručičiek). Pre aké hodnoty t_{21} a t_{22} bude aj nová súradnicová sústava kladne orientovaná?

VETA 2.31. V afinnom priestore $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ ($n \geq 2$) uvažujme nasledovnú reláciu na množine všetkých súradnicových sústav: Pre $E = (O, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ a $E' = (O', \mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n)$ nech

$$E \sim E' \text{ práve vtedy, keď } |\mathbf{T}(E, E')| > 0.$$

Takto definovaná relácia $\sim$ je reláciou ekvivalencie a určuje rozklad množiny všetkých súradnicových sústav na dve triedy.

Dôkaz. Reflexívnosť: $|\mathbf{T}(E, E)| = |\mathbf{I}_{n+1}| = 1$ ($\mathbf{I}_{n+1}$ je jednotková matica stupňa $n + 1$), preto $E \sim E$.

Symetrickosť: nech $E_1 \sim E_2$, teda $|\mathbf{T}(E_1, E_2)| > 0$. Platí, že $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_1 \mathbf{T}(E_1, E_2)$, po vynásobení inverznou maticou k $\mathbf{T}(E_1, E_2)$ máme, že $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 \mathbf{T}(E_1, E_2)^{-1}$. Vidíme, že $\mathbf{T}(E_2, E_1) = \mathbf{T}(E_1, E_2)^{-1}$. Preto $|\mathbf{T}(E_2, E_1)| = |\mathbf{T}(E_1, E_2)^{-1}| = 1/|\mathbf{T}(E_1, E_2)| > 0$, čiže $E_2 \sim E_1$.

Tranzitívnosť: kľúčom k dôkazu je pozorovanie: ak $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_1 \mathbf{T}(E_1, E_2)$ a $\mathbf{E}_3 = \mathbf{E}_2 \mathbf{T}(E_2, E_3)$, potom $\mathbf{E}_3 = \mathbf{E}_1 \mathbf{T}(E_1, E_2) \mathbf{T}(E_2, E_3)$, teda $\mathbf{T}(E_1, E_3) = \mathbf{T}(E_1, E_2) \mathbf{T}(E_2, E_3)$. Nech teraz $E_1 \sim E_2$ a $E_2 \sim E_3$, čiže $|\mathbf{T}(E_1, E_2)| > 0$ a $|\mathbf{T}(E_2, E_3)| > 0$, odkiaľ potom $|\mathbf{T}(E_1, E_3)| > 0$, čiže $E_1 \sim E_3$.

Rozklad na dve triedy: zrejme existujú aspoň dve triedy rozkladu: pre danú súradnicovú sústavu E určite existuje sústava E' taká, že $\mathbf{T}(E, E') < 0$ (viete nájsť takú sústavu E' ?). Teda existujú aspoň dve triedy rozkladu. Nech teraz $E_1 \not\sim E_2$ a $E_2 \not\sim E_3$, čiže $|\mathbf{T}(E_1, E_2)| < 0$ a $|\mathbf{T}(E_2, E_3)| < 0$. Potom $|\mathbf{T}(E_1, E_3)| = |\mathbf{T}(E_1, E_2)| |\mathbf{T}(E_2, E_3)| > 0$, teda $E_1 \sim E_3$. Vidíme tak, že existujú len dve triedy ekvivalencie. $\square$

DEFINÍCIA 2.32. Nech E_1, E_2 sú súradnicové sústavy v $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$. Hovoríme, že sústavy E_1, E_2 sú **súhlasne orientované**, ak $E_1 \sim E_2$ (v zmysle predchádzajúcej vety). V opačnom prípade sú sústavy E_1, E_2 **nesúhlasne orientované**.

V danom reálnom afinnom priestore potom jednu dvoch tried ekvivalencie súradnicových sústav prehlásime za **kladnú**, a všetky sústavy v tejto triede budú **kladne orientované**. Druhá trieda bude **záporná** a bude pozostávať zo **záporne orientovaných** súradnicových sústav.

Orientovaný afinný priestor je afinný priestor spolu so zvolenou orietnáciou, t.j. dvojica $(\mathbb{A}, [E])$, kde $[E]$ označuje triedu ekvivalencie súradnicovej sústavy E .

V orientovanej rovine môžeme potom hovoriť aj o orientácii trojuholníka: nekolineárne body A, B, C (v tomto poradí) určujú kladne orientovaný trojuholník $\triangle ABC$, ak je súradnicová sústava $(A, B - A, C - A)$ kladne orientovaná; v opačnom prípade ide o záporne orientovaný trojuholník. Podobne hovoríme v trojrozmernom orientovanom priestore o kladne alebo záporne orientovanom štvorstene, či v n -rozmernom orientovanom priestore o kladne alebo záporne orientovanom n -rozmernom simplexe.

PRÍKLAD 2.33. Nech $E_e = (O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ je štandardná súradnicová sústava (repér).

Nech $E_f = (O, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$, kde

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{f}_2 &= -\mathbf{e}_1. \end{aligned}$$

Platí, že $|\mathbf{T}(E_e, E_f)| = -1 < 0$, teda tieto súradnicové sústavy sú nesúhlasne orientované: Ak E_e bola kladne orientovaná, E_f je záporne orientovaná.

Nech $E_g = (O, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2)$, kde

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= -\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{g}_2 &= -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

Znovu máme $|\mathbf{T}(E_e, E_g)| = -1 < 0$, takže aj E_g je záporne orientovaná.

Ak si však zvolíme takú orientáciu priestoru, že E_f je kladne orientovaná, z determinantov matíc $T(E_f, E_e)$, $T(E_f, E_g)$ naozaj zistíme, že E_e je záporne a E_g kladne orientovaná, presne ako vidíme, keď si repéry zakreslíme do obrázka.

Euklidovský priestor

1. Skalárny súčin vo vektorovom priestore

Pracujeme vo vektorovom priestore V nad $\mathbb{R}$. Možnosti, ako zdefinovať skalárny súčin (s narastajúcou abstraktnosťou):

(1) ako na strednej škole: ak vieme (pravítkom) merať dĺžky vektorov a vieme (uhlomerom) merať veľkosti uhlov, tak skalárny súčin môžeme zdefinovať:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \angle \mathbf{u}\mathbf{v}.$$

(2) ak máme zavedené súradnice, tak **skalárny súčin vektorov** $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ môžeme zdefinovať:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n.$$

Prvá definícia sa dá použiť aj prípade, že nemerame pravítkom a uhlomerom, ale máme súradnice a počítame dĺžku z nich, ale je to zjavne dosť náročné počítanie, v porovnaní s druhou definíciou.

(3) **skalárny súčin** je ľubovoľné zobrazenie $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, ktoré má nasledovné vlastnosti:

- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$,
- $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$,
- $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$,
- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$ a $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ práve vtedy, keď $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Porovnanie definícií:

- (1) konkrétna, najnázornejšia, poskytujúca geometrický vzhľad, no výpočtovo náročná
- (2) vyžaduje zavedenie súradníc v ortonormálnej báze, ale potom je už počítanie pohodlné
- (3) najabstraktnejšia, žiadne počítanie, vhodná pre dokazovanie tvrdení

Vektorový priestor so zavedeným skalárnym súčinom sa nazýva **euklidovský vektorový priestor** alebo jednoducho **vektorový priestor so skalárnym súčinom**.

Definíciu (1) používať nebudeme. My nebudeme skalárny súčin definovať pomocou uhla, ale naopak, uhol budeme definovať pomocou skalárneho súčinu.

Z lineárnej algebry asi už viete, že definície (2) a (3) skalárneho súčinu sú ekvivalentné. Kto si nepamätá, pripomenieme. Najprv ľahko overíme, že ak je zobrazenie $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ skalárnym súčinom podľa (2), tak je skalárnym súčinom aj podľa (3):

LEMMA 3.1. *Nech pre vektory $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ platí*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n.$$

Potom

- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$,
- $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$,

- $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$,
- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$ a $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ práve vtedy, keď $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Dôkaz. dú □

Teraz chceme overiť, že ak je zobrazenie $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ skalárnym súčinom podľa (3), tak po zvolení vhodnej bázy sa počíta ako v (2). Potrebujeme k tomu pojem kolmosti vektorov a dĺžky (normy) vektora.

DEFINÍCIA 3.2. Vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sú na seba **kolmé**, ak $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

POZNÁMKA 3.3. Všimnite si, že nulový vektor má novú špeciálne vlastnosť, a síce, že je kolmý na všetky vektory vektorového priestoru, dokonca aj sám na seba.

DEFINÍCIA 3.4. Nech $V = \mathbb{R}^n$ je vektorový priestor so skalárnym súčinom. Potom **dĺžka vektora** alebo tiež **norma vektora** je

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}.$$

VETA 3.5 (Cauchy-Schwartzova nerovnosť, Cauchy-Buňakovského-Schwartzova nerovnosť). Pre vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|.$$

Dôkaz. Ak niektorý z vektorov $\mathbf{u}$ alebo $\mathbf{v}$ je nulový, dostávame na oboch stranách nerovnosti nulu a tvrdenie je tak pravdivé.

Predpokladajme teda, že $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ a $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Majme vektor

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \lambda \mathbf{v},$$

kde λ je reálne číslo. Potom

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}\|^2 &\geq 0 \\ \|\mathbf{u} + \lambda \mathbf{v}\|^2 &\geq 0 \\ (\mathbf{u} + \lambda \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \lambda \mathbf{v}) &\geq 0 \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + 2\lambda \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \lambda^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} &\geq 0 \end{aligned}$$

Položme teraz

$$\lambda = -\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}.$$

Potom v našej nerovnosti máme

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} - 2\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2}{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})^2}\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} &\geq 0 \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} - 2\frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} + \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} &\geq 0 \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} &\geq \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \\ \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 &\geq (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \end{aligned}$$

a odtiaľ už vyplýva tvrdenie vety. □

VETA 3.6 (trojuholníková nerovnosť). Pre vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|.$$

Dôkaz. Počítajme:

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 &= (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \\
 &= \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \\
 &\leq \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \\
 &\leq \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \\
 &= (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2.
 \end{aligned}$$

(Druhá nerovnosť vyplýva z Cauchy-Schwartzovej nerovnosti.) Ukázali sme

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 \leq (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2,$$

a keďže norma vektora je vždy nezáporná, dostávame tak dokazovanú trojuholníkovú nerovnosť. $\square$

TVRDENIE 3.7. Pre vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}(\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2).$$

Dôkaz. dú $\square$

2. Ortonormálna báza

DEFINÍCIA 3.8. Vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$ tvoria **ortogonálny systém vektorov**, ak

- (i) $\mathbf{u}_i \neq \mathbf{0}$ pre všetky i ,
- (ii) $\mathbf{u}_i \perp \mathbf{u}_j$ pre všetky $i \neq j$.

Tento systém sa nazýva **ortonormálnym**, ak navyše

- (iii) $\|\mathbf{u}_i\| = 1$ pre všetky i .

Skrátene môžeme povedať, že $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$ tvoria ortonormálny systém vektorov, ak

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = \delta_{ij},$$

kde symbol δ_{ij} je tzv. **Kroneckerovo delta**:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

TVRDENIE 3.9. Vektory každého ortogonálneho systému vektorov sú lineárne nezávislé.

Dôkaz. Nech $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$ je ortogonálny systém vektorov.

$$\begin{aligned}
 c_1\mathbf{u}_1 + \dots + c_k\mathbf{u}_k &= \mathbf{0} \mid \cdot \mathbf{u}_i \\
 c_i\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i &= 0 \\
 c_i &= 0.
 \end{aligned}$$

$\square$

DEFINÍCIA 3.10. **Ortonormálna báza** je ortonormálny systém vektorov $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$, kde n je dimenzia príslušného vektorového priestoru.

PRÍKLAD 3.11. Ak skalárny súčin dvoch vektorov $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ priestoru $\mathbb{R}^n$ počítame štandardne

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n,$$

je báza, v ktorej pracujeme, ortonormálna.

PRÍKLAD 3.12. Iné ortonormálne bázy v $\mathbb{R}^2$:

- $\mathbf{e}'_1 = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, $\mathbf{e}'_2 = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$
- $\mathbf{e}''_1 = (-5/13, 12/13)$, $\mathbf{e}''_2 = (12/13, -5/13)$

TVRDENIE 3.13. *Nech je báza*

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$$

ortonormálna. Potom pre skalárny súčin vektorov $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ platí

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n.$$

Dôkaz.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \left(\sum_{i=1}^n u_i \mathbf{e}_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n v_j \mathbf{e}_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i v_j \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \\ &= \sum_{i=1}^n u_i v_i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i \\ &= u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n. \end{aligned}$$

□

Z tohto tvrdenia a z Príkladu 3.11 tak máme, že báza, v ktorej počítame, je ortonormálna práve vtedy, keď sa skalárny súčin vektorov v tejto báze počíta „štandardne“. Teda skalárny súčin podľa (3) je skalárnym súčinom podľa (2) vtedy, ak vieme vo vektorovom priestore nájsť ortonormálnu bázu. A to vďaka Gram-Schmidtovmu ortogonalizačnému procesu, ktorý poznáte z lineárnej algebry, vieme.

PRÍKLAD 3.14. Nech $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ je štandardná ortonormálna báza. Uvažujme bázu:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= 2\mathbf{e}_1 = (2, 0) \\ \mathbf{f}_2 &= -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = (-1, 1) \end{aligned}$$

Zjavne $\mathbf{f}_1$ a $\mathbf{f}_2$ nie sú navzájom kolmé vektory, tiež $\|\mathbf{f}_1\| = 2$, $\|\mathbf{f}_2\| = \sqrt{2}$, teda skalárny súčin sa v tejto báze určite nepočíta štandardne.

PRÍKLAD 3.15. Ak vieme, ako vyzerá skalárny súčin na báze, vieme vypočítať skalárny súčin ľubovoľných dvoch vektorov zapísaných v tejto báze. Nech pre bázu $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$ platí

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_1 &= 4 \\ \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{g}_2 &= 5 \\ \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_2 &= 2 \end{aligned}$$

Odtiaľ o tejto báze vieme povedať, že $\|\mathbf{g}_1\| = 2$, $\|\mathbf{g}_2\| = \sqrt{5}$ a báзовé vektory na seba nie sú kolmé. Ako ale táto báza vyzerá v štandardnej euklidovskej rovine?

Ak vektor $\mathbf{g}_1$ nakreslíme vodorovne, smerujúci doprava, vieme, že jeho dĺžka bude 2. Vieme, že druhý báзовý vektor má dĺžku $\sqrt{5}$, aký ale bude jeho smer?

Môžeme najprv skúsiť nájsť vektor kolmý na $\mathbf{g}_1$ (vieme, že to bude vektor so zvislým smerom):

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{g}_1 &= 0 \\ (u_1 \mathbf{g}_1 + u_2 \mathbf{g}_2) \cdot \mathbf{g}_1 &= 0 \\ u_1 \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_1 + u_2 \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{g}_1 &= 0 \\ 4u_1 + 2u_2 &= 0 \end{aligned}$$

Teda napríklad vektor $\mathbf{u} = (1, -2)$ je kolmý na $\mathbf{g}_1$. Nájdeme dĺžku tohto vektora:

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{g}_1 - 2\mathbf{g}_2) \cdot (\mathbf{g}_1 - 2\mathbf{g}_2) = \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_1 - 4\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_2 + 4\mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{g}_2 = 4 - 8 + 20 = 16,$$

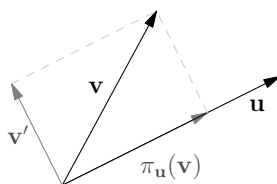
Takže $\mathbf{u}$ môžeme nakresliť napríklad ako vektor smerujúci nahor s dĺžkou 4. Ešte vyjadríme $\mathbf{g}_2$ ako kombináciu $\mathbf{g}_1$ a $\mathbf{u}$ a už presne vieme, ako vyzerá báza $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{g}_1 - 2\mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_2 &= \frac{\mathbf{g}_1 - \mathbf{u}}{2}\end{aligned}$$

3. Gram-Schmidtov ortogonalizačný proces

Vektorový priestor generovaný vektormi $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ budeme označovať $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \rangle$.

Uvažujme najprv situáciu, že máme dva lineárne nezávislé vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, viď obrázok (všetky vektory na obrázku sú umiestnené do spoločného bodu).



Pod kolmým priemetom vektora $\mathbf{v}$ do priestoru $\langle \mathbf{u} \rangle$ rozumieme vektor $\pi_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})$ taký, že

$$\pi_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) \perp (\mathbf{v} - \pi_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})).$$

Vektor $\mathbf{v}$ sa nám tak rozkladá na súčet dvoch navzájom kolmých vektorov:

$$(4) \quad \mathbf{v} = \pi_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) + \mathbf{v}'$$

Vektor $\pi_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) \in \langle \mathbf{u} \rangle$ je násobkom vektora $\mathbf{u}$:

$$\pi_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{u} \quad \text{kde } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Pre presnejšie vyjadrenie vynásobíme rovnicu (4) skalárne vektorom $\mathbf{u}$ a tak dostaneme

$$(5) \quad \pi_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \mathbf{u}$$

Z (4) tiež vyplýva, že vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ generujú ten istý vektorový podpriestor ako vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}'$.

Predchádzajúce pozorovania teraz využijeme pri Gram-Schmidtovom ortogonalizačnom procese.

Dané sú lineárne nezávislé vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ generujúce podpriestor W vektorového priestoru $V = \mathbb{R}^n$. Chceme nájsť ortonormálnu bázu $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k$ priestoru W .

Najprv nájdeme ortogonálnu bázu W :

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 &:= \mathbf{v}_1, \\ \mathbf{u}_2 &:= \mathbf{v}_2 - \pi_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{v}_2), \\ \mathbf{u}_3 &:= \mathbf{v}_3 - \pi_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{v}_3) - \pi_{\mathbf{u}_2}(\mathbf{v}_3), \\ &\dots \\ \mathbf{u}_k &:= \mathbf{v}_k - \pi_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{v}_k) - \pi_{\mathbf{u}_2}(\mathbf{v}_k) - \dots - \pi_{\mathbf{u}_{k-1}}(\mathbf{v}_k).\end{aligned}$$

Takto dostaneme ortogonálnu bázu $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$ priestoru W .

LEMA 3.16. *Nech $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ je báza priestoru $W \subset \mathbb{R}^n$. Pre vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$ získané Gram-Schmidtovým ortogonalizačným procesom platí*

$$(1) \quad \mathbf{u}_i \perp \mathbf{u}_j \text{ pre } i, j = 1, \dots, k, i \neq j,$$

$$(2) \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_i \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i \rangle \text{ pre } i = 1, \dots, k.$$

Dôkaz. (i) V časti o kolmom premietaní vektora sme sa už presvedčili, že $\mathbf{u}_1 \perp \mathbf{u}_2$. Prepokladajme teraz, že tvrdenie (i) platí pre $i, j = 1, \dots, m-1$ a ukážeme, že potom platí aj pre $i, j = 1, \dots, m$. Presnejšie, potrebujeme overiť, že $\mathbf{u}_m \perp \mathbf{u}_i$ pre $i = 1, \dots, m-1$.

Pre $\mathbf{u}_m$ máme

$$\mathbf{u}_m = \mathbf{v}_m - \pi_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{v}_m) - \pi_{\mathbf{u}_2}(\mathbf{v}_m) - \dots - \pi_{\mathbf{u}_{m-1}}(\mathbf{v}_m).$$

Podľa (5) to môžeme presnejšie napísať ako

$$\mathbf{u}_m = \mathbf{v}_m - \frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_m}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1 - \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_m}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2} \mathbf{u}_2 - \dots - \frac{\mathbf{u}_{m-1} \cdot \mathbf{v}_m}{\mathbf{u}_{m-1} \cdot \mathbf{u}_{m-1}} \mathbf{u}_{m-1}.$$

Ak túto rovnosť skalárne pre násobíme vektorom $\mathbf{u}_i$ ($i < m$), z indukčného predpokladu dostávame

$$\mathbf{u}_m \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{v}_m \cdot \mathbf{u}_i - \frac{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_m}{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i} \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{v}_m \cdot \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_m = 0,$$

čiže $\mathbf{u}_m \perp \mathbf{u}_i$.

(ii) Zrejme $\langle \mathbf{u}_1 \rangle = \langle \mathbf{v}_1 \rangle$. Lahko nahliadneme aj, že $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$, keďže vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ vieme vyjadriť ako kombinácie vektorov $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ a naopak. Rovnako odvodíme indukciou aj v m -tom kroku, že

$$\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \rangle = \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{m-1}, \mathbf{v}_m \rangle = \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m \rangle.$$

□

Na záver ortonormálnu bázu priestoru W potom už získame jednoducho tak, že každý z vektorov vydelíme jeho dĺžkou:

$$\mathbf{w}_i = \frac{\mathbf{u}_i}{\|\mathbf{u}_i\|} \quad i = 1, \dots, k.$$

4. Kolmost množín vektorov

DEFINÍCIA 3.17. Nech $S, T \subset \mathbb{R}^n$ sú ľubovoľné neprázdne množiny vektorov

- $\mathbf{u} \perp S$, keď $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ pre všetky $\mathbf{v} \in S$
- $S \perp T$, keď $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ pre všetky $\mathbf{u} \in S$ a $\mathbf{v} \in T$.
- $S^\perp = \{\mathbf{u} \mid \mathbf{u} \perp S\}$ (**ortogonálny (kolmý) doplnok množiny S**).

PRÍKLAD 3.18. Ortogonálne doplnky niektorých množín vektorového priestoru V :

- $\{\mathbf{0}\}^\perp = V$.
- $V^\perp = \{\mathbf{0}\}$.
- Ak $S \subset T$, tak $T^\perp \subset S^\perp$: Nech $\mathbf{v} \in T^\perp$. Potom $\forall \mathbf{u} \in T$ platí $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$. Keďže $S \subset T$, tak a fortiori pre všetky $\mathbf{u} \in S$ platí $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$, teda $\mathbf{v} \in S^\perp$.

LEMA 3.19. Nech $S \subset \mathbb{R}^n$, $S \neq \emptyset$. Potom

- (i) $S^\perp$ je podpriestor $\mathbb{R}^n$,
- (ii) $S \subset S^{\perp\perp} (= (S^\perp)^\perp)$.

Dôkaz. (i) Nech $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in S^\perp$, t.j. pre všetky $\mathbf{v} \in S$ platí, že $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v} = 0$ a $\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v} = 0$. Potom

$$(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v} = 0 + 0 = 0,$$

teda $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \in S^\perp$

Teraz nech $\mathbf{u} \in S^\perp$ a $\lambda \in \mathbb{R}$. Potom pre všetky $\mathbf{v} \in S$

$$(\lambda \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \lambda(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \lambda \cdot 0 = 0,$$

teda aj $\lambda \mathbf{u} \in S^\perp$.

(ii) Nech $\mathbf{v} \in S$. Pre všetky $\mathbf{u} \in S^\perp$ platí, že $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. Z toho ale vyplýva, že $\mathbf{v} \in S^{\perp\perp}$. $\square$

PRÍKLAD 3.20. Opačná inklúzia z Vety 3.19 (ii) vo všeobecnosti neplatí. Dá sa to usúdiť už z časti (i) tejto vety: ak S nie je popriestor, nemôže platiť, že $S = S^{\perp\perp}$, keďže $S^{\perp\perp}$ podpriestorom je.

Skúsme si to ilustrovať konkrétnejšie: v $\mathbb{R}^2$ nech $S = \{(1, 2)\}$ je jednoprvková množina. Jej ortogonálny doplnok $S^\perp$ pozostáva zo všetkých vektorov kolmých na $(1, 2)$. Lahko sa presvedčíme, že je to jednorozmerný podpriestor generovaný vektorom $(2, -1)$:

$$S^\perp = \langle (2, -1) \rangle.$$

Ortogonalný doplnok tejto množiny je vektorový priestor generovaný pôvodnou množinou S :

$$S^{\perp\perp} = \langle (1, 2) \rangle \supsetneq S.$$

VETA 3.21. Nech $U \subset \mathbb{R}^n$ je podpriestor s bázou $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$. Potom

- (i) $\mathbf{v} \perp U$ práve vtedy, keď $\mathbf{v} \perp \mathbf{u}_i$ pre všetky $i = 1, \dots, k$,
- (ii) $\dim U^\perp = n - k$.

Dôkaz. (i) dú

(ii) Nech báze vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ priestoru U majú súradnice $\mathbf{u}_i = (u_{i1}, \dots, u_{in})$. Potom všetky riešenia sústavy

$$\begin{aligned} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \dots + u_{1n}x_n &= 0 \\ u_{21}x_1 + u_{22}x_2 + \dots + u_{2n}x_n &= 0 \\ &\dots \\ u_{k1}x_1 + u_{k2}x_2 + \dots + u_{kn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

sú presne vektory tvoriace ortogonálny doplnok množiny $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$. Z tohto a z lineárnej algebry už vyplýva dokazované tvrdenie. $\square$

V dôkaze predošlej vety sme urobili veľmi užitočné pozorovanie: vyriešiť sústavu homogénnych lineárnych rovníc znamená nájsť ortogonálny doplnok vektorového podpriestoru.

5. Uhol dvoch vektorov

Kým na strednej škole sa najprv žiaci zoznamujú s dĺžkou vektora a uhlom dvoch vektorov a až následne sa pomocou týchto pojmov definuje skalárny súčin dvoch vektorov (viď začiatok kapitoly), v lineárnej algebre sa postupuje naopak: najprv sme si zadefinovali skalárny súčin, potom pomocou neho dĺžku vektora a vzdialenosť bodov, a teraz pomocou skalárneho súčinu zadefinujeme uhol dvoch vektorov.

Z Cauchy-Schwartzovej nerovnosti máme, že

$$-1 \leq \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \leq 1,$$

a preto môžeme uhol dvoch vektorov definovať nasledovne:

DEFINÍCIA 3.22. Nech $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Potom **uhol vektorov $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$** definujeme vzťahom

$$\cos \angle \mathbf{u}\mathbf{v} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}.$$

6. Vektorový súčin

DEFINÍCIA 3.23. Nech $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sú vektory v orientovanom vektorovom priestore $\mathbb{R}^3$ so skalárnym súčinom. **Vektorový súčin** vektorov $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, ozn $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, definujeme nasledovne:

- ak vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sú lineárne závislé, potom $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$,
- ak vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sú lineárne nezávislé, potom $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ je taký vektor $\mathbf{w}$, že
 - $\mathbf{w} \perp \mathbf{u}$ a $\mathbf{w} \perp \mathbf{v}$,
 - vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ v tomto poradí tvoria kladne orientovanú bázu $\mathbb{R}^3$ (súhlasne orientovanú so štandardnou bázou $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$),
 - dĺžka vektora $\mathbf{w}$ je rovná obsahu rovnobežníka určeného vektormi $\mathbf{u}, \mathbf{v}$:

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \angle \mathbf{u}\mathbf{v}.$$

LEMA 3.24. (*Vlastnosti vektorového súčinu.*) Pre vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}_i$ a skalár λ platí

- (i) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$,
- (ii) $(\lambda \mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (\lambda \mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$.
- (iii) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \mathbf{u} \times \mathbf{v}_1 + \mathbf{u} \times \mathbf{v}_2$,

Dôkaz. Platnosť vlastností (i) a (ii) ľahko nahliadneme z definície vektorového súčinu.

O vlastnosti (iii) sa jednoducho presvedčíme, ak sú niektoré z vektorov lineárne závislé. Predpokladajme teda, že vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$ sú lineárne nezávislé.

Skúmame najprv chvíľu vektorový súčin $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Nech $\mathbf{v} = \pi_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) + \mathbf{v}'$ je rozklad vektora $\mathbf{v}$ na zložku kolmú na vektor $\mathbf{u}$ a rovnobežnú s vektorom $\mathbf{u}$ (viď obrázok na strane 23.) Z definície vektorového súčinu vidíme, že $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}'$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme teda predpokladať, že $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}_1$ a $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}_2$.

Z vlastnosti (ii) je ďalej zrejmé, že stačí tvrdenie dokázať pre prípad, keď $\|\mathbf{u}\| = 1$. Spolu s predpokladom, že $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ potom máme, že $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$. Odtiaľ spolu s ostatnými vlastnosťami vektorového súčinu vidíme, že vektor $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$ dostaneme rotáciou vektora $\mathbf{v}$ o 90° v rovine kolmej na $\mathbf{u}$, označme túto rotáciu r . Rotácia vektorov je lineárne zobrazenie (je to asociované zobrazenie k rotácii afinnej roviny), preto zrejme

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = r(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = r(\mathbf{v}_1) + r(\mathbf{v}_2) = \mathbf{u} \times \mathbf{v}_1 + \mathbf{u} \times \mathbf{v}_2.$$

□

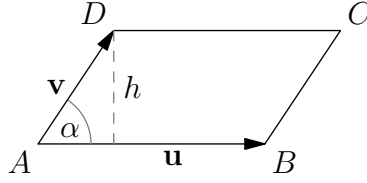
Pomocou týchto vlastností nájdeme teraz spôsob, ako vektorový súčin vypočítat. Nech $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ je štandardná báza:

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0), \quad \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1).$$

Potom pre vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ pomocou vlastností vektorového súčinu máme:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= (u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3) \times (v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3) \\ &= u_1^2 \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 + u_1 v_2 \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 + u_1 v_3 \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 + u_2 v_1 \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 + \cdots + u_3 v_3 \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3 \\ &= (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1) \\ &= \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) \end{aligned}$$

6.1. Výpočet obsahu rovnobežníka (trojuholníka). Vektorový súčin nám dáva nový nástroj pre výpočet obsahu trojuholníka. Zrejme trojuholník, ktorého dve strany sú určené vektormi $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$, má polovičný obsah oproti rovnobežníku určeného týmito vektormi.



Obsah rovnobežníka $ABCD$ ($\mathbf{u} = B - A$, $\mathbf{v} = D - A$) je

$$S = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|.$$

Aby tento vektorový súčin dával zmysel, vnoríme našu rovinu do trojrozmerného priestoru tak, že x - a y -súradnice ostanú zachované a z -súradnica je nulová. Teda pôvodnú rovinu $\mathbb{E}^2$ sme stotožnili s rovinou $z = 0$ v $\mathbb{E}^3$. Potom

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(0, 0, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right).$$

Čiže obsah rovnobežníka určeného vektormi $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ je

$$S = \left\| \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \right\| = |u_1 v_2 - u_2 v_1|.$$

7. Metrický a euklidovský priestor bodov

DEFINÍCIA 3.25. Nech $\mathbb{A}$ je afinný priestor nad $\mathbb{R}$. **Vzdialenosť dvoch bodov** (alebo tiež **metrika**) je akékoľvek zobrazenie $\mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$, $A, B \mapsto d(A, B)$, ktoré spĺňa nasledovné vlastnosti:

- (i) $d(A, B) \geq 0$ pričom $d(A, B) = 0$ práve vtedy, keď $A = B$ (**separačná vlastnosť**),
- (ii) $d(A, B) = d(B, A)$,
- (iii) $d(A, B) + d(B, C) \geq d(A, C)$ (**trojuholníková nerovnosť**).

Pre vzdialenosť bodov A, B sa tiež zvykne používať označenie $|AB|$.

Priestor, v ktorom je definovaná metrika, sa nazýva **metrický**.

Pre metriku nie je nutné mať afinný priestor. Metrika sa dá zaviesť, a často sa aj zavádza, aj na omnoho všeobecnejších množinách, napríklad aj na krivých povrchoch. Aj v rovine existujú rôzne “podivné” metriky:

- Manhattanská metrika: koľko najmenej musí taxikár najazdiť, aby sa v Manhattane dostal z bodu A do bodu B .
- Čebyševova (šachovnicová, maximová) metrika: koľko najmenej krokov musí šachový kráľ urobiť na šachovnici, aby sa dostal z bodu A do bodu B .
- diskretná metrika:

$$d(A, B) = 0 \quad \text{pre} \quad A = B$$

$$d(A, B) = 1 \quad \text{pre} \quad A \neq B$$

Uvidíme teraz, že skalárny súčin vo vektorovej zložke euklidovského priestoru určuje aj metriku na bodovej zložke.

DEFINÍCIA 3.26. Nech $\mathbb{A}$ je afinný priestor nad poľom reálnych čísel, v ktorého vektorovej zložke je definovaný skalárny súčin. **Euklidovskú vzdialenosť bodov** A a B definujeme

$$d(A, B) = \|B - A\| := \sqrt{(B - A) \cdot (B - A)}.$$

Takýto afinný priestor nazývame aj **euklidovským priestorom** a označujeme $\mathbb{E}$.

VEREJNÁ 3.27. Euklidovská vzdialenosť bodov podľa Definície 3.26 je naozaj metriku podľa Definície 3.25. Inými slovami, euklidovský priestor je metrický.

Dôkaz. dú.

□

POZNÁMKA 3.28. Pozor, opačná implikácia k tej vo Vete 3.27 nie je pravdivá! Existujú metrické priestory, ktoré nie sú euklidovské. (Inak: nie každá metrika pochádza zo skalárneho súčinu.) Viď napríklad priestor s diskretnou metrikou.

Budeme pracovať v euklidovskom priestore so štandardným skalárnym súčinom a štandardnou metrikou.

Nech $\mathbb{E}$ je n -rozmerný euklidovský priestor (označujeme tiež $\mathbb{E}^n$), v ktorého vektorovej zložke sa skalárny súčin počíta štandardne (inak: báza, v ktorej pracujeme, je ortonormálna). Ak $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $B = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{E}$, potom vzdialenosť podľa tejto definície je

$$d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \dots + (b_n - a_n)^2}.$$

Ide teda o výpočet vzdialenosti pomocou Pytagorovej vety, ako ju poznáte zo ZŠ.

DEFINÍCIA 3.29. Súradnicová sústava $(O, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ euklidovského priestoru $\mathbb{E}^n$ sa nazýva **karteziánskou**, ak $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ tvorí ortonormálnu bázu vektorového priestoru $V(\mathbb{E}^n) = \mathbb{R}^n$.

(Názov pre karteziánsku sústavu súradníc je odvodený od mena René Descarta, ktorého sme si už spomínali ako jedného zo zakladateľov analytickej geometrie. Latinská („polatinštená“) podoba jeho mena je Renatus Cartesius.)

Podpriestory afinného priestoru

Obmedzíme sa najprv na euklidovské priestory, aj keď mnohé úvahy a konštrukcie sú platné v afinnom priestore nad ľubovoľným bodom.

1. Priamka

Priamku sme si definovali už v časti o afinných zobrazeniach, pripomenieme si a doplníme:

DEFINÍCIA 4.1. Nech $A, B \in \mathbb{E}$, $A \neq B$. **Priamka** $\overleftrightarrow{AB}$ je množina

$$\{(1-t)A + tB \mid \forall t \in \mathbb{R}\} = \{A + t(B-A) \mid \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Ak $X, Y \in \overleftrightarrow{AB}$, vektor $Y - X$ sa nazýva **smerovým vektorom** priamky $\overleftrightarrow{AB}$. Inak: smerové vektory priamky sú tie vektory, ktoré majú na priamke umiestnenie.

DEFINÍCIA 4.2. Body ležiace na spoločnej priamke nazývame **kolineárne**. ($A_1, A_2, \dots$ sú kolineárne, ak existuje priamka p taká, že $A_1 \in p$, $A_2 \in p, \dots$)

Iný spôsob zápisu priamky: pomocou barycentrických súradníc:

$$\overleftrightarrow{AB} = \{\lambda_1 A + \lambda_2 B \mid \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}$$

POZOROVANIE. O smerovom vektore priamky:

- (a) Smerový vektor priamky nie je jednoznačný.
- (b) Nulový vektor je smerovým vektorom každej priamky.
- (c) Ak $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sú dva nenulové smerové vektory priamky $\overleftrightarrow{AB}$, potom $\mathbf{v} = c\mathbf{u}$ pre nejaké $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$.
- (d) Ak $\mathbf{u}$ je smerovým vektorom priamky $\overleftrightarrow{AB}$ a bod $C \in \overleftrightarrow{AB}$, tak aj bod $C + \mathbf{u} \in \overleftrightarrow{AB}$.
- (e) Všetky smerové vektory priamky tvoria spolu jednorozmerný vektorový priestor, ktorý nazývame **smer** alebo **smerový priestor** priamky $\overleftrightarrow{AB}$. Smer priamky $\overleftrightarrow{AB}$ budeme tiež označovať $V(\overleftrightarrow{AB})$.

Dôkaz. (a),(b) Zrejmé.

(c) $\mathbf{u} = D - C$, $\mathbf{v} = F - E$. Nech $C = A + t_C(B - A)$, podobne pre ostatné body, potom $\mathbf{u} = (t_D - t_C)(B - A)$, $\mathbf{v} = (t_F - t_E)(B - A)$, $t_C \neq t_D$, $t_E \neq t_F$, keďže $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sú nenulové, a odtiaľ vyplýva tvrdenie.

(d) Nech $C = A + t_C(B - A)$. Ďalej keďže $\mathbf{u}$ je smerovým vektorom priamky $\overleftrightarrow{AB}$, tak $\mathbf{u} = Y - X$ a podľa pozorovania v dôkaze časti (c) máme $\mathbf{u} = (t_Y - t_X)(B - A)$. Pre bod $C + \mathbf{u}$ potom platí:

$$C + \mathbf{u} = A + t_C(B - A) + (t_Y - t_X)(B - A) = A + (t_C + t_Y - t_X)(B - A),$$

teda ide o bod na $\overleftrightarrow{AB}$.

(e) Potrebujeme overiť, že ak $\mathbf{u}$ je smerový vektor priamky, tak aj každý jeho násobok je smerový vektor priamky, a tiež ak $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sú smerové vektory priamky, tak aj ich súčet $\mathbf{u} + \mathbf{v}$

je smerový vektor priamky. Ide o analogické výpočty k tým v predchádzajúcich tvrdeniach. Jednorozmernosť vyplýva z (c) (každý smerový vektor je násobkom pevne zvoleného nenulového smerového vektora priamky). $\square$

TVRDENIE 4.3. *Priamka je jednorozmerným afinným priestorom.*

Dôkaz. $V(\overleftrightarrow{AB})$ je jednorozmerný vektorový priestor (pozorovanie (e)).

Operácia $+$: $\overleftrightarrow{AB} \times V(\overleftrightarrow{AB}) \rightarrow \overleftrightarrow{AB}$

- je dobre definovaná (pozorovanie (d)),
- vlastnosti (i) a (ii) Definície 1.6 afinného priestoru platia na $\overleftrightarrow{AB}$, lebo platia v celom afinnom priestore,
- vlastnosť (iii) v definícii afinného priestoru tiež platí (pozorovanie (c)).

$\square$

Zhrnutie: Keď si na priamke p pevne zvolíme bod A a nenulový smerový vektor $\mathbf{u}$, tak máme bijekciu medzi hodnotami parametra t a bodmi priamky p :

- pre každé $t \in \mathbb{R}$ je bod $A + t\mathbf{u}$ bodom priamky p ,
- $B \in p$ je ľubovoľný iný bod priamky p , tak existuje jediné $t \in \mathbb{R}$ také, že $B = A + t\mathbf{u}$.

Máme tak parametrické vyjadrenie priamky, ktorá je daná bodom A a vektorom $\mathbf{u}$: každý bod X tejto priamky má jednoznačné vyjadrenie ako $X = A + t\mathbf{u}$.

2. Priamka v afinnej rovine

2.1. Vyjadrenie priamky v rovine. Počnúc definíciou boli všetky úvahy o priamke, jej bodoch a smerových vektoroch nezávislé od dimenzie afinného priestoru, v ktorom pracujeme. Až teraz, keď ideme parametrické vyjadrenie priamky rozpísať do súradníc, sa obmedzíme na konkrétny priestor, v tejto časti to bude rovina.

Rozpísané do súradníc: ak $A = (a_1, a_2)$ a $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, potom **parametrické vyjadrenie (parametrické rovnice)** priamky je

$$\begin{aligned} x &= a_1 + u_1 t \\ y &= a_2 + u_2 t \end{aligned}$$

Parametrické vyjadrenie priamky nie je jednoznačné, závisí od voľby bodu A a smerového vektora $\mathbf{u}$.

VETA 4.4. *Pre neznáme x, y tvorí množina všetkých riešení rovnice*

$$(6) \quad ax + by + c = 0, \quad \text{kde } a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0 \text{ alebo } b \neq 0$$

priamku v afinnej rovine. Množina riešení asociovanej homogénnej rovnice

$$ax + by = 0$$

tvorí smerový priestor tejto priamky.

Dôkaz. Rovnica (6) je riešiteľná a má aspoň dve rôzne riešenia: ak $a \neq 0$, ľubovoľne zvolíme y a dopočítame x .

Nech $P = (p_1, p_2), Q = (q_1, q_2)$ sú dve rôzne riešenia, t.j. platí

$$\begin{aligned} ap_1 + bp_2 + c &= 0 \\ aq_1 + bq_2 + c &= 0. \end{aligned}$$

Pre smerový vektor $\mathbf{u} = Q - P$ priamky $\overleftrightarrow{PQ}$ platí

$$au_1 + bu_2 = 0,$$

t.j. je riešením príslušnej homogénnej rovnice. Z lineárnej algebry vieme, že riešenia homogénnej rovnice $ax + by = 0$ tvoria jednorozmerný lineárny priestor generovaný vektorom $\mathbf{u}$, ide teda o smerový priestor priamky $\overleftrightarrow{PQ}$.

Každý bod tvaru $P + t\mathbf{u}$ (t.j. každý bod na priamke $\overleftrightarrow{PQ}$) je riešením pôvodnej (nehomogénnej) rovnice. Ukázali sme tak, že ak bod leží na priamke $\overleftrightarrow{PQ}$, tak patrí do množiny riešení rovnice (6).

Pre opačnú inklúziu nech $R = (r_1, r_2)$ vyhovuje rovnici, t.j. $ar_1 + br_2 + c = 0$. Potom $R - P$ vyhovuje príslušnej homogénnej rovnici, a preto $R - P = c\mathbf{u}$, lebo riešenia homogénnej rovnice tvoria jednorozmerný vektorový priestor. Preto $R = P + c\mathbf{u} \in \overleftrightarrow{PQ}$. $\square$

VETA-DEFINÍCIA 4.5. Ak $\overleftrightarrow{PQ} \subset \mathbb{E}^2$ je priamka, potom existuje rovnica

$$ax + by + c = 0, \quad (a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \text{ alebo } b \neq 0)$$

taká, že množina jej riešení sú presne body priamky $\overleftrightarrow{PQ}$. Táto lineárna rovnica sa nazýva **všeobecnou rovnicou priamky**.

Dôkaz. Nech $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ je riešenie rovnice $(q_1 - p_1)x + (q_2 - p_2)y = 0$, napríklad $\mathbf{n} = (q_2 - p_2, p_1 - q_1)$. Potom $n_1x + n_2y - (n_1p_1 + n_2p_2) = 0$ je hľadaná rovnica. $\square$

DEFINÍCIA 4.6. V $\mathbb{E}^2$ **normálovým vektorom priamky** nazývame nenulový vektor kolmý na smer priamky.

Ak má priamka p všeobecnú rovnicu $ax + by + c = 0$, potom $\mathbf{n} = (a, b)$ je jej normálový vektor.

Ako sa dopracovať k všeobecnej rovnici priamky?

- Z parametrických rovníc eliminovať parameter t .
- Ak p je daná parametricky ako $A + t\mathbf{u}$, potom p je množina všetkých takých bodov X , pre ktoré je $X - A$ kolmé na $\mathbf{n} = \mathbf{u}^\perp$.
- Ak p je daná parametricky ako $A + t\mathbf{u}$, potom $n_1x + n_2y + c = 0$ je všeobecná rovnica, kde $\mathbf{n} = (n_1, n_2) = (u_2, -u_1)$ je normálový vektor priamky, a člen c dopočítame dosadením bodu A .
- Ak $(0, q)$ leží na priamke so smerom $(1, k)$, tak

$$y = kx + q$$

je všeobecná rovnica priamky. Ide o tzv. **smernicový tvar** rovnice priamky. Priamky rovnobežné s y -osou (t.j. so smerom $(0, 1)$) smernicový tvar nemajú.

- Ak $(e, 0)$ a $(0, f)$ ležia na priamke p , potom

$$\frac{x}{e} + \frac{y}{f} - 1 = 0$$

je všeobecná rovnica priamky. Ide o tzv. **úsekový tvar** rovnice priamky. Tento postup funguje v prípade, že priamka p pretína obe súradnicové osi, t.j. nie je so žiadnou z nich rovnobežná.

- Ak p je daná parametricky ako $A + t\mathbf{u}$, kde $A = (a_1, a_2)$ a $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, tak

$$\frac{x - a_1}{u_1} = \frac{y - a_2}{u_2}$$

je tzv. **kanonická rovnica priamky**.

- najvýhodnejšie vyjadrenie priamky: obsahuje parametrické vyjadrenie aj všeobecnú rovnicu

- že je to také výhodné, pripúšťa sa výnimka: v menovateli môže byť 0, teda kanonickú rovnicu má aj priamka rovnobežná s niektorou osou

Opačný postup: prevod všeobecnej rovnice na parametrické vyjadrenie: Nech

$$p: ax + by + c = 0.$$

Nájsť parametrické vyjadrenie znamená

- vyriešiť rovnicu,
- nájsť jeden bod na priamke a smerový vektor.

POZOROVANIE. Parametrické vyjadrenie priamky (t.j. vyjadrenie priamky pomocou bodu, ktorý na nej leží a smerového vektora) je výhodné, keď chceme generovať body, ktoré ležia na priamke. Vďaka parametrickému vyjadreniu ľahko priamku načrtneme.

Všeobecná rovnica je výhodná, keď pre daný bod chceme overiť, či patrí danej priamke. Ľahko tiež vidíme, či dve rovnice popisujú tú istú priamku: napriek tomu, že máme veľa tvarov rovnice priamky (úsekový, smernicový, kanonický), jedná sa stále o tú istú všeobecnú rovnicu (modulo násobenie nenulovým reálnym číslom).

2.2. Kolmé premietanie v rovine a vzdialenosť bodu od priamky. Situácia: daná je priamka v reálnej rovine a daný je bod, ktorý na nej neleží. Chceme vypočítať vzdialenosť bodu od priamky.

Dané A, p .

- $p_A^\perp$ je priamka prechádzajúca bodom A a kolmá na p , **kolmopremietacia priamka** bodu A na priamku p ,
- $A_p^\perp = p \cap p_A^\perp$ je **kolmý priemet** bodu A na priamku p ,
- $\pi: \mathbb{E}^2 \rightarrow p = \mathbb{E}^1, A \mapsto A_p^\perp$ je **kolmé premietanie** na priamku p .

Vzdialenosť bodu A od priamky p (ozn. $|Ap|$) je $|AA_p^\perp|$, t.j. vzdialenosť bodu A od jeho kolmého priemetu na priamku p .

VETA 4.7. V $\mathbb{E}^2$ je daná priamka $p \subset \mathbb{E}^2$ a bod A . Potom pre každý bod $X \in p, X \neq A_p^\perp$ platí, že $|AX| > |AA_p^\perp|$.

Dôkaz. $X \in p$ ľubovoľný, potom $X - A = (X - A_p^\perp) + (A_p^\perp - A)$ a z kolmosti

$$|X - A|^2 = \dots = |X - A_p^\perp|^2 + |A_p^\perp - A|^2,$$

čiže $|AX| \geq |AA_p^\perp|$. □

Teda pre bod A a priamku p vzdialenosťou bodu A od priamky p (ozn. $|Ap|$) rozumieme najmenšiu zo vzdialeností $|AX|$ pre $X \in p$.

Vypočítame teraz vzdialenosti bodu $Q = (q_1, q_2)$ od priamky $p: ax + by + c = 0$. Kolmopremietacia priamka (bod Q na priamku p) je

$$\begin{aligned} p_Q^\perp: x &= q_1 + at \\ y &= q_2 + bt \end{aligned}$$

Priesečník $Q_p^\perp = p \cap p_Q^\perp$ je bod zodpovedajúci na priamke $p_Q^\perp$ parametru

$$t_0 = -\frac{aq_1 + bq_2 + c}{a^2 + b^2},$$

t.j. $Q_p^\perp = (q_1 + at_0, q_2 + bt_0)$. Potom

$$|QQ_p^\perp| = |(at_0, bt_0)| = \sqrt{a^2 t_0^2 + b^2 t_0^2} = \frac{|aq_1 + bq_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

2.3. Uhol dvoch priamok. Uhol priamok – cez uhol ich smerových vektorov (viď Definícia 3.22) Nech $\mathbf{u}$ je nenulový smerový vektor priamky p a $\mathbf{v}$ je nenulový smerový vektor priamky q . Potom aj $-\mathbf{v}$ je smerový vektor priamky q , no uhly $\angle \mathbf{u}\mathbf{v}$ a $\angle \mathbf{u}(-\mathbf{v})$ spravidla zhodné nebudú. Pod **uhlom priamok** budeme rozumieť menší z týchto dvoch uhlov, teda

$$\cos \angle pq = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}.$$

Dôkaz korektnosti definície. Ak $\mathbf{u}$ resp. $\mathbf{v}$ je nenulový smerový vektor priamky p resp. q a nech $c, d \in \mathbb{R}^*$. Potom

$$\frac{|c\mathbf{u} \cdot d\mathbf{v}|}{\|c\mathbf{u}\| \|d\mathbf{v}\|} = \frac{|cd| |(\mathbf{u}) \cdot (\mathbf{v})|}{|c| \|\mathbf{u}\| |d| \|\mathbf{v}\|} = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}.$$

Tiež platí, že

$$0 \leq \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \leq 1$$

a že rovnica

$$\cos x = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$$

má na intervale $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ práve jedno riešenie. $\square$

POZNÁMKA 4.8. Uhol dvoch priamok je reálne číslo v intervale $[0, \frac{\pi}{2}]$, nie časť roviny (ako zrejme poznáte pojem uhla zo ZŠ/SS).

3. Priamka a rovina v $\mathbb{E}^3$

3.1. Priamka parametricky. Parametrické vyjadrenie priamky, ktorá je daná bodom A a vektorom $\mathbf{u}$ funguje aj v trojrozmernom priestore, (a vlastne v ľubovoľnerozmernom): pre ľubovoľný bod X priamky existuje jednoznačné $t \in \mathbb{R}$ také, že $X = A + t\mathbf{u}$. Rozpísané do súradníc: ak $A = (a_1, a_2, a_3)$ a $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, potom

$$\begin{aligned} x &= a_1 + u_1 t \\ y &= a_2 + u_2 t \\ z &= a_3 + u_3 t. \end{aligned}$$

PRÍKLAD 4.9. Ak chceme overiť, či bod P leží na priamke prechádzajúcej bodmi A, B , máme možnosti:

- cez parametrické vyjadrenie priamky
- cez lineárnu závislosť vektorov

3.2. Rovina. Na druhej strane skúmame štruktúru riešení lineárnej rovnice o troch neznámych

$$(7) \quad ax + by + cz + d = 0,$$

kde aspoň jeden z lineárnych koeficientov je nenulový. Nech P a Q sú riešeniami (7). Potom vektor $Q - P$ je riešením homogénnej rovnice

$$ax + by + cz = 0.$$

Ak P je riešením nehomogénnej rovnice (7) a $\mathbf{u}$ je riešením príslušnej homogénnej rovnice, potom bod $Q = P + \mathbf{u}$ je tiež riešením rovnice (7).

Z uvedeného už vyplýva, že ak P je jedno riešenie (7) a vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ generujú priestor riešení príslušnej homogénnej rovnice, potom množina $P + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ je množinou všetkých riešení rovnice (7).

Množina $P + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, kde $P \in \mathbb{E}$ a $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sú lineárne nezávislé vektory, je **rovina**. Podpriestor generovaný vektormi $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sa nazýva **smerovým priestorom roviny** alebo tiež **smerom**, jeho vektory sú **smerovými vektormi roviny**.

DEFINÍCIA 4.10. Body ležiace v spoločnej rovine nazývame **koplanárne**. (Formálnejším jazykom: $A_1, A_2, \dots$ sú koplanárne, ak existuje rovina α taká, že $A_1 \in \alpha$, $A_2 \in \alpha, \dots$)

Rovinu si môžeme definovať aj podobne, ako sme si definovali priamku: Nech $P, Q, R \in \mathbb{E}$ sú nekolineárne body. **Rovina** určená bodmi P, Q, R je množina

$$\{\lambda_0 P + \lambda_1 Q + \lambda_2 R \mid \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}.$$

Táto množina je totožná s množinou

$$\{P + \lambda_1(Q - P) + \lambda_2(R - P) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} = P + \langle Q - P, R - P \rangle,$$

a teda naše dve definície roviny sú ekvivalentné.

Zápis roviny ako množiny

$$\{P + s\mathbf{u} + t\mathbf{v} \mid s, t \in \mathbb{R}\}$$

je už jej parametrickým vyjadrením:

$$\begin{aligned} x &= p_1 + u_1 s + v_1 t \\ y &= p_2 + u_2 s + v_2 t \\ z &= p_3 + u_3 s + v_3 t. \end{aligned}$$

Rovnica $ax + by + cz + d = 0$ taká, že rovina $P + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ je presne množinou jej riešení, sa nazýva jej **všeobecnou rovnicou**.

Prechod od všeobecnej rovnice k parametrickému vyjadreniu:

- (1) Nájsť jedno (ľubovoľné) riešenie P všeobecnej rovnice
- (2) Nájsť všetky riešenia zodpovedajúcej homogénnej rovnice, t.j. nájsť dva lineárne nezávislé vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$, ktoré generujú priestor riešení homogénnej rovnice.

Parametrické vyjadrenie roviny je potom $P + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$.

Nájdenie všeobecnej rovnice roviny:

- (a) Eliminujeme parametre z parametrického vyjadrenia. Funguje vždy, no nemusí to byť najefektívnejšia metóda.
- (b) Ak je rovina daná $P + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$, pre lineárne koeficienty hľadanej všeobecnej rovnice musí platiť:

$$\begin{aligned} au_1 + bu_2 + cu_3 &= 0 & \text{kde } (u_1, u_2, u_3) &= \mathbf{u} \\ av_1 + bv_2 + cv_3 &= 0 & \text{kde } (v_1, v_2, v_3) &= \mathbf{v}, \end{aligned}$$

teda (a, b, c) je vektor kolmý na $\mathbf{u}$ aj $\mathbf{v}$ a nájdeme ho ako ortogonálny doplnok $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ alebo ako vektorový súčin $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ (každý si nájde svoj obľubený spôsob). Vektor (a, b, c) sa nazýva **normálovým vektorom** roviny. Je to vektor kolmý na smer roviny alebo inak: vektor generujúci ortogonálny doplnok smeru roviny. Na záver absolútny koeficient d dopočítame dosadením P do všeobecnej rovnice.

- (c) Ak $(p, 0, 0), (0, q, 0), (0, 0, r)$ ležia v rovine, potom jej rovnica je

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} - 1 = 0.$$

Ide o tzv. **úsekový tvar** rovnice roviny.

Až na násobenie konštantou je všeobecná rovnica roviny jednoznačná, keďže normálový vektor je určený jednoznačne až na násobenie konštantou.

3.3. Priamka všeobecnými rovnicami. Priamka je priesečnica dvoch rovín, preto pre jej popísanie potrebujeme dve rovnice:

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

kde (a_1, b_1, c_1) a (a_2, b_2, c_2) sú lineárne nezávislé vektory. Tieto rovnice nie sú jednoznačné.

- Algebraický pohľad: ak množina bodov je riešením dvoch rovníc, je riešením aj ľubovoľnej inej rovnice, ktorú dostaneme ako kombináciu pôvodných dvoch rovníc. Každá nezávislá dvojica takýchto rovníc má tú istú množinu riešení.
- Geometrický pohľad: existuje nekonečne veľa rovín prechádzajúcich danou priamkou. Stačí z nich vybrať ľubovoľné dve, a tie už danú priamku jednoznačne určujú. Ich rovnice spolu tvoria sústavu všeobecných rovníc priamky.

Prechod od všeobecných rovníc ku parametrickému vyjadreniu: ako v prípade roviny v $\mathbb{E}^3$ alebo priamky v $\mathbb{E}^2$.

Prechod od parametrických rovníc k všeobecným rovniciam:

- Geometricky hľadáme dve roviny prechádzajúce danou priamkou. Ak $\mathbf{u}$ je smerový vektor priamky, tak normálové vektory hľadaných rovín sú kolmé na $\mathbf{u}$. Treba teda nájsť ortogonálny doplnok $\langle \mathbf{u} \rangle^\perp = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ a vtedy $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ určujú lineárne koeficienty hľadaných rovníc. Absolútne členy dopočítame dosadením bodu priamky.
- Výpočtovo najjednoduchšie: v jednej z parametrických rovníc (dokopy sú tri, pre každú súradnicu jedna) si vyjadríme parameter a dosadíme do zvyšných dvoch.
- Špeciálny tvar všeobecných rovníc: kanonické rovnice:

$$\frac{x - a_1}{u_1} = \frac{y - a_2}{u_2} = \frac{z - a_3}{u_3},$$

kde $A = (a_1, a_2, a_3)$ je bod na priamke a $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ je jej smerový vektor. Znovu sa výnimočne pripúšťa nula v menovateli.

PRÍKLAD 4.11. Ukážte, že body $M = (-3, -3, 7)$, $N = (-5, 2, 2)$ ležia v rovine určenej bodmi $A = (2, 1, 3)$, $B = (2, 4, 0)$, $C = (-3, 0, 4)$ a nájdite všeobecnú rovnicu priamky MN v afinnej súradnicovej sústave $(A, B - A, C - A)$.

3.4. Premietanie do roviny, vzdialenosť bodu od roviny. Podobne ako pri premietaní na priamku v rovine chceme teraz premietnuť v $\mathbb{E}^3$ bod do roviny a tento priemet použiť na výpočet vzdialenosti pôvodného bodu od danej roviny. Podobne znovu bude platiť, že pre daný bod P je jeho priemet do roviny najbližším bodom k P zo všetkých bodov v tejto rovine.

Daná je rovina α v reálnom trojrozmernom priestore $\mathbb{E}^3$ a daný je bod P , ktorý v nej neleží.

- $\alpha_P^\perp$ je priamka prechádzajúca bodom P a kolmá na α , **kolmopremietacia priamka** bodu P do roviny α ,
- $P_\alpha^\perp = \alpha \cap \alpha_P^\perp$ je **kolmý priemet** bodu P do roviny α ,
- $\pi: \mathbb{E}^3 \rightarrow \alpha \cong \mathbb{E}^2$, $P \mapsto P_\alpha^\perp$ je **kolmé premietanie** do roviny α .

Vzdialenosť bodu P od roviny α (ozn. $|P\alpha|$) je $|PP_\alpha^\perp|$, t.j. vzdialenosť bodu P od jeho kolmého priemetu do roviny α .

VETA 4.12. *Nech $P \in \mathbb{E}^3$ je bod a $\alpha \subset \mathbb{E}^3$ je rovina. Potom pre každý bod $X \in \alpha$, $X \neq P_\alpha^\perp$ platí, že $|PX| > |PP_\alpha^\perp|$.*

Dôkaz. Dokazuje sa presne tak isto, ako v prípade premietania bodu na priamku. □

TVRDENIE 4.13. *Nech $P = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{E}^3$ je bod a $\alpha \subset \mathbb{E}^3$ je rovina so všeobecnou rovnicou $ax + by + cz + d = 0$.*

Potom

$$|PP_\alpha^\perp| = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Dôkaz. Dokazuje sa presne tak isto, ako analogické tvrdenie pre vzdialenosť bodu od priamky v $\mathbb{E}^2$. dú. $\square$

4. Podpriestory afinného priestoru

4.1. Definícia a parametrické vyjadrenie. Podpriestor afinného priestoru je zovšeobecnením pojmu priamky a roviny v $\mathbb{E}^2$ alebo $\mathbb{E}^3$.

POZNÁMKA 4.14. Mnohé z nasledovných konštrukcií sa dajú vykonať aj v ľubovoľnom afinnom priestore. Euklidovský priestor začína byť nutný, keď potrebujeme kolmosť, vzdialenosť bodov a podobne.

DEFINÍCIA 4.15. Nech $P \in \mathbb{E}^n$ a nech $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$ sú lineárne nezávislé vektory z $V(\mathbb{E}^n) = \mathbb{R}^n$. Potom

$$\alpha = \{P + t_1\mathbf{u}_1 + \dots + t_m\mathbf{u}_m \mid t_1, \dots, t_m \in \mathbb{R}\} = P + \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m \rangle \subset \mathbb{E}^n$$

je **afinný podpriestor** (niekedy tiež **lineárna varieta**) priestoru $\mathbb{E}^n$.

Priestor $\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m \rangle$ sa nazýva **smerom (smerovým priestorom)** podpriestoru α , označujeme ho tiež $V(\alpha)$. Vektory priestoru $V(\alpha)$ voláme **smerovými vektormi** podpriestoru α .

Dimenzia (rozmer) podpriestoru α je $\dim \alpha := \dim V(\alpha)$.

Vieme už, že jednorozmerný afinný priestor sa nazýva priamka, dvojrozmerný zas rovina.

Zrejme každý afinný podpriestor je neprázdny, lebo v označení z definície máme, že $P \in \alpha$. Afinný podpriestor môžeme vnímať ako umiestnenie podpriestoru vektorového priestoru $\mathbb{R}^n$ do bodu P v priestore $\mathbb{E}^n$.

Z definície (afinného) podpriestoru hneď dostávame aj jeho parametrické vyjadrenie

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1 + u_{11}t_1 + \dots + u_{m1}t_m \\ x_2 &= p_2 + u_{12}t_1 + \dots + u_{m2}t_m \\ &\dots \\ x_n &= p_n + u_{1n}t_1 + \dots + u_{mn}t_m. \end{aligned}$$

DEFINÍCIA 4.16. Body $P_0, P_1, \dots, P_m$ sú **afinne nezávislé**, ak vektory $P_1 - P_0, \dots, P_m - P_0$ sú lineárne nezávislé.

Pre $m = n$ to znamená, že body $P_0, P_1, \dots, P_n$ sú afinne nezávislé práve vtedy, keď tvoria barycentrický súradnicový systém.

PRÍKLAD 4.17.

- P_0, P_1 sú afinne nezávislé, keď sú rôzne.
- P_0, P_1, P_2 sú afinne nezávislé, keď nie sú kolineárne.
- P_0, P_1, P_2, P_3 sú afinne nezávislé, keď nie sú koplanárne.
- $\dots$
- $P_0, P_1, \dots, P_m$ sú afinne nezávislé, keď neexistuje afinný podpriestor dimenzie menšej ako m , ktorý by ich všetky obsahoval.

Podobne, ako sme mali v prípade priamky a roviny, môžeme afinný podpriestor charakterizovať ako množinu všetkých afinných kombinácií daných afinne nezávislých bodov:

TVRDENIE 4.18. *Nech $P_0, P_1, \dots, P_m \in \mathbb{E}^n$ sú afinne nezávislé. Potom*

$$\langle P_0, P_1, \dots, P_m \rangle = \{ \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_m P_m \mid \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1 \}$$

je m -rozmerný afinný podpriestor $\mathbb{E}^n$.

Dôkaz. Označme

$$U = \langle P_1 - P_0, P_2 - P_0, \dots, P_m - P_0 \rangle,$$

teda U je m -rozmerný vektorový priestor. Overíme, že

$$\langle P_0, P_1, \dots, P_m \rangle = P_0 + U.$$

Nech $Q \in P_0 + U$, teda

$$\begin{aligned} Q &= P_0 + \lambda_1(P_1 - P_0) + \dots + \lambda_m(P_m - P_0) \\ &= (1 - \lambda_1 - \dots - \lambda_m)P_0 + \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_m P_m, \end{aligned}$$

teda $Q \in \langle P_0, P_1, \dots, P_m \rangle$. Presne tak isto ukážeme aj druhú inklúziu. $\square$

TVRDENIE 4.19. *Nech $\alpha = P + U$.*

- (i) *Ak $Q \in \alpha$, potom $\alpha = Q + U$, t.j. bod P nie je nijak výnimočný.*
- (ii) *$U = \{R - Q \mid Q, R \in \alpha\}$, t.j. $\mathbf{u}$ je smerový vektor α práve vtedy, keď $\mathbf{u} = R - Q$ pre nejaké $Q, R \in \alpha$.*
- (iii) *α je afinným priestorom.*

Dôkaz. (i) Nech $Q = P + \mathbf{u}$. Potom $Q + U = P + \mathbf{u} + U = P + U$. Komu to nie je zjavné, môže si detailne dokázať dve inklúzie.

(ii) Treba overiť dve implikácie:

- ak $\mathbf{u} \in U$, potom $\mathbf{u}$ má v podpriestore α umiestnenie, t.j. existujú body $Q, R \in \alpha$, že $\mathbf{u} = R - Q$,
- ak $\mathbf{u} = R - Q$ pre nejaké body $Q, R \in \alpha$, potom $\mathbf{u} \in U$,

čo je len triviálne prepisovanie definície afinného podpriestoru.

(iii) Treba si spomenúť na definíciu afinného priestoru, potom tvrdenie hneď vyplynie z už dokázaného. $\square$

TVRDENIE 4.20. *Neprázdna množina $\alpha \subset \mathbb{E}^n$ je podpriestor $\mathbb{E}^n$ práve vtedy, keď s každými dvoma rôznymi bodmi obsahuje celú priamku nimi určenú.*

Dôkaz. Nech α je afinný podpriestor $\mathbb{E}^n$. Nech $A, B \in \alpha = P + U$, t.j. $A = P + \mathbf{u}$ a $B = P + \mathbf{v}$, kde $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$. Potom pre $C \in \overleftrightarrow{AB}$, $C = A + t(B - A)$ máme

$$C = P + ((1 - t)\mathbf{u} + t\mathbf{v})$$

a tento bod zrejme leží v α .

Nech teraz naopak neprázdna množina α má vlastnosť, že s každými dvoma rôznymi bodmi obsahuje celú priamku. Nech P je pevne zvolený bod v α . Uvažujme množinu vektorov

$$U = \{Q - P \mid Q \in \alpha\}.$$

Ukážeme, že U je vektorový podpriestor $\mathbb{R}^n = V(\mathbb{E}^n)$, čo potom bude znamenať, že $\alpha = P + U$, teda že α je podpriestor $\mathbb{E}^n$.

- Je zrejmé, že $U \neq \emptyset$, lebo $\mathbf{0} = P - P \in U$.
- Nech $\mathbf{u} \in U$. To znamená, že existuje $Q \in \alpha$ taký, že $Q = P + \mathbf{u}$. Na priamke $\overleftrightarrow{PQ}$ zoberme bod $R = P + \lambda(Q - P)$. Potom $R - P = \lambda\mathbf{u}$, čiže $\lambda\mathbf{u} \in U$.

- Nech $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$, teda v α existujú body Q, R také, že $Q = P + \mathbf{u}$ a $R = P + \mathbf{v}$. Na priamke $\overrightarrow{QR}$ máme bod $\frac{1}{2}(Q + R) \in \alpha$ a teda vektor $\frac{1}{2}(Q + R) - P = \frac{1}{2}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \in U$. Z už ukázaného potom máme, že $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in U$

□

4.2. Všeobecné rovnice afinného podpriestoru. Uvažujme sústavu

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

pre neznáme $x_1, \dots, x_n$. Skrátené budeme sústavu zapisovať $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

TVRDENIE 4.21. *Nech sústava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ má riešenie. Potom všetky jej riešenia tvoria podpriestor v $\mathbb{E}^n$.*

Dôkaz. Nech P je riešenie sústavy. Homogénna sústava $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ je riešiteľná, jej riešením je vektorový priestor U . Presne tak ako v prípade priamky a roviny sa presvedčíme, že riešenia nehomogénnej sústavy tvoria množinu $P + U$, ktorá je podpriestorom $\mathbb{E}^n$. □

VETA 4.22. *Nech $\alpha \subset \mathbb{E}^n$ je podpriestor. Potom existuje sústava rovníc, ktorej riešením je presne α .*

Dôkaz. Nech $\alpha = P + \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r \rangle$. Ortogonálny doplnok priestoru $V(\alpha)$ nájdeme ako riešenie sústavy ($\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ je neznáma)

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{y} &= 0 \\ \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{y} &= 0 \\ &\vdots \\ \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{y} &= 0 \end{aligned}$$

Nech $V(\alpha)^\perp = \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m \rangle$. Potom $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ je sústava, ktorej riešením je $V(\alpha) = \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r \rangle$. Pravú stranu sústavy dopočítame dosadením súradníc bodu P . □

DEFINÍCIA 4.23. **Sústavou všeobecných rovníc** podpriestoru α budeme rozumieť každú lineárne nezávislú sústavu rovníc $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, ktorú spĺňajú presne všetky body α .

Z dôkazu vyplýva vzťah medzi počtom rovníc a dimenziou podpriestoru: ak sústava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ o n neznámych $x_1, \dots, x_n$ pozostáva z m nezávislých rovníc a je riešiteľná, tak riešením je $(n - m)$ -rozmerný afinný podpriestor.

Špeciálne podpriestory: priamka a nadrovina.

DEFINÍCIA 4.24. Ak dimenzia $\alpha \subset \mathbb{E}^n$ je $n - 1$, tak α sa nazýva **nadrovina**. Je určená jednou všeobecnou rovnicou

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b, \quad (\text{kde } (a_1, a_2, \dots, a_n) \neq (0, 0, \dots, 0))$$

a vtedy vektor $(a_1, \dots, a_n)$ sa nazýva **normálovým vektorom** nadroviny α , ide o vektor kolmý na smer nadroviny α .

Každý podpriestor v $\mathbb{E}^n$ je prienikom nadrovín.

DEFINÍCIA 4.25. **Kanonickými rovnicami priamky** $p : P + \langle \mathbf{u} \rangle \subset \mathbb{E}^n$ nazývame vyjadrenie

$$\frac{x_1 - p_1}{u_1} = \frac{x_2 - p_2}{u_2} = \dots = \frac{x_n - p_n}{u_n},$$

kde $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ a $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$.

4.3. Prienik a vzájomná poloha afinných podpriestorov.

TVRDENIE 4.26. *Nech $\alpha, \beta \subset \mathbb{E}^n$ sú podpriestory. Ak $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$, potom je $\alpha \cap \beta$ tiež podpriestorom $\mathbb{E}^n$ a platí*

$$V(\alpha \cap \beta) = V(\alpha) \cap V(\beta).$$

Dôkaz. Potrebujeme ukázať dve inklúzie v rovnosti $\alpha \cap \beta = P + (V(\alpha) \cap V(\beta))$, kde $P \in \alpha \cap \beta$.

Zapišeme $\alpha = P + V(\alpha)$ a $\beta = P + V(\beta)$. Ak $Q \in \alpha \cap \beta$, tak $Q = P + \mathbf{u}$, kde $\mathbf{u} \in V(\alpha)$, a tiež $Q = P + \mathbf{v}$, kde $\mathbf{v} \in V(\beta)$. Teda $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Odtiaľ vyplýva, že $Q \in P + (V(\alpha) \cap V(\beta))$.

Opačná inklúzia je zrejímavá. □

TVRDENIE 4.27. *Nech $V(\alpha) \subset V(\beta)$. Ak $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$, potom $\alpha \subset \beta$.*

Dôkaz. Ak $P \in \alpha \cap \beta$, potom $\alpha = P + V(\alpha)$ a $\beta = P + V(\beta)$. Odtiaľ je už tá inklúzia jasná. □

Pre vyšetovanie vzájomnej polohy podpriestorov α a β je užitočné uvažovať dve kritériá:

- (1) $V(\alpha) \subseteq V(\beta)$ alebo $V(\beta) \subseteq V(\alpha)$, vtedy hovoríme, že α a β sú **rovnobežné**, $\alpha \parallel \beta$, inak nie sú rovnobežné, $\alpha \nparallel \beta$
- (2) $\alpha \cap \beta = \emptyset$, vtedy hovoríme, že α a β sú disjunktné alebo že sa **nepretínajú**. V opačnom prípade hovoríme, že α a β sa **pretínajú**.

Dostaneme tak štyri možnosti pre vzájomnú polohu podpriestorov α a β :

- inklúzia ($\alpha \subset \beta$ alebo $\alpha \supset \beta$)
- pravá rovnobežnosť ($V(\alpha) \subset V(\beta)$ alebo $V(\alpha) \supset V(\beta)$ a $\alpha \cap \beta = \emptyset$)
- **rôznobežnosť** ($\alpha \cap \beta \neq \emptyset$ a $\dim(V(\alpha) \cap V(\beta)) < \min\{\dim V(\alpha), \dim V(\beta)\}$)
- **mimobežnosť** ($\alpha \cap \beta = \emptyset$ a $\dim(V(\alpha) \cap V(\beta)) < \min\{\dim V(\alpha), \dim V(\beta)\}$)

Ak chceme teda zistiť vzájomnú polohu dvoch afinných podpriestorov, budeme hľadať ich spoločné body a vektory.

Zhodnosti

1. Niektoré invarianty afinných transformácií

Videli sme: posunutia s operáciou skladania zobrazení tvoria grupu:

- zložením posunutí je posunutie,
- skladanie posunutí (všeobecne akýchkoľvek zobrazení) je asociatívne,
- neutrálnym prvkom je identita, čo je posunutie pozdĺž nulového vektora,
- inverzným zobrazením k posunutiu pozdĺž vektora $\mathbf{u}$ je posunutie pozdĺž vektora $-\mathbf{u}$.

Napríklad posunutia v euklidovskej rovine tak tvoria tú istú grupu ako vektory v $\mathbb{R}^2$ s operáciou sčítania vektorov.

DEFINÍCIA 5.1. Nech $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ je afinná transformácia. Ak pre podpriestor $\alpha \subset \mathbb{E}^n$ platí, že $f(\alpha) \subset \alpha$, potom α nazývame **(invariantným (samodružným) podpriestorom)**. Ak navyše pre každý bod A podpriestoru α platí, že $f(A) = A$, potom hovoríme, že α je **bodovo samodružný podpriestor**.

DEFINÍCIA 5.2. Nech $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ je afinná transformácia. Ak pre nenulový vektor $\mathbf{u} \in V(\mathbb{E}^n) = \mathbb{R}^n$ platí, že $Df(\mathbf{u}) = \lambda \mathbf{u}$ pre nejaké $\lambda \in \mathbb{R}$, potom $\langle \mathbf{u} \rangle$ (t.j. vektorový podpriestor generovaný vektorom $\mathbf{u}$) nazývame **invariantným (samodružným) smerom**. Číslo λ vtedy nazývame **vlastným číslom (vlastnou hodnotou)** zobrazenia f prislúchajúcim samodružnému smeru $\langle \mathbf{u} \rangle$. Vektor $\mathbf{u}$ tiež voláme **vlastným vektorom** zobrazenia.

PRÍKLAD 5.3. Posunutie v $\mathbb{E}^2$ dané vektorom $\mathbf{u}$:

- samodružné body: žiadne,
- samodružné priamky: všetky priamky so smerovým vektorom $\mathbf{u}$,
- samodružné smery: všetky smery

1.1. Hľadanie invariantných bodov, smerov, podpriestorov. Pre skúmanie invariantov afinných zobrazení všeobecne je užitočné pozrieť sa bližšie na maticu afinnej transformácie. Ak f je afinná transformácia $\mathbb{E}^2$, jej matica $\mathbf{A}_f$ má tvar

$$\mathbf{A}_f = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bod so súradnicami (p_1, p_2) zobrazí f takto:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{10} \\ a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + a_{20} \\ 1 \end{pmatrix},$$

čiže

$$f(p_1, p_2) = (a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{10}, a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + a_{20}).$$

Pozrime sa, ako vyzerá matica Df (užitočné pre skúmanie invariantých smerov zobrazenia):

$$\mathbf{A}_f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Čiže zobrazenie Df má maticu

$$\mathbf{A}_{Df} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že je to podmatica $\mathbf{A}_f$, ktorú získame vynechaním posledného riadku a posledného stĺpca.

Všetky tieto úvahy sa dajú úplne rovnako previesť aj pre n -rozmerný priestor, a tak vidíme, že pre afinnú transformáciu $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ s $(n+1) \times (n+1)$ maticou

$$\mathbf{A}_f = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{Df} & \mathbf{a} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$$

je $n \times n$ podmatica $\mathbf{A}_{Df}$ maticou vektorovej zložky Df zobrazenia f .

Hľadanie invariantných bodov je ľahké. Pre transformáciu $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ s maticou $\mathbf{A}_f$ hľadáme také body $X = (x_1, \dots, x_n)$, že $f(X) = X$. Maticovo:

$$\mathbf{A}_f \mathbf{x} = \mathbf{x},$$

kde $\mathbf{x}$ je stĺpcová matica $(x_1 \dots x_n \ 1)^T$. Toto je sústava n lineárnych rovníc o n neznámych $x_1, \dots, x_n$ (v poslednom riadku je rovnosť $1 = 1$, preto je rovníc naozaj len n).

Hľadanie invariantných smerov je trošička komplikovanejšie. Z matice $\mathbf{A}_f$ si zoberieme podmaticu $\mathbf{A}_{Df}$ popisujúcu asociované zobrazenie vektorových priestorov. Chceme teraz nájsť také vektory $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, pre ktoré platí, že $Df(\mathbf{u}) = \lambda \mathbf{u}$ pre nejaké $\lambda \in \mathbb{R}$. Maticovo:

$$\mathbf{A}_{Df} \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$$

(tu $\mathbf{u}$ je stĺpcová matica obsahujúca súradnice vektora $\mathbf{u}$). Poslednú rovnosť upravíme ($\mathbf{I}_n$ je jednotková $n \times n$ matica):

$$(\mathbf{A}_{Df} - \lambda \mathbf{I}_n) \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Tu $\mathbf{u}$ je nenulový vektor a $\mathbf{A}_{Df} - \lambda \mathbf{I}_n$ je štvorcová matica. Ak ju vnímame ako maticu zobrazenia, tak obrazom nenulového vektora môže byť nulový vektor práve vtedy, keď toto zobrazenie nie je injektívne, čo je ekvivalentné podmienke, že

$$(8) \quad |\mathbf{A}_{Df} - \lambda \mathbf{I}_n| = 0.$$

Toto je rovnica s neznámou λ , ktorú nazývame **charakteristickou rovnicou** lineárneho zobrazenia Df , tiež matice $\mathbf{A}_{Df}$. Polynóm na ľavej strane rovnosti (8) tiež nazývame **charakteristickým polynómom** lineárneho zobrazenia Df aj matice $\mathbf{A}_{Df}$.

Pomocou rovnice (8) tak vypočítame vlastné hodnoty zobrazenia f , budú to korene $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ charakteristickej rovnice. Pre každú vlastnú hodnotu λ_i potom vypočítame zodpovedajúci samodružný vektor ako netriviálne riešenie sústavy lineárnych rovníc

$$(\mathbf{A}_{Df} - \lambda_i \mathbf{I}_n) \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

s neznámymi $u_1, \dots, u_n$.

Hľadanie invariantných (afinných) podpriestorov už môže byť dosť náročné. Obmedzíme sa preto len na hľadanie invariantných priamok.

Ak je priamka p invariantná vzhľadom na transformáciu f , potom pre body $A, B \in p$, $A \neq B$ platí, že $f(A), f(B) \in p$ a preto $f(B) - f(A) \in \langle B - A \rangle$. Teda smer priamky p musí byť tiež samodružný. Takže najprv nájdeme samodružné smery transformácie a potom sa ku každému smeru snažíme nájsť priamku, ktorá by bola samodružná. K tomu nám pomôže si uvedomiť (tak ako v príklade o posunutí na začiatku kapitoly), že ak priamka p je samodružná, tak pre

každý bod $X \in p$ platí, že $f(X) - X$ je nejaký smerový vektor priamky (ktorý zároveň určuje samodružný smer zobrazenia). Čiže ak $\langle \mathbf{u} \rangle$ ($\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$) je samodružný smer, tak riešime sústavu rovníc

$$f(X) - X = c\mathbf{u}$$

s neznámymi $x_1, \dots, x_n, c$, kde $x_1, \dots, x_n$ sú súradnice bodu X (pozor, c nie je vlastná hodnota!) alebo ekvivalentne

$$(\mathbf{A}_f - \mathbf{I}_{n+1})\mathbf{x} = c\mathbf{u}.$$

2. Afinity $\mathbb{E}^n$ tvoria grupu

Afinné transformácie $\mathbb{E}^2$ netvoria grupu, napríklad premietanie na x -os $(a, b) \mapsto (a, 0)$ nemá inverzný prvok. Ak by sme sa však obmedzili len na bijektívne transformácie (tzv. afinity), tie už grupu tvoria, o čom sa hneď presvedčíme.

Nech f je afinita $\mathbb{E}^2$, t.j. bijektívne zobrazenie. Presvedčili sme sa (Tvrdenie 2.20 v časti o afinných zobrazeniach), že toto je ekvivalentné faktu, že asociované zobrazenie vektorového priestoru do seba $Df: V(\mathbb{E}^2) \rightarrow V(\mathbb{E}^2)$ je bijektívne.

Lineárne zobrazenie vektorových priestorov je bijektívne práve vtedy, keď jeho matica je regulárna. V tomto prípade teda máme, že $|\mathbf{A}_{Df}| \neq 0$. Lahko sa presvedčíme, že $|\mathbf{A}_f| = |\mathbf{A}_{Df}|$. Našli sme tak kritérium, kedy je afinná transformácia afinitou:

TVRDENIE 5.4. *Nech $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ je afinná transformácia a nech je $\mathbf{A}_f$ jej matica. Potom je f afinitou práve vtedy, keď je matica $\mathbf{A}_f$ regulárna.*

Dôkaz. Dôkaz pre $n = 2$ sme si práve predviedli. Pre ľubovoľné n dôkaz vyzerá tak isto. $\square$

Dá sa samozrejme skúmať štruktúra grupy všetkých afinít. My sa ale obmedzíme na menšiu, veľmi dôležitú podgrupu.

3. Zhodnosti tvoria podgrupu afinít

Okrem invariantých bodov, priamok, smerov... môžeme uvažovať ešte aj iné invarianty afinných zobrazení. Tak v tejto časti sa zameriame na nový invariant: vzdialenosť bodov.

DEFINÍCIA 5.5. Zobrazenie $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ sa nazýva **zhodnosť (izometria)**, ak pre ľubovoľné body $X, Y \in \mathbb{E}^n$ platí, že $|f(X)f(Y)| = |XY|$

VETA 5.6. *Každá zhodnosť euklidovského priestoru je jeho afinitou.*

Dôkaz. Zobrazenie $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ je afinné, keď zachováva afinné kombinácie bodov, t.j. keď pre ľubovoľné $P_0, \dots, P_r \in \mathbb{E}^n$ a $\lambda_0, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ také, že $\sum_{i=0}^r \lambda_i = 1$, platí

$$(9) \quad f\left(\sum_{i=0}^r \lambda_i P_i\right) = \sum_{i=0}^r \lambda_i f(P_i).$$

Podľa Vety 2.12 stačí ukázať, že zobrazenie zachováva afinné kombinácie dvojíc bodov, t.j. že pre ľubovoľné rôzne $P_0, P_1 \in \mathbb{E}^n$ platí

$$f((1 - \lambda)P_0 + \lambda P_1) = (1 - \lambda)f(P_0) + \lambda f(P_1).$$

Označme $X = (1 - \lambda)P_0 + \lambda P_1$. Nech $X \neq P_0$, $X \neq P_1$ (ak by nastala niektorá z rovností, niet čo dokazovať). Potom body P_0, P_1, X sú kolíneárne a tak určite nastane jedna z možností

- $|P_0 P_1| = |P_0 X| + |X P_1|$,
- $|P_0 X| = |P_0 P_1| + |P_1 X|$,
- $|P_1 X| = |P_1 P_0| + |P_0 X|$.

Keďže f je zhodnosť, ten istý vzťah bude platiť aj pre $f(P_0), f(P_1), f(X)$, a teda sú aj tieto body kolíneárne. Navyše analýzou každej z možností o usporiadaní týchto bodov na spoločnej priamke zistíme, že $f(X) = (1 - \lambda)f(P_0) + \lambda f(P_1)$.

Ukázali sme, že zobrazenie f je afinné. Potrebujeme ešte ukázať, že f je bijektívne.

Zo separačnej vlastnosti metriky máme, že ak $A \neq B$, potom $|AB| \neq 0$, teda $|f(A)f(B)| \neq 0$, a tak aj $f(A) \neq f(B)$. Ukázali sme, že zhodnosť f je injektívne zobrazenie. Z Tvrdenia 2.20 je potom aj Df injektívne. Keďže Df je transformácia vektorového priestoru $\mathbb{R}^n$, z lineárnej algebry vieme, že vďaka injektívnosti je Df aj surjektívne, a teda znovu z Tvrdenia 2.20 je f surjektívne. $\square$

Môžeme to teraz zhrnúť aj tak, že zhodnosť je taká afinita $\mathbb{E}^n$, pre ktorú je vzdialenosť bodov invariantom.

VETA 5.7. *Množina všetkých izometrií na $\mathbb{E}^n$ spolu s operáciou skladania zobrazení tvorí grupu.*

Dôkaz. Potrebujeme overiť, že

- (i) identita je zhodnosť,
- (ii) zloženie dvoch zhodností je zhodnosť,
- (iii) inverzná afinita k zhodnosti je tiež zhodnosť.

(i) je zrejmé.

(ii) Nech $f, g: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ sú zhodnosti. Potom pre $X, Y \in \mathbb{E}^n$ platí

$$|(f \circ g)(X)(f \circ g)(Y)| = |f(g(X))f(g(Y))| = |g(X)g(Y)| = |XY|,$$

teda $f \circ g$ je zhodnosť.

(iii) Nech f je zhodnosť a f^{-1} je k nej inverzná afinita. Pre každé $X \in \mathbb{E}^n$ označme $X' = f(X)$, teda platí, že $X = f^{-1}(X')$. Potom

$$|f^{-1}(X')f^{-1}(Y')| = |XY| = |f(X)f(Y)| = |X'Y'|,$$

preto f^{-1} je zhodnosť. $\square$

DEFINÍCIA 5.8. Grupa izometrií euklidovského priestoru $\mathbb{E}^n$ sa nazýva **euklidovská grupa**, ozn. $E(n)$.

4. Ktoré afinity sú izometriami – kritérium

VETA 5.9. *Afinita $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ je zhodnosť práve vtedy, keď $Df: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ zachováva skalárny súčin.*

Dôkaz. Nech je f zhodnosť. Nech $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ sú ľubovoľné vektory. Potrebujeme ukázať, že

$$Df(\mathbf{u}) \cdot Df(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}.$$

Všimnime si najprv, že pre ľubovoľný vektor $\mathbf{w}$, ak $Y - X = \mathbf{w}$ je jeho umiestnenie, tak z faktu, že f je zhodnosť, vyplýva

$$\begin{aligned} \|Df(\mathbf{w})\|^2 &= Df(\mathbf{w}) \cdot Df(\mathbf{w}) = Df(Y - X) \cdot Df(Y - X) = (f(Y) - f(X)) \cdot (f(Y) - f(X)) \\ &= |f(X)f(Y)|^2 = |XY|^2 = (Y - X) \cdot (Y - X) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} = \|\mathbf{w}\|^2, \end{aligned}$$

teda Df zachováva dĺžky vektorov. Potom z Tvrdenia 3.7

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}(\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2).$$

už dostaneme, že Df zachováva skalárny súčin.

Nech teraz naopak Df zachováva skalárny súčin. Potom pre ľubovoľné $X, Y \in \mathbb{E}^n$ platí

$$\begin{aligned} |f(X)f(Y)| &= \|f(Y) - f(X)\| = \|Df(Y - X)\| \\ &= \sqrt{Df(Y - X) \cdot Df(Y - X)} = \sqrt{(Y - X) \cdot (Y - X)} \\ &= \|Y - X\| = |XY|, \end{aligned}$$

čiže f je zhodnosť. $\square$

Lineárne zobrazenie vektorového priestoru do seba, ktoré zachováva skalárny súčin, sa nazýva **ortogonálne**.

VERA 5.10. *Nech $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je lineárne zobrazenie vektorových priestorov. Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:*

- (i) φ je ortogonálne (t.j. zachováva skalárny súčin),
- (ii) φ zobrazuje ortonormálnu bázu na ortonormálnu bázu,
- (iii) $\mathbf{A}_\varphi^T \mathbf{A}_\varphi = \mathbf{I}_n$, kde $\mathbf{A}_\varphi$ je matica zobrazenia φ (vzhľadom na ortonormálnu bázu).

POZNÁMKA 5.11. Pre zjednodušenie zápisov budeme používať symbol δ_{ij} ($i, j \in \mathbb{N}$), tzv. **Kroneckerovo delta**:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ak } i = j \\ 0 & \text{ak } i \neq j \end{cases}$$

Dôkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii): Nech φ je ortogonálne a nech $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ je ortonormálna báza. Potom pre $\varphi(\mathbf{u}_i)$ a $\varphi(\mathbf{u}_j)$ platí

$$\varphi(\mathbf{u}_i) \cdot \varphi(\mathbf{u}_j) = \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = \delta_{ij},$$

teda vektory $\varphi(\mathbf{u}_i)$ ($i = 1, \dots, n$) tvoria ortonormálnu bázu $\mathbb{R}^n$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Nech pre ortonormálnu bázu $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ je aj báza $\varphi(\mathbf{u}_1), \varphi(\mathbf{u}_2), \dots, \varphi(\mathbf{u}_n)$ ortonormálna. Vidíme, že φ zachováva skalárny súčin na tejto báze. Predvedieme si, že potom už z bilinearít skalárneho súčinu vyplýva, že sa zachováva na všetkých vektoroch. Každý vektor vieme zapísať ako lineárnu kombináciu bázy. Ak $\mathbf{v} = \sum_i v_i \mathbf{u}_i$, $\mathbf{w} = \sum_j w_j \mathbf{u}_j$, potom

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{v}) \cdot \varphi(\mathbf{w}) &= \varphi\left(\sum_i v_i \mathbf{u}_i\right) \cdot \varphi\left(\sum_j w_j \mathbf{u}_j\right) = \left(\sum_i v_i \varphi(\mathbf{u}_i)\right) \cdot \left(\sum_j w_j \varphi(\mathbf{u}_j)\right) \\ &= \sum_i \sum_j v_i w_j \varphi(\mathbf{u}_i) \cdot \varphi(\mathbf{u}_j) = \sum_i \sum_j v_i w_j \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = \left(\sum_i v_i \mathbf{u}_i\right) \cdot \left(\sum_j w_j \mathbf{u}_j\right) \\ &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}. \end{aligned}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Stĺpce matice $\mathbf{A}_\varphi$ obsahujú súradnice vektorov $\varphi(\mathbf{e}_i)$. V matici $\mathbf{A}_\varphi^T \mathbf{A}_\varphi$ preto máme na ij -tej pozícii skalárny súčin $\varphi(\mathbf{e}_i) \cdot \varphi(\mathbf{e}_j)$:

$$(\mathbf{A}_\varphi^T \mathbf{A}_\varphi)_{ij} = \varphi(\mathbf{e}_i) \cdot \varphi(\mathbf{e}_j) = \delta_{ij},$$

(posledná rovnosť vyplýva z (ii)), čiže $\mathbf{A}_\varphi^T \mathbf{A}_\varphi = \mathbf{I}_n$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Ak $\mathbf{A}_\varphi^T \mathbf{A}_\varphi = \mathbf{I}_n$, tak z pozície na i -tom riadku a j -tom stĺpci máme, že $\varphi(\mathbf{e}_i) \cdot \varphi(\mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$, a teda $\varphi(\mathbf{e}_1), \dots, \varphi(\mathbf{e}_n)$ je ortonormálna báza $\mathbb{R}^n$. $\square$

DÔSLEDOK. *Obrazom karteziánskej sústavy súradníc v izometrii je karteziánska sústava súradníc.*

Dôkaz. Nech f je izometria $\mathbb{E}^n$. Nech $(O, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ je karteziánska súradnicová sústava. Jej obrazom je $(n+1)$ -tica $(f(O), Df(\mathbf{e}_1), \dots, Df(\mathbf{e}_n))$, kde $Df(\mathbf{e}_1), \dots, Df(\mathbf{e}_n)$ je tiež ortonormálna báza, lebo Df je ortogonálne zobrazenie. $\square$

TVRDENIE 5.12. Všetky ortogonálne zobrazenia $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tvoria grupu, ktorá sa nazýva **ortogonálna grupa**, ozn. $O(n)$

Dôkaz. Identita (ako neutrálny prvok vzhľadom na skladanie ortogonálnych zobrazení) je zrejme ortogonálne zobrazenie.

Nech φ, ψ sú ortogonálne zobrazenia s maticami $\mathbf{A}_\varphi, \mathbf{A}_\psi$. Pre maticu zobrazenia $\psi \circ \varphi$ platí, že $\mathbf{A}_{\psi \circ \varphi} = \mathbf{A}_\psi \mathbf{A}_\varphi$. Preto

$$\mathbf{A}_{\psi \circ \varphi}^T \mathbf{A}_{\psi \circ \varphi} = (\mathbf{A}_\psi \mathbf{A}_\varphi)^T (\mathbf{A}_\psi \mathbf{A}_\varphi) = \mathbf{A}_\varphi^T \mathbf{A}_\psi^T \mathbf{A}_\psi \mathbf{A}_\varphi = \mathbf{A}_\varphi^T \mathbf{A}_\varphi = \mathbf{I}_n,$$

teda $\psi \circ \varphi$ je tiež ortogonálne zobrazenie.

Nech φ^{-1} je inverzné zobrazenie k ortogonálnemu zobrazeniu φ . Vieme už, že $\mathbf{A}_{\varphi^{-1}} = \mathbf{A}_\varphi^{-1}$. Potom

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_n &= \mathbf{A}_\varphi^T \mathbf{A}_\varphi & | \cdot \mathbf{A}_\varphi^{-1} \\ \mathbf{A}_\varphi^{-1} &= \mathbf{A}_\varphi^T & | \cdot (\mathbf{A}_\varphi^{-1})^T \\ (\mathbf{A}_\varphi^{-1})^T \mathbf{A}_\varphi^{-1} &= (\mathbf{A}_\varphi^{-1})^T \mathbf{A}_\varphi^T = (\mathbf{A}_\varphi \mathbf{A}_\varphi^{-1})^T = \mathbf{I}_n. \end{aligned}$$

Takže inverzné zobrazenie k ortogonálnemu je tiež ortogonálne. $\square$

PRÍKLAD 5.13. Vieme overiť, že napríklad otočenie r roviny $\mathbb{E}^2$ okolo bodu S je izometria. Najprv sa pomocou Vety 5.10 presvedčíme, že otočenie r_0 okolo $(0, 0)$ je izometria. Nakoniec otočenie r okolo S o uhol α vieme rozložiť

$$r = t_s \circ r_0 \circ t_{-s},$$

kde t_s je posunutie o vektor $S - (0, 0)$.

5. Grupa zhodností $\mathbb{E}^2$

TVRDENIE 5.14. Nech $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ je zhodnosť. Potom pre determinant matice jej asociovaného zobrazenia Df platí

$$|\mathbf{A}_{Df}| = \pm 1.$$

Dôkaz. Ide o dôsledok Vety 5.10. Ak f je zhodnosť, tak $\mathbf{A}_{Df}^T \mathbf{A}_{Df} = \mathbf{I}_n$. Potom

$$|\mathbf{A}_{Df}^T \mathbf{A}_{Df}| = |\mathbf{I}_n| = 1$$

a na druhej strane

$$|\mathbf{A}_{Df}^T \mathbf{A}_{Df}| = |\mathbf{A}_{Df}^T| |\mathbf{A}_{Df}| = |\mathbf{A}_{Df}|^2.$$

Odtiaľ už máme výsledok. $\square$

Zhodnosť $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ sa nazýva **priama**, ak $|\mathbf{A}_{Df}| = 1$ a **nepriama**, ak $|\mathbf{A}_{Df}| = -1$. Inak: zhodnosť je priama, ak zachováva orientáciu priestoru.

Zrejme priame zhodnosti tvoria podgrupu všetkých zhodností. (Vedeli by ste to ukázať formálne?)

LEMA 5.15. Nech $A, B \in \mathbb{E}^2$ sú rôzne body. Množina takých bodov X v $\mathbb{E}^2$, že $AX \cong BX$, tvorí priamku, ktorá prechádza stredom úsečky AB a je kolmá na $\overleftrightarrow{AB}$. Táto priamka sa nazýva **os úsečky AB** .

Dôkaz. dú $\square$

DEFINÍCIA 5.16. Nech o je priamka v $\mathbb{E}^2$. **Súmernosť podľa priamky o (osová súmernosť)** je transformácia $\mathcal{S}_o$ euklidovskej roviny definovaná nasledovne:

Nech $X \in \mathbb{E}^2$.

- Ak $X \in o$, potom $\mathcal{S}_o(X) = X$,
- Ak $X \notin o$, nech
 - $o_X^\perp$ je priamka prechádzajúca cez X a kolmá na o
 - a $X^\perp = o \cap o_X^\perp$.

Potom $\mathcal{S}_o(X)$ je taký bod na $o_X^\perp$, ktorý leží v opačnej polrovine od o ako X a $|\mathcal{S}_o(X)X^\perp| = |XX^\perp|$.

Ekvivalentne by sme mohli obraz bodu X v súmernosti $\mathcal{S}_o$ podľa o popísať aj tak, že $\mathcal{S}_o(X)$ je taký bod, že o je os úsečky $X\mathcal{S}_o(X)$.

TVRDENIE 5.17. *Osová súmernosť je nepriama zhodnosť.*

Dôkaz. Súmernosť podľa x -osi $\mathcal{S}$ zobrazí bod (x_1, x_2) na bod $(x_1, -x_2)$. Lahko sa presvedčíme, že je to zhodnosť:

$$|\mathcal{S}(a_1, a_2)\mathcal{S}(b_1, b_2)| = |(a_1, -a_2)(b_1, -b_2)| = |(a_1, a_2)(b_1, b_2)|$$

Súmernosť podľa ľubovoľnej osi vieme previesť na súmernosť podľa x -osi zložením s vhodnými otočeniami alebo posunutiami. Otočenia aj posunutia sú tiež zhodnosti, takže výsledné zobrazenie je zhodnosť.

Posunutie aj otočenie sú priame zhodnosti, keďže determinanty matíc týchto zobrazení sú rovné 1. Súmernosť podľa x -osi je zas nepriama zhodnosť. Zloženie jednej nepriamej a viacerých priamych zhodností je nepriama zhodnosť (z vlastnosti determinantu súčinu matíc). $\square$

POZNÁMKA 5.18. Pre osovú súmernosť $\mathcal{S}$ zrejme platí, že $\mathcal{S} \circ \mathcal{S} = id$. Takéto zobrazenie sa nazýva **involúcia**.

VETA 5.19. *Každá zhodnosť euklidovskej roviny sa dá napísať ako zloženie nanajviš troch osových súmerností.*

Dôkaz. Nech f je daná zhodnosť. Nech A, B, C sú tri nekolineárne body. Nájdeme nanajviš tri osové súmernosti $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$ také, že pre ich zloženie

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_3 \circ \mathcal{S}_2 \circ \mathcal{S}_1$$

(prípadne bude $\mathcal{S}$ zložením menej ako 3 súmerností) bude platiť

$$\mathcal{S}(A) = f(A), \quad \mathcal{S}(B) = f(B), \quad \mathcal{S}(C) = f(C).$$

Potom z Dôsledku Vety 2.19 o určenosti afinného zobrazenia vyplýva, že $\mathcal{S}$ a f je to isté zobrazenie.

Keďže f je zhodnosť, tak pre body A, B, C platí, že

$$|f(A)f(B)| = |AB|, \quad |f(B)f(C)| = |BC|, \quad |f(A)f(C)| = |AC|.$$

Ak $f(A) = A$, tak $\mathcal{S}_1$ nech je identita. Ak $f(A) \neq A$, potom nech o_1 je priamka prechádzajúca stredom úsečky $Af(A)$ a kolmá $\overleftrightarrow{Af(A)}$ (tzv. os úsečky $Af(A)$). Nech $\mathcal{S}_1$ je osová súmernosť podľa osi o_1 . Zrejme $\mathcal{S}_1$ bod A zobrazí na bod $f(A)$. Označme $B_1 = \mathcal{S}_1(B)$ a $C_1 = \mathcal{S}_1(C)$. Keďže osová súmernosť je zhodnosť, tak platí

$$|f(A)f(B)| = |AB| = |f(A)B_1|.$$

Ak $f(B) = B_1$, potom zas nech $\mathcal{S}_2$ je identita. Ak $f(B) \neq B_1$, potom nech o_2 je os úsečky $B_1f(B)$ a nech $\mathcal{S}_2$ je osová súmernosť podľa osi o_2 , teda $\mathcal{S}_2(B_1) = f(B)$. Keďže $|f(A)f(B)| = |f(A)B_1|$, tak $f(A) \in o_2$. Preto $\mathcal{S}_2(f(A)) = f(A)$. Pre bod C označme $\mathcal{S}_2(C_1) = C_2$. Pre vzdialenosti bodov máme

$$\begin{aligned} |f(A)f(C)| &= |AC| = |f(A)C_1| = |f(A)C_2| \\ |f(B)f(C)| &= |BC| = |B_1C_1| = |f(B)C_2|, \end{aligned}$$

kde v oboch riadkoch prvá rovnosť vyplýva z faktu, že f je zhodnosť, druhá z toho, že o_1 je zhodnosť a tretia z toho, že o_2 je zhodnosť.

Nakoniec, ak $f(C) \neq C_2$, potom nech o_3 je os úsečky $C_2f(C)$. Z práve ukázaných rovností máme, že $f(A), f(B) \in o_3$, teda sú to pevné body súmernosti $\mathcal{S}_3$ podľa osi o_3 . Navyše $\mathcal{S}_3(C_2) = f(C)$. (Znovu v prípade, že $f(C) = C_2$, položíme $\mathcal{S}_3 = id$)

Našli sme tak súmernosti $\mathcal{S}_i$ také, že zobrazenia $\mathcal{S}_3 \circ \mathcal{S}_2 \circ \mathcal{S}_1$ a f súhlasia na trojici nekolíneárnych bodov A, B, C , čiže

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_3 \circ \mathcal{S}_2 \circ \mathcal{S}_1$$

□

DÔSLEDOK. *Osové súmernosti generujú grupu všetkých zhodností.*