KAPITOLA 4

Podpriestory afinného priestoru

Obmedzíme sa najprv na euklidovské priestory, aj keď mnohé úvahy a konštrukcie sú platné v afinnom priestore nad ľubovoľným bodom.

1. Priamka

Priamku sme si definovali už v časti o afinných zobrazeniach, pripomenieme si a doplníme:

Definícia 4.1. Nech $A, B \in \mathbb{E}$, $A \neq B$. **Priamka** $\overleftrightarrow{AB}$ je množina

$$\{(1-t)A + tB \mid \forall t \in \mathbb{R}\} = \{A + t(B-A) \mid \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Ak $X, Y \in \overleftrightarrow{AB}$, vektor $Y - X$ sa nazýva **smerovým vektorom** priamky $\overleftrightarrow{AB}$. Inak: smerové vektory priamky sú tie vektory, ktoré majú na priamke umiestnenie.

Definícia 4.2. Body ležiace na spoločnej priamke nazývame **kolineárne**. ($A_1, A_2, \ldots$ sú kolineárne, ak existuje priamka p taká, že $A_1 \in p$, $A_2 \in p, \ldots$.)

Iný spôsob zápisu priamky: pomocou barycentrických súradníc:

$$\overleftrightarrow{AB} = \{\lambda_1 A + \lambda_2 B \mid \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}$$

Pozorovanie. O smerovom vektore priamky:

(a) Smerový vektor priamky nie je jednoznačný.
(b) Nulový vektor je smerovým vektorom každej priamky.
(c) Ak $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sú dva nenulové smerové vektory priamky $\overleftrightarrow{AB}$, potom $\mathbf{v} = c\mathbf{u}$ pre nejaké $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$.
(d) Ak $\mathbf{u}$ je smerovým vektorom priamky $\overleftrightarrow{AB}$ a bod $C \in \overleftrightarrow{AB}$, tak aj bod $C + \mathbf{u} \in \overleftrightarrow{AB}$.
(e) Všetky smerové vektory priamky tvoria spolu jednorozmerný vektorový priestor, ktorý nazývame **smer** alebo **smerový priestor** priamky $\overleftrightarrow{AB}$. Smer priamky $\overleftrightarrow{AB}$ budeme tiež označovať $V(\overleftrightarrow{AB})$.

Dôkaz. (a),(b) Zrejmé.

(c) $\mathbf{u} = D - C$, $\mathbf{v} = F - E$. Nech $C = A + t_C(B - A)$, podobne pre ostatné body, potom $\mathbf{u} = (t_D - t_C)(B - A)$, $\mathbf{v} = (t_F - t_E)(B - A)$, $t_C \neq t_D$, $t_E \neq t_F$, keďže $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sú nenulové, a odtiaľ vyplýva tvrdenie.

(d) Nech $C = A + t_C(B - A)$. Ďalej keďže $\mathbf{u}$ je smerovým vektorom priamky $\overleftrightarrow{AB}$, tak $\mathbf{u} = Y - X$ a podľa pozorovania v dôkaze časti (c) máme $\mathbf{u} = (t_Y - t_X)(B - A)$. Pre bod $C + \mathbf{u}$ potom platí:

$$C + \mathbf{u} = A + t_C(B - A) + (t_Y - t_X)(B - A) = A + (t_C + t_Y - t_X)(B - A),$$

teda ide o bod na $\overleftrightarrow{AB}$.

(e) Potrebujeme overiť, že ak $\mathbf{u}$ je smerový vektor priamky, tak aj každý jeho násobok je smerový vektor priamky, a tiež ak $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ sú smerové vektory priamky, tak aj ich súčet $\mathbf{u} + \mathbf{v}$

je smerový vektor priamky. Ide o analogické výpočty k tým v predchádzajúcich tvrdeniach. Jednorozmernosť vyplýva z (c) (každý smerový vektor je násobkom pevne zvoleného nenulového smerového vektora priamky). □

TVRDENIE 4.3. *Priamka je jednorozmerným afinným priestorom.*

Dôkaz. $V(\overleftrightarrow{AB})$ je jednorozmerný vektorový priestor (pozorovanie (e)).

Operácia $+\colon \overleftrightarrow{AB} \times V(\overleftrightarrow{AB}) \to \overleftrightarrow{AB}$

- je dobre definovaná (pozorovanie (d)),
- vlastnosti (i) a (ii) Definície 1.6 afinného priestoru platia na $\overleftrightarrow{AB}$, lebo platia v celom afinnom priestore,
- vlastnosť (iii) v definícii afinného priestoru tiež platí (pozorovanie (c)).

□

Zhrnutie: Keď si na priamke p pevne zvolíme bod A a nenulový smerový vektor $\mathbf{u}$, tak máme bijekciu medzi hodnotami parametra t a bodmi priamky p:

- pre každé $t \in \mathbb{R}$ je bod $A + t\mathbf{u}$ bodom priamky p,
- $B \in p$ je ľubovoľný iný bod priamky p, tak existuje jediné $t \in \mathbb{R}$ také, že $B = A + t\mathbf{u}$.

Máme tak parametrické vyjadrenie priamky, ktorá je daná bodom A a vektorom $\mathbf{u}$: každý bod X tejto priamky má jednoznačné vyjadrenie ako $X = A + t\mathbf{u}$.

2. Priamka v afinnej rovine

2.1. Vyjadrenie priamky v rovine. Počnúc definíciou boli všetky úvahy o priamke, jej bodoch a smerových vektoroch nezávislé od dimenzie afinného priestoru, v ktorom pracujeme. Až teraz, keď ideme parametrické vyjadrenie priamky rozpísať do súradníc, sa obmedzíme na konkrétny priestor, v tejto časti to bude rovina.

Rozpísané do súradníc: ak $A = (a_1, a_2)$ a $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, potom **parametrické vyjadrenie (parametrické rovnice)** priamky je

$$x = a_1 + u_1 t$$
$$y = a_2 + u_2 t$$

Parametrické vyjadrenie priamky nie je jednoznačné, závisí od voľby bodu A a smerového vektora $\mathbf{u}$.

VETA 4.4. *Pre neznáme x, y tvorí množina všetkých riešení rovnice*

$$ax + by + c = 0, \qquad \text{kde } a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \text{ alebo } b \neq 0 \tag{6}$$

priamku v afinnej rovine. Množina riešení asociovanej homogénnej rovnice

$$ax + by = 0$$

tvorí smerový priestor tejto priamky.

Dôkaz. Rovnica (6) je riešiteľná a má aspoň dve rôzne riešenia: ak $a \neq 0$, ľubovoľne zvolíme y a dopočítame x.

Nech $P = (p_1, p_2), Q = (q_1, q_2)$ sú dve rôzne riešenia, t.j. platí

$$\begin{aligned} ap_1 + bp_2 + c &= 0 \\ aq_1 + bq_2 + c &= 0. \end{aligned}$$

Pre smerový vektor $\mathbf{u} = Q - P$ priamky $\overleftrightarrow{PQ}$ platí

$$au_1 + bu_2 = 0,$$

t.j. je riešením príslušnej homogénnej rovnice. Z lineárnej algebry vieme, že riešenia homogénnej rovnice $ax + by = 0$ tvoria jednorozmerný lineárny priestor generovaný vektorom $\mathbf{u}$, ide teda o smerový priestor priamky $\overleftrightarrow{PQ}$.

Každý bod tvaru $P + t\mathbf{u}$ (t.j. každý bod na priamke $\overleftrightarrow{PQ}$) je riešením pôvodnej (nehomogénnej) rovnice. Ukázali sme tak, že ak bod leží na priamke $\overleftrightarrow{PQ}$, tak patrí do množiny riešení rovnice (6).

Pre opačnú inklúziu nech $R = (r_1, r_2)$ vyhovuje rovnici, t.j. $ar_1 + br_2 + c = 0$. Potom $R - P$ vyhovuje príslušnej homogénnej rovnici, a preto $R - P = c\mathbf{u}$, lebo riešenia homogénnej rovnice tvoria jednorozmerný vektorový priestor. Preto $R = P + c\mathbf{u} \in \overleftrightarrow{PQ}$. □

Veta-Definícia 4.5. *Ak $\overleftrightarrow{PQ} \subset \mathbb{E}^2$ je priamka, potom existuje rovnica*

$$ax + by + c = 0, \quad (a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \text{ alebo } b \neq 0)$$

taká, že množina jej riešení sú presne body priamky $\overleftrightarrow{PQ}$. Táto lineárna rovnica sa nazýva **všeobecnou rovnicou priamky**.

Dôkaz. Nech $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ je riešenie rovnice $(q_1 - p_1)x + (q_2 - p_2)y = 0$, napríklad $\mathbf{n} = (q_2 - p_2, p_1 - q_1)$. Potom $n_1x + n_2x - (n_1p_1 + n_2p_2) = 0$ je hľadaná rovnica. □

Definícia 4.6. V $\mathbb{E}^2$ **normálovým vektorom priamky** nazývame nenulový vektor kolmý na smer priamky.

Ak má priamka p všeobecnú rovnicu $ax + by + c = 0$, potom $\mathbf{n} = (a, b)$ je jej normálový vektor.

Ako sa dopracovať k všeobecnej rovnici priamky?

(a) Z parametrických rovníc eliminovať parameter t.
(b) Ak p je daná parametricky ako $A + \mathbf{u}t$, potom p je množina všetkých takých bodov X, pre ktoré je $X - A$ kolmé na $\mathbf{n} = \mathbf{u}^\perp$.
(c) Ak p je daná parametricky ako $A+\mathbf{u}t$, potom $n_1x+n_2y+c = 0$ je všeobecná rovnica, kde $\mathbf{n} = (n_1, n_2) = (u_2, -u_1)$ je normálový vektor priamky, a člen c dopočítame dosadením bodu A.
(d) Ak $(0, q)$ leží na priamke so smerom $(1, k)$, tak

$$y = kx + q$$

je všeobecná rovnica priamky. Ide o tzv. **smernicový tvar** rovnice priamky. Priamky rovnobežné s y-osou (t.j. so smerom $(0, 1)$) smernicový tvar nemajú.
(e) Ak $(e, 0)$ a $(0, f)$ ležia na priamke p, potom

$$\frac{x}{e} + \frac{y}{f} - 1 = 0$$

je všeobecná rovnica priamky. Ide o tzv. **úsekový tvar** rovnice priamky. Tento postup funguje v prípade, že priamka p pretína obe súradnicové osi, t.j. nie je so žiadnou z nich rovnobežná.
(f) Ak p je daná parametricky ako $A + \mathbf{u}t$, kde $A = (a_1, a_2)$ a $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, tak

$$\frac{x - a_1}{u_1} = \frac{y - a_2}{u_2}$$

je tzv. **kanonická rovnica priamky**.
- najvýhodnejšie vyjadrenie priamky: obsahuje parametrické vyjadrenie aj všeobecnú rovnicu

- že je to také výhodné, pripúšťa sa výnimka: v menovateli môže byť 0, teda kanonickú rovnicu má aj priamka rovnobežná s niektorou osou

Opačný postup: prevod všeobecnej rovnice na parametrické vyjadrenie: Nech

$$p\colon\ ax + by + c = 0.$$

Nájsť parametrické vyjadrenie znamená

- vyriešiť rovnicu,
- nájsť jeden bod na priamke a smerový vektor.

Pozorovanie. Parametrické vyjadrenie priamky (t.j. vyjadrenie priamky pomocou bodu, ktorý na nej leží a smerového vektora) je výhodné, keď chceme generovať body, ktoré ležia na priamke. Vďaka parametrickému vyjadreniu ľahko priamku načrtneme.

Všeobecná rovnica je výhodná, keď pre daný bod chceme overiť, či patrí danej priamke. Ľahko tiež vidíme, či dve rovnice popisujú tú istú priamku: napriek tomu, že máme veľa tvarov rovnice priamky (úsekový, smernicový, kanonický), jedná sa stále o tú istú všeobecnú rovnicu (modulo násobenie nenulovým reálnym číslom).

2.2. Kolmé premietanie v rovine a vzdialenosť bodu od priamky. Situácia: daná je priamka v reálnej rovine a daný je bod, ktorý na nej neleží. Chceme vypočítať vzdialenosť bodu od priamky.

Dané A, p.

- $p_A^\perp$ je priamka prechádzajúca bodom A a kolmá na p, **kolmopremietacia priamka** bodu A na priamku p,
- $A_p^\perp = p \cap p_A^\perp$ je **kolmý priemet** bodu A na priamku p,
- $\pi\colon\ \mathbb{E}^2 \to p = \mathbb{E}^1$, $A \mapsto A_p^\perp$ je **kolmé premietanie** na priamku p.

Vzdialenosť bodu A **od priamky** p (ozn. $|Ap|$) je $|AA_p^\perp|$, t.j. vzdialenosť bodu A od jeho kolmého priemetu na priamku p.

Veta 4.7. *V $\mathbb{E}^2$ je daná priamka $p \subset \mathbb{E}^2$ a bod A. Potom pre každý bod $X \in p$, $X \neq A_p^\perp$ platí, že $|AX| > |AA_p^\perp|$.*

Dôkaz. $X \in p$ ľubovoľný, potom $X - A = (X - A_p^\perp) + (A_p^\perp - A)$ a z kolmosti

$$|X - A|^2 = \cdots = |X - A_p^\perp|^2 + |A_p^\perp - A|^2,$$

čiže $|AX| \geq |AA_p^\perp|$. □

Teda pre bod A a priamku p vzdialenosťou bodu A od priamky p (ozn. $|Ap|$) rozumieme najmenšiu zo vzdialeností $|AX|$ pre $X \in p$.

Výpočítame teraz vzdialenosti bodu $Q = (q_1, q_2)$ od priamky $p\colon\ ax + by + c = 0$. Kolmopremietacia priamka (bodu Q na priamku p) je

$$\begin{aligned} p_Q^\perp : x &= q_1 + at \\ y &= q_2 + bt \end{aligned}$$

Priesečník $Q_p^\perp = p \cap p_Q^\perp$ je bod zodpovedajúci na priamke $p_Q^\perp$ parametru

$$t_0 = -\frac{aq_1 + bq_2 + c}{a^2 + b^2},$$

t.j. $Q_p^\perp = (q_1 + at_0, q_2 + bt_0)$. Potom

$$|QQ_p^\perp| = |(at_0, bt_0)| = \sqrt{a^2t_0^2 + b^2t_0^2} = \frac{|aq_1 + bq_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

2.3. Uhol dvoch priamok. Uhol priamok – cez uhol ich smerových vektorov (viď Definícia 3.22) Nech $\mathbf{u}$ je nenulový smerový vektor priamky p a $\mathbf{v}$ je nenulový smerový vektor priamky q. Potom aj $-\mathbf{v}$ je smerový vektor priamky q, no uhly $\angle\mathbf{uv}$ a $\angle\mathbf{u}(-\mathbf{v})$ spravidla zhodné nebudú. Pod **uhlom priamok** budeme rozumieť menší z týchto dvoch uhlov, teda

$$\cos\measuredangle pq = \frac{|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}.$$

Dôkaz korektnosti definície. Ak $\mathbf{u}$ resp. $\mathbf{v}$ je nenulový smerový vektor priamky p resp. q a nech $c, d \in \mathbb{R}^*$. Potom

$$\frac{|c\mathbf{u}\cdot d\mathbf{v}|}{\|c\mathbf{u}\|\,\|d\mathbf{v}\|} = \frac{|cd||(\mathbf{u})\cdot(\mathbf{v})|}{|c|\,\|\mathbf{u}\|\,|d|\,\|\mathbf{v}\|} = \frac{|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}.$$

Tiež platí, že

$$0 \le \frac{|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} \le 1$$

a že rovnica

$$\cos x = \frac{|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}$$

má na intervale $\left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$ práve jedno riešenie. $\square$

POZNÁMKA 4.8. Uhol dvoch priamok je reálne číslo v intervale $[0, \frac{\pi}{2}]$, nie časť roviny (ako zrejme poznáte pojem uhla zo ZŠ/SŠ).

3. Priamka a rovina v $\mathbb{E}^3$

3.1. Priamka parametricky. Parametrické vyjadrenie priamky, ktorá je daná bodom A a vektorom $\mathbf{u}$ funguje aj v trojrozmernom priestore, (a vlastne v ľubovoľnerozmernom): pre ľubovoľný bod X priamky existuje jednoznačné $t \in \mathbb{R}$ také, že $X = A + t\mathbf{u}$. Rozpísané do súradníc: ak $A = (a_1, a_2, a_3)$ a $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, potom

$$\begin{aligned} x &= a_1 + u_1 t\\ y &= a_2 + u_2 t\\ z &= a_3 + u_3 t. \end{aligned}$$

PRÍKLAD 4.9. Ak chceme overiť, či bod P leží na priamke prechádzajúcej bodmi A, B, máme možnosti:

- cez parametrické vyjadrenie priamky
- cez lineárnu závislosť vektorov

3.2. Rovina. Na druhej strane skúmajme štruktúru riešení lineárnej rovnice o troch neznámych

$$ax + by + cz + d = 0, \tag{7}$$

kde aspoň jeden jeden z lineárnych koeficientov je nenulový. Nech P a Q sú riešeniami (7). Potom vektor $Q - P$ je riešením homogénnej rovnice

$$ax + by + cz = 0.$$

Ak P je riešením nehomogénnej rovnice (7) a $\mathbf{u}$ je riešením príslušnej homogénnej rovnice, potom bod $Q = P + \mathbf{u}$ je tiež riešením rovnice (7).

Z uvedeného už vyplýva, že ak P je jedno riešenie (7) a vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ generujú priestor riešení príslušnej homogénnej rovnice, potom množina $P + \langle\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$ je množinou všetkých riešení rovnice (7).

Množina $P + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, kde $P \in \mathbb{E}$ a $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sú lineárne nezávislé vektory, je **rovina**. Podpriestor generovaný vektormi $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sa nazýva **smerovým priestorom roviny** alebo tiež **smerom**, jeho vektory sú **smerovými vektormi roviny**.

DEFINÍCIA 4.10. Body ležiace v spoločnej rovine nazývame **koplanárne**. (Formálnejším jazykom: $A_1, A_2, \dots$ sú koplanárne, ak existuje rovina α taká, že $A_1 \in \alpha$, $A_2 \in \alpha, \dots$.)

Rovinu si môžeme definovať aj podobne, ako sme si definovali priamku: Nech $P, Q, R \in \mathbb{E}$ sú nekolineárne body. **Rovina** určená bodmi P, Q, R je množina

$$\{\lambda_0 P + \lambda_1 Q + \lambda_2 R \mid \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}.$$

Táto množina je totožná s množinou

$$\{P + \lambda_1(Q - P) + \lambda_2(R - P) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} = P + \langle Q - P, R - P \rangle,$$

a teda naše dve definície roviny sú ekvivalentné.

Zápis roviny ako množiny

$$\{P + s\mathbf{u} + t\mathbf{v} \mid s, t \in \mathbb{R}\}$$

je už jej parametrickým vyjadrením:

$$\begin{aligned} x &= p_1 + u_1 s + v_1 t \\ y &= p_2 + u_2 s + v_2 t \\ z &= p_3 + u_3 s + v_3 t. \end{aligned}$$

Rovnica $ax + by + cz + d = 0$ taká, že rovina $P + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ je presne množinou jej riešení, sa nazýva jej **všeobecnou rovnicou**.

Prechod od všeobecnej rovnice k parametrickému vyjadreniu:

(1) Nájsť jedno (ľubovoľné) riešenie P všeobecnej rovnice
(2) Nájsť všetky riešenia zodpovedajúcej homogénnej rovnice, t.j. nájsť dva lineárne nezávislé vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$, ktoré generujú priestor riešení homogénnej rovnice.

Parametrické vyjadrenie roviny je potom $P + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$.

Nájdenie všeobecnej rovnice roviny:

(a) Eliminujeme parametre z parametrického vyjadrenia. Funguje vždy, no nemusí to byť najefektívnejšia metóda.
(b) Ak je rovina daná $P + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$, pre lineárne koeficienty hľadanej všeobecnej rovnice musí platiť:

$$\begin{aligned} au_1 + bu_2 + cu_3 &= 0 \quad \text{kde } (u_1, u_2, u_3) = \mathbf{u} \\ av_1 + bv_2 + cv_3 &= 0 \quad \text{kde } (v_1, v_2, v_3) = \mathbf{v}, \end{aligned}$$

teda (a, b, c) je vektor kolmý na $\mathbf{u}$ aj $\mathbf{v}$ a nájdeme ho ako ortogonálny doplnok $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ alebo ako vektorový súčin $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ (každý si nájde svoj obľubený spôsob). Vektor (a, b, c) sa nazýva **normálovým vektorom** roviny. Je to vektor kolmý na smer roviny alebo inak: vektor generujúci ortogonálny doplnok smeru roviny. Na záver absolútny koeficient d dopočítame dosadením P do všeobecnej rovnice.
(c) Ak $(p, 0, 0), (0, q, 0), (0, 0, r)$ ležia v rovine, potom jej rovnica je

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} - 1 = 0.$$

Ide o tzv. **úsekový tvar** rovnice roviny.

Až na násobenie konštantou je všeobecná rovnica roviny jednoznačná, keďže normálový vektor je určený jednoznačne až na násobenie konštantou.

3.3. Priamka všeobecnými rovnicami. Priamka je priesečnica dvoch rovín, preto pre jej popísanie potrebujeme dve rovnice:

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

kde (a_1, b_1, c_1) a (a_2, b_2, c_2) sú lineárne nezávislé vektory. Tieto rovnice nie sú jednoznačné.

- Algebraický pohľad: ak množina bodov je riešením dvoch rovníc, je riešením aj ľubovoľnej inej rovnice, ktorú dostaneme ako kombináciu pôvodných dvoch rovníc. Každá nezávislá dvojica takýchto rovníc má tú istú množinu riešení.
- Geometrický pohľad: existuje nekonečne veľa rovín prechádzajúcuch danou priamkou. Stačí z nich vybrať ľubovoľné dve, a tie už danú priamku jednoznačne určujú. Ich rovnice spolu tvoria sústavu všeobecných rovníc priamky.

Prechod od všeobecných rovníc ku parametrickému vyjadreniu: ako v prípade roviny v $\mathbb{E}^3$ alebo priamky v $\mathbb{E}^2$.

Prechod od parametrických rovníc k všeobecným rovniciam:

(a) Geometricky hľadáme dve roviny prechádzajúce danou priamkou. Ak $\mathbf{u}$ je smerový vektor priamky, tak normálové vektory hľadaných rovín sú kolmé na $\mathbf{u}$. Treba teda nájsť ortogonálny doplnok $\langle \mathbf{u} \rangle^\perp = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ a vtedy $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ určujú lineárne koeficienty hľadaných rovníc. Absolútne členy dopočítame dosadením bodu priamky.

(b) Výpočtovo najjednoduchšie: v jednej z parametrických rovníc (dokopy sú tri, pre každú súradnicu jedna) si vyjadríme parameter a dosadíme do zvyšných dvoch.

(c) Špeciálny tvar všeobecných rovníc: kanonické rovnice:

$$\frac{x - a_1}{u_1} = \frac{y - a_2}{u_2} = \frac{z - a_3}{u_3},$$

kde $A = (a_1, a_2, a_3)$ je bod na priamke a $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ je jej smerový vektor. Znovu sa výnimočne pripúšťa nula v menovateli.

PRÍKLAD 4.11. Ukážte, že body $M = (-3, -3, 7)$, $N = (-5, 2, 2)$ ležia v rovine určenej bodmi $A = (2, 1, 3), B = (2, 4, 0), C = (-3, 0, 4)$ a nájdite všeobecnú rovnicu priamky MN v afinnej súradnicovej sústave $(A, B - A, C - A)$.

3.4. Premietanie do roviny, vzdialenosť bodu od roviny. Podobne ako pri premietaní na priamku v rovine chceme teraz premietnuť v $\mathbb{E}^3$ bod do roviny a tento priemet použiť na výpočet vzdialenosti pôvodného bodu od danej roviny. Podobne znovu bude platiť, že že pre daný bod P je jeho priemet do roviny najbližším bodom k P zo všetkých bodov v tejto rovine.

Daná je rovina α v reálnom trojrozmernom priestore $\mathbb{E}^3$ a daný je bod P, ktorý v nej neleží.

- $\alpha_P^\perp$ je priamka prechádzajúca bodom P a kolmá na α, **kolmopremietacia priamka** bodu P do roviny α,
- $P_\alpha^\perp = \alpha \cap \alpha_P^\perp$ je **kolmý priemet** bodu P do roviny α,
- $\pi\colon \mathbb{E}^3 \to \alpha \cong \mathbb{E}^2$, $P \mapsto P_\alpha^\perp$ je **kolmé premietanie** do roviny α.

Vzdialenosť bodu P od roviny α (ozn. $|P\alpha|$) je $|PP_\alpha^\perp|$, t.j. vzdialenosť bodu P od jeho kolmého priemetu do roviny α.

VETA 4.12. *Nech $P \in \mathbb{E}^3$ je bod a $\alpha \subset \mathbb{E}^3$ je rovina. Potom pre každý bod $X \in \alpha$, $X \neq P_\alpha^\perp$ platí, že $|PX| > |PP_\alpha^\perp|$.*

Dôkaz. Dokazuje sa presne tak isto, ako v prípade premietania bodu na priamku. □

TVRDENIE 4.13. *Nech $P = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{E}^3$ je bod a $\alpha \subset \mathbb{E}^3$ je rovina so všeobecnou rovnicou*

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Potom

$$|PP_\alpha^\perp| = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Dôkaz. Dokazuje sa presne tak isto, ako analogické tvrdenie pre vzdialenosť bodu od priamky v $\mathbb{E}^2$. dú. □

4. Podpriestory afinného priestoru

4.1. Definícia a parametrické vyjadrenie. Podpriestor afinného priestoru je zovšeobecnením pojmu priamky a roviny v $\mathbb{E}^2$ alebo $\mathbb{E}^3$.

Poznámka 4.14. Mnohé z nasledovných konštrukcií sa dajú vykonať aj v ľubovoľnom afinnom priestore. Euklidovský priestor začína byť nutný, keď potrebujeme kolmosť, vzdialenosť bodov a podobne.

Definícia 4.15. Nech $P \in \mathbb{E}^n$ a nech $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$ sú lineárne nezávislé vektory z $V(\mathbb{E}^n) = \mathbb{R}^n$. Potom

$$\alpha = \{P + t_1\mathbf{u}_1 + \dots + t_m\mathbf{u}_m \mid t_1, \dots, t_m \in k\} = P + \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m \rangle \subset \mathbb{E}^n$$

je **afinný podpriestor** (niekedy tiež **lineárna varieta**) priestoru $\mathbb{E}^n$.

Priestor $\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m \rangle$ sa nazýva **smerom (smerovým priestorom)** podpriestoru α, označujeme ho tiež $V(\alpha)$. Vektory priestoru $V(\alpha)$ voláme **smerovými vektormi** podpriestoru α.

Dimenzia (rozmer) podpriestoru α je $\dim \alpha := \dim V(\alpha)$.

Vieme už, že jednorozmerný afinný priestor sa nazýva priamka, dvojrozmerný zas rovina.

Zrejme každý afinný podpriestor je neprázdny, lebo v označení z definície máme, že $P \in \alpha$. Afinný podpriestor môžme vnímať ako umiestnenie podpriestoru vektorového priestoru $\mathbb{R}^n$ do bodu P v priestore $\mathbb{E}^n$.

Z definície (afinného) podpriestoru hneď dostávame aj jeho parametrické vyjadrenie

$$\begin{aligned}
x_1 &= p_1 + u_{11}t_1 + \dots u_{m1}t_m \\
x_2 &= p_2 + u_{12}t_1 + \dots u_{m2}t_m \\
&\dots \\
x_n &= p_n + u_{1n}t_1 + \dots u_{mn}t_m.
\end{aligned}$$

Definícia 4.16. Body $P_0, P_1, \dots, P_m$ sú **afinne nezávislé**, ak vektory $P_1 - P_0, \dots, P_m - P_0$ sú lineárne nezávislé.

Pre $m = n$ to znamená, že body $P_0, P_1, \dots, P_n$ sú afinne nezávislé práve vtedy, keď tvoria barycentrický súradnicový systém.

Príklad 4.17.

- P_0, P_1 sú afinne nezávislé, keď sú rôzne.
- P_0, P_1, P_2 sú afinne nezávislé, keď nie sú kolineárne.
- P_0, P_1, P_2, P_3 sú afinne nezávislé, keď nie sú koplanárne.
- ...
- $P_0, P_1, \dots, P_m$ sú afinne nezávislé, keď neexistuje afinný podpriestor dimenzie menšej ako m, ktorý by ich všetky obsahoval.

Podobne, ako sme mali v prípade priamky a roviny, môžme afinný podpriestor charakterizovať ako množinu všetkých afinných kombinácií daných afinne nezávislých bodov:

TVRDENIE 4.18. *Nech $P_0, P_1, \ldots, P_m \in \mathbb{E}^n$ sú afinne nezávislé. Potom*

$$\langle P_0, P_1, \ldots, P_m \rangle = \{\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_m P_m \mid \lambda_i \in \mathbb{R},\ \lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 1\}$$

je m-rozmerný afinný podpriestor $\mathbb{E}^n$.

Dôkaz. Označme

$$U = \langle P_1 - P_0, P_2 - P_0, \ldots, P_m - P_0 \rangle,$$

teda U je m-rozmerný vektorový priestor. Overíme, že

$$\langle P_0, P_1, \ldots, P_m \rangle = P_0 + U.$$

Nech $Q \in P_0 + U$, teda

$$\begin{aligned} Q &= P_0 + \lambda_1(P_1 - P_0) + \cdots + \lambda_m(P_m - P_0) \\ &= (1 - \lambda_1 - \ldots - \lambda_m)P_0 + \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_m P_m, \end{aligned}$$

teda $Q \in \langle P_0, P_1, \ldots, P_m \rangle$. Presne tak isto ukážeme aj druhú inklúziu. □

TVRDENIE 4.19. *Nech $\alpha = P + U$.*

(i) *Ak $Q \in \alpha$, potom $\alpha = Q + U$, t.j. bod P nie je nijak výnimočný.*
(ii) *$U = \{R - Q \mid Q, R \in \alpha\}$, t.j. $\mathbf{u}$ je smerový vektor α práve vtedy, keď $\mathbf{u} = R - Q$ pre nejaké $Q, R \in \alpha$.*
(iii) *α je afinným priestorom.*

Dôkaz. (i) Nech $Q = P + \mathbf{u}$. Potom $Q + U = P + \mathbf{u} + U = P + U$. Komu to nie je zjavné, môže si detailne dokázať dve inklúzie.

(ii) Treba overiť dve inklúzie:

- ak $\mathbf{u} \in U$, potom $\mathbf{u}$ má v podpriestore α umiestnenie, t.j. existujú body $Q, R \in \alpha$, že $\mathbf{u} = R - Q$,
- ak $\mathbf{u} = R - Q$ pre nejaké body $Q, R \in \alpha$, potom $\mathbf{u} \in U$,

čo je len triviálne prepisovanie definície afinného podpriestoru.

(iii) Treba si spomenúť na definíciu afinného priestoru, potom tvrdenie hneď vyplynie z už dokázaného. □

TVRDENIE 4.20. *Neprázdna množina $\alpha \subset \mathbb{E}^n$ je podpriestor $\mathbb{E}^n$ práve vtedy, keď s každými dvoma rôznymi bodmi obsahuje celú priamku nimi určenú.*

Dôkaz. Nech α je afinný podpriestor $\mathbb{E}^n$. Nech $A, B \in \alpha = P + U$, t.j. $A = P + \mathbf{u}$ a $B = P + \mathbf{v}$, kde $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$. Potom pre $C \in \overleftrightarrow{AB}$, $C = A + t(B - A)$ máme

$$C = P + ((1 - t)\mathbf{u} + t\mathbf{v})$$

a tento bod zrejme leží v α.

Nech teraz naopak neprázdna množina α má vlastnosť, že s každými dvoma rôznymi bodmi obsahuje celú priamku. Nech P je pevne zvolený bod v α. Uvažujme množinu vektorov

$$U = \{Q - P \mid Q \in \alpha\}.$$

Ukážeme, že U je vektorový podpriestor $\mathbb{R}^n = V(\mathbb{E}^n)$, čo potom bude znamenať, že $\alpha = P + U$, teda že α je podpriestor $\mathbb{E}^n$.

- Je zrejmé, že $U \neq \emptyset$, lebo $\mathbf{0} = P - P \in U$.
- Nech $\mathbf{u} \in U$, To znamená, že existuje $Q \in \alpha$ taký, že $Q = P + \mathbf{u}$. Na priamke $\overleftrightarrow{PQ}$ zoberme bod $R = P + \lambda(Q - P)$. Potom $R - P = \lambda\mathbf{u}$, čiže $\lambda\mathbf{u} \in U$.

- Nech $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$, teda v α existujú body Q, R také, že $Q = P + \mathbf{u}$ a $R = P + \mathbf{v}$. Na priamke $\overleftrightarrow{QR}$ máme bod $\frac{1}{2}(Q + R) \in \alpha$ a teda vektor $\frac{1}{2}(Q + R) - P = \frac{1}{2}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \in U$. Z už ukázaného potom máme, že $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in U$

□

4.2. Všeobecné rovnice afinného podpriestoru. Uvažujme sústavu

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

pre neznáme $x_1, \ldots, x_n$. Skrátene budeme sústavu zapisovať $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Tvrdenie 4.21. *Nech sústava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ má riešenie. Potom všetky jej riešenia tvoria podpriestor v $\mathbb{E}^n$.*

Dôkaz. Nech P je riešenie sústavy. Homogénna sústava $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ je riešiteľná, jej riešením je vektorový priestor U. Presne tak ako v prípade priamky a roviny sa presvedčíme, že riešenia nehomogénnej sústavy tvoria množinu $P + U$, ktorá je podpriestorom $\mathbb{E}^n$. □

Veta 4.22. *Nech $\alpha \subset \mathbb{E}^n$ je podpriestor. Potom existuje sústava rovníc, ktorej riešením je presne α.*

Dôkaz. Nech $\alpha = P + \langle \mathbf{u}_1, \ldots \mathbf{u}_r \rangle$. Ortogonálny doplnok priestoru $V(\alpha)$ nájdeme ako riešenie sústavy ($\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ je neznáma)

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{y} &= 0 \\ \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{y} &= 0 \\ &\cdots \\ \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{y} &= 0 \end{aligned}$$

Nech $V(\alpha)^\perp = \langle \mathbf{a}_1, \ldots \mathbf{a}_m \rangle$. Potom $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ je sústava, ktorej riešením je $V(\alpha) = \langle \mathbf{u}_1, \ldots \mathbf{u}_r \rangle$. Pravú stranu sústavy dopočítame dosadením súradníc bodu P. □

Definícia 4.23. **Sústavou všeobecných rovníc** podpriestoru α budeme rozumieť každú lineárne nezávislú sústavu rovníc $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, ktorú spĺňajú presne všetky body α.

Z dôkazu vyplýva vzťah medzi počtom rovníc a dimenziou podpriestoru: ak sústava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ o n neznámych $x_1, \ldots, x_n$ pozostáva z m nezávislých rovníc a je riešiteľná, tak riešením je $(n - m)$-rozmerný afinný podpriestor.

Špeciálne podpriestory: priamka a nadrovina.

Definícia 4.24. Ak dimenzia $\alpha \subset \mathbb{E}^n$ je $n - 1$, tak α sa nazýva **nadrovina**. Je určená jednou všeobecnou rovnicou

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b, \quad (\text{kde } (a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq (0, 0, \ldots, 0))$$

a vtedy vektor $(a_1, \ldots, a_n)$ sa nazýva **normálovým vektorom** nadroviny α, ide o vektor kolmý na smer nadroviny α.

Každý podpriestor v $\mathbb{E}^n$ je prienikom nadrovín.

DEFINÍCIA 4.25. **Kanonickými rovnicami priamky** $p: \ P + \langle \mathbf{u} \rangle \subset \mathbb{E}^n$ nazývame vyjadrenie

$$\frac{x_1 - p_1}{u_1} = \frac{x_2 - p_2}{u_2} = \cdots = \frac{x_n - p_n}{u_n},$$

kde $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ a $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$.

4.3. Prienik a vzájomná poloha afinných podpriestorov.

TVRDENIE 4.26. *Nech $\alpha, \beta \subset \mathbb{E}^n$ sú podpriestory. Ak $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$, potom je $\alpha \cap \beta$ tiež podpriestorom $\mathbb{E}^n$ a platí*

$$V(\alpha \cap \beta) = V(\alpha) \cap V(\beta).$$

Dôkaz. Potrebujeme ukázať dve inklúzie v rovnosti $\alpha \cap \beta = P + (V(\alpha) \cap V(\beta))$, kde $P \in \alpha \cap \beta$.

Zapíšeme $\alpha = P + V(\alpha)$ a $\beta = P + V(\beta)$. Ak $Q \in \alpha \cap \beta$, tak $Q = P + \mathbf{u}$, kde $\mathbf{u} \in V(\alpha)$, a tiež $Q = P + \mathbf{v}$, kde $\mathbf{v} \in V(\beta)$. Teda $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Odtiaľ vyplýva, že $Q \in P + (V(\alpha) \cap V(\beta))$.

Opačná inklúzia je zrejmá. □

TVRDENIE 4.27. *Nech $V(\alpha) \subset V(\beta)$. Ak $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$, potom $\alpha \subset \beta$.*

Dôkaz. Ak $P \in \alpha \cap \beta$, potom $\alpha = P + V(\alpha)$ a $\beta = P + V(\beta)$. Odtiaľ je už tá inklúzia jasná. □

Pre vyšetrovanie vzájomnej polohy podpriestorov α a β je užitočné uvažovať dve kritériá:

(1) $V(\alpha) \subseteq V(\beta)$ alebo $V(\beta) \subseteq V(\alpha)$, vtedy hovoríme, že α a β sú **rovnobežné**, $\alpha \parallel \beta$, inak nie sú rovnobežné, $\alpha \nparallel \beta$
(2) $\alpha \cap \beta = \emptyset$, vtedy hovoríme, že α a β sú disjunktné alebo že sa **nepretínajú**. V opačnom prípade hovoríme, že α a β sa **pretínajú**.

Dostaneme tak štyri možnosti pre vzájomnú polohu podpriestorov α a β:

- inklúzia ($\alpha \subset \beta$ alebo $\alpha \supset \beta$)
- pravá rovnobežnosť ($V(\alpha) \subset V(\beta)$ alebo $V(\alpha) \supset V(\beta)$ a $\alpha \cap \beta = \emptyset$)
- **rôznobežnosť** ($\alpha \cap \beta \neq \emptyset$ a $\dim(V(\alpha) \cap V(\beta)) < \min\{\dim V(\alpha), \dim V(\beta)\}$)
- **mimobežnosť** ($\alpha \cap \beta = \emptyset$ a $\dim(V(\alpha) \cap V(\beta)) < \min\{\dim V(\alpha), \dim V(\beta)\}$)

Ak chceme teda zistiť vzájomnú polohu dvoch afinných podpriestorov, budeme hľadať ich spoločné body a vektory.