

PRIAMKA V ROVINE

1. Nájdite parametrické vyjadrenie priamky v \mathbb{A}^2 , ktorá
- (a) prechádza bodom $A = (3, -2)$ a má smerový vektor $\mathbf{a} = (-4, 2)$,
 - (b) prechádza bodom $A = (3, -2)$ a má ten istý smer ako os x (prvá súradnicová os),
 - (c) prechádza bodmi $B = (2, 3)$ a $C = (-5, -6)$,
 - (d) prechádza bodom $D = (-4, 10)$ a vytína na súradnicových osiach rovnaké úseky (priamka p vytína na i -tej súradnicovej osi úsek a , ak a je i -ta súradnica priesečníku priamky p s touto osou),
 - (e) na y -osi vytína úsek 3 a prechádza bodom $M = (-5, 3)$.

(parametrických vyjadrení má priamka veľa, preto môžeme uviesť len príklady správnych riešení: (a) $x = 3 - 2t, y = -2 + t$, (b) $x = 3 + t, y = -2$, (c) $x = 2 + 7t, y = 3 + 9t$, (d) $x = -4 + t, y = 10 - t$, (e) $x = t, y = 3$.)

2. Napíšte všeobecnú rovnicu priamky, ktorá
- (a) prechádza bodom $(2, -4)$ a má smer $\mathbf{u} = (-3, -1)$,
 - (b) má parametrické vyjadrenie $x = 5t, y = -8 + 4t$,
 - (c) os x pretína v bode $(2, 0)$ a os y v bode $(0, -6)$
 - (d) je rovnobežná s priamkou $7x - 3y + 5 = 0$ a prechádza bodom $(1, 1)$,
 - (e) je kolmá na priamku $4x + 5y - 3 = 0$ a prechádza začiatkom súradnicovej sústavy.
- ((a) $x - 3y - 14 = 0$, (b) $4x - 5y - 40 = 0$, (c) $\frac{x}{2} - \frac{y}{6} - 1 = 0$, (d) $7x - 3y - 4 = 0$, (d) $5x - 4y = 0$.)

3. Nájdite parametrické vyjadrenie priamky:

- (a) $5x - 2y + 10 = 0$,
- (b) $x = 0$,
- (c) $y - 3 = 0$,
- (d) $x - y = 0$.

Ako overíte správnosť výsledku? (Inak ako pozrieť sa na učiteľa a čakať, že prikývne.)
(znovu, parametrických vyjadrení má priamka veľa, (a) $x = -2 + 2t, y = 5t$, (b) $x = 0, y = t$, (c) $x = t, y = 3$, (d) $x = t, y = t$.)

PRIAMKA A ROVINA V \mathbb{E}^3

4. Nájdite parametrické vyjadrenie roviny v \mathbb{A}^3 , ktorá

- (a) prechádza bodom $A = (1, 2, 3)$ a má smer $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ (\mathbf{e}_i sú jednotkové súradnicové vektory),
- (b) prechádza bodom A a má smerové vektory $\mathbf{u} = (-5, 6, 4)$, $\mathbf{v} = (2, -1, 0)$,
- (c) prechádza bodmi $B = (3, 2, 1)$, $C = (1, -1, 0)$ a jej smer obsahuje smer y -osi,
- (d) prechádza bodom $M = (-1, 1, 1)$ a obsahuje y -os,
- (e) prechádza bodom $N = (-2, 3, 0)$ a obsahuje priamku $p: (x = 1, y = 2 + t, z = 2 - t)$,
- (f) prechádza priamkou $q: (x = 2 + 3t, y = -1 + 6t, z = 4t)$ a jej smer obsahuje smer priamky $r: (x = -1 + 2t, y = 3t, z = -t)$.

(parametrických vyjadrení má rovina veľa, preto iba príklady správnych riešení: (a) $x = 1 + s, y = 2 + t, z = 3$, (b) $x = 1 - 5s + 2t, y = 2 + 6s - t, z = 3 + 4s$, (c) $x = 3 + 2s, y = 2 + 3s + t, z = 1 + s$, (d) $x = -t, y = t + s, z = t$, (e) $x = -2 - 3s, y = 3 + s + t, z = -2s - t$, (f) $x = 2 + 3s + 2t, y = -1 + 6s + 3t, z = 4s - t$.)

5. Napíšte kanonické rovnice priamky a prepíšte ich do tvaru sústavy rovníc:

- (a) $x = 1 + 2t, y = 2 + 3t, z = 3 + 6t$,
- (a) $x = 8 + 3t, y = -3t, z = 1 + 2t$.

((a) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{6}; 3x - 2y + 1 = 0, 2y - z - 1 = 0$, (b) $\frac{x-8}{3} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{2}; x + y - 8 = 0, 2y + 3z - 3 = 0$.)

6. Nájdite všeobecnú rovnicu roviny v \mathbb{A}^3 :

$$\alpha: x = 1 - u + 2v, y = 2 + u + v, z = 1 + 2u - 3v.$$

Ako môžete overiť správnosť výsledku?

($5x - y + 3z - 6 = 0$. Overenie: napríklad dosadíme parametrické vyjadrenie do všeobecnej rovnice.)

7. Dokážte, že roviny

$$\begin{aligned} \alpha: x &= 1 + u - v, y = -u + 2v, z = u + v, \\ \beta: 3x + 2y - z - 3 &= 0 \end{aligned}$$

sú totožné, a že priamka

$$p: x = 2 + t, y = -1, z = 1 + 3t$$

leží v rovine α .

8. Napíšte rovnicu roviny, ktorá prechádza priamkou $p: x + 2y - z + 4 = 0, 3x - y + 2z - 1 = 0$ a bodom $A = (-3, 1, 0)$.

$$(20x + 19y - 5z + 41 = 0)$$

9. Zostavte rovnicu roviny, ktorá prechádza bodom $A = (9, 8, -7)$ kolmo na priamku p , ak

- (a) $p: x = 35 + 2t, y = -435 - t, z = 3t$,
- (b) $p: x - y - 3z - 91 = 0, 2x + y - 2z + 2 = 0$.

((a) $2x - y + 3z + 11 = 0$ (b) $5x - 4y + 3z + 8 = 0$.)

PRIENIKY A VZÁJOMNÉ POLOHY PODPRIESTOROV

10. Určte vzájomnú polohu rovín α, β z \mathbb{E}^3 , ak

(a) $\alpha: 3x - 2y - 3z + 5 = 0; \quad \beta: 9x - 6y - 9z - 5 = 0,$

(b) $\alpha: x = 1+u+v, y = 2+u, z = 3+u-v; \quad \beta: x = 1+u, y = 3u+v, z = 4+2u+2v,$

(c) $\alpha: x - 2y + z = 0; \quad \beta: x = 1 + u + v, y = 2 + u, z = 3 + u - v.$

((a) rovnobežné rôzne, (b) rôznobežné, (c) totožné)

11. Vyšetrite vzájomnú polohu priamky p a roviny α v \mathbb{E}^3 (prípadne určte ich prienik), ak

(a) $p: x = -1 + 2t, y = 3 + 4t, z = 3t; \quad \alpha: 3x - 3y + 2z - 5 = 0,$

(b) $p: 2x + 3y + 6z - 10 = 0, x + y + z + 5 = 0; \quad \alpha: y + 4z + 17 = 0,$

(c) $p: x+2y+3z+8 = 0, 5x+3y+z-16 = 0; \quad \alpha: x = 2+u+3v, y = -8+6u-8v, z = -3 - u + 3v.$

((a) rovnobežné disjunktné, (b) rovnobežné disjunktné, (c) rôznobežné)

12. Vyšetrite vzájomnú polohu priamok p, q , ak

(a) $p: x = 1 + 2t, y = 2 - 2t, z = -t; \quad q: x = -2t, y = -5 + 3t, z = 4,$

(b) $p: x = 3 + t, y = -1 + 2t, z = 4; \quad q: x - 3y + z = 0, x + y - z + 4 = 0,$

(c) $p: 2x + 3y = 0, x + z - 8 = 0; \quad q: z - 4 = 0, 2x + 3y = 0.$

((a) mimobežné, (b) mimobežné, (c) rôznobežné)

13. Nájdite priamku pretínajúcu mimobežky $p: x+y=0, x-y+z=-4$ a $q: x+3y=-4, y+z=2$, ktorá

(a) prechádza bodom $M = (2, 3, 8),$

(b) má smerový vektor $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$

(Skúste napríklad najprv nájsť vhodnú rovinu obsahujúcu jednu z priamok a potom nájsť jej prienik s druhou priamkou.)

((a) $x = 2 + 20t, y = 3 - 5t, z = 8 + 8t,$ (b) $x = -7 + t, y = 1 + t, z = 1 + t$)

INVARIANTNÉ BODY, SMERY A PODPRIESTORY AFINNEJ TRANSFORMÁCIE

14. Určite samodružné body a samodružné smery afinnej transformácie $\mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ ($\mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$):

- (a) $(x, y) \mapsto (2x - y + 1, x + 2y + 3)$,
- (b) $(x, y) \mapsto (2x - 5y, 2x + 3y)$,
- (c) $(x, y) \mapsto (\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3})$,
- (d) $(x, y) \mapsto (3x - y, x + y)$,
- (e) $(x, y) \mapsto (3x - y + 6, 3y + 4)$,
- (f) $(x, y) \mapsto (3x + 4y - 8, x + 3y - 4)$,
- (g) $(x, y) \mapsto (4x + 5y - 11, 2x + 4y - 7)$,
- (h) $(x, y) \mapsto (5x + y, 4x + 8y)$,
- (i) $(x, y, z) \mapsto (2x - 2y - 2z + 1, 2x + 3y - 3z, y - z + 4)$,
- (j) $(x, y, z) \mapsto (4x - y - 2z, 2x + y - 2z, x - y + z)$,
- (k) $(x, y, z) \mapsto (x - y + 2z - 7, y + z - 5, x - 2y + z + 6)$.

15. Určte samodružné body a priamky afinnej transformácie:

- (a) $(x, y) \mapsto (-x + 4y - 2, 2x - 3y + 3)$,
- (b) $(x, y) \mapsto (3x + y - 1, 2x + 2y - 1)$,
- (c) $(x, y) \mapsto (7x - y - 1, 4x + 2y + 4)$,
- (d) $(x, y) \mapsto (\frac{13}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{8}{5}, \frac{4}{5}x + \frac{7}{5}y - \frac{4}{5})$,

16. Tieto príklady rozhodne nepovažujem za elementárne, no napriek tomu ich sem dávam pre prípad, že by si chcel niekto trochu pocvičiť svoju matematickú invenciu.

Určte samodružné body, priamky a roviny afinnej transformácie:

- (e) $(x, y, z) \mapsto (x + 4y + z + 1, 2x + 2y + z, -8x - 2z - 1)$,
- (f) $(x, y, z) \mapsto (2x + y + 1, 2y + z, 2z + 3)$,
- (g) $(x, y, z) \mapsto (3x - 4y + 6, 4x + 3y - 8, -2z + 9)$,
- (h) $(x, y, z) \mapsto (2x + y - 2z + 2, -y + z, 2y + 2)$,
- (i) $(x, y, z) \mapsto (2y, 2x, z + 1)$,
- (j) $(x, y, z) \mapsto (x + y, y + z, z + 1)$,
- (k) $(x, y, z) \mapsto (2x - 2, -6x - y + 14, 19x + 6y + z - 44)$,
- (l) $(x, y, z) \mapsto (x - y, x + y, z + 2)$,
- (m) $(x, y, z) \mapsto (x + z + 1, 2x + 2y + z - 1, -2z)$,
- (n) $(x, y, z) \mapsto (x + 2y + z - 3, -y + 4, x + 4y + z - 2)$,
- (o) $(x, y, z) \mapsto (2x + y - z + 1, -x + z - 1, 2x + 2y + z + 2)$,
- (p) $(x, y, z) \mapsto (6x - 2y - 3z, -2x + 3y - 6z + 6, -3x - 6y - 2z + 1)$,
- (q) $(x, y, z) \mapsto (-2x - 2y + 2z + 1, 2x + 3y - 3z, y - z + 4)$,
- (r) $(x, y, z) \mapsto (2x + 4y - 2z + 2, 2x + 5y - 2z + 2, -2x - 4y + 3z - 2)$,
- (s) $(x, y, z) \mapsto (\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y, -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y, z)$,

ZHODNOSTI EUKLIDOVSKÉJ ROVINY

17. Zistite, či f je zhodnosť

(a) $f : (x, y) \mapsto (x - \frac{1}{2}y + 1, \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y + 1)$,

(b) $f : (x, y) \mapsto (x + 4, y + 3)$,

(c) $f : (x, y, z) \mapsto (\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}y + 1, \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}y + 1, \frac{1}{2}z)$.

((a) nie, (b) áno, (c) nie.)

18. Nájdite priamu a nepriamu izometriu, ktorá zobrazuje

(a) $(1, 0) \mapsto (0, 0)$ a $(0, 0) \mapsto (0, 1)$,

(b) $(1, 0) \mapsto (1, 1)$ a $(5, 2) \mapsto (-1, 5)$.

19. V euklidovskej rovine nájdite predpis pre pre súmernosť podľa osi

(a) $2x + y - 2 = 0$.

(a) $x + y - 5 = 0$.

20. Určte $s \in \mathbb{R}$ tak, aby existovala zhodnosť, ktorá zobrazí bod $(0, 0) \mapsto (5, 0)$ a $(3, 4) \mapsto (9, s)$. Nájdite rovnice takéhoto zobrazenia a určte obraz bodu $(5, 0)$.

21. Rovina sa otáča okolo bodu $(-1, 3)$ o uhol $\pi/4$. Do akých priamok sa zobrazia osi súradnicovej sústavy?