

Zhodnosti

1. Niektoré invarianty afinných transformácií

Videli sme: posunutia s operáciou skladania zobrazení tvoria grupu:

- zložením posunutí je posunutie,
- skladanie posunutí (všeobecne akýchkoľvek zobrazení) je asociatívne,
- neutrálnym prvkom je identita, čo je posunutie pozdĺž nulového vektora,
- inverzným zobrazením k posunutiu pozdĺž vektora $\mathbf{u}$ je posunutie pozdĺž vektora $-\mathbf{u}$.

Napríklad posunutia v euklidovskej rovine tak tvoria tú istú grupu ako vektory v $\mathbb{R}^2$ s operáciou sčítania vektorov.

DEFINÍCIA 5.1. Nech $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ je afinná transformácia. Ak pre podpriestor $\alpha \subset \mathbb{E}^n$ platí, že $f(\alpha) \subset \alpha$, potom α nazývame **(invariantným (samodružným) podpriestorom)**. Ak navyše pre každý bod A podpriestoru α platí, že $f(A) = A$, potom hovoríme, že α je **bodovo samodružný podpriestor**.

DEFINÍCIA 5.2. Nech $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ je afinná transformácia. Ak pre nenulový vektor $\mathbf{u} \in V(\mathbb{E}^n) = \mathbb{R}^n$ platí, že $Df(\mathbf{u}) = \lambda \mathbf{u}$ pre nejaké $\lambda \in \mathbb{R}$, potom $\langle \mathbf{u} \rangle$ (t.j. vektorový podpriestor generovaný vektorom $\mathbf{u}$) nazývame **invariantným (samodružným) smerom**. Číslo λ vtedy nazývame **vlastným číslom (vlastnou hodnotou)** zobrazenia f prislúchajúcim samodružnému smeru $\langle \mathbf{u} \rangle$. Vektor $\mathbf{u}$ tiež voláme **vlastným vektorom** zobrazenia.

PRÍKLAD 5.3. Posunutie v $\mathbb{E}^2$ dané vektorom $\mathbf{u}$:

- samodružné body: žiadne,
- samodružné priamky: všetky priamky so smerovým vektorom $\mathbf{u}$,
- samodružné smery: všetky smery

1.1. Hľadanie invariantných bodov, smerov, podpriestorov. Pre skúmanie invariantov afinných zobrazení všeobecne je užitočné pozrieť sa bližšie na maticu afinnej transformácie. Ak f je afinná transformácia $\mathbb{E}^2$, jej matica $\mathbf{A}_f$ má tvar

$$\mathbf{A}_f = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bod so súradnicami (p_1, p_2) zobrazí f takto:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{10} \\ a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + a_{20} \\ 1 \end{pmatrix},$$

čiže

$$f(p_1, p_2) = (a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{10}, a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + a_{20}).$$

Pozrime sa, ako vyzerá matica Df (užitočné pre skúmanie invariantých smerov zobrazenia):

$$\mathbf{A}_f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Čiže zobrazenie Df má maticu

$$\mathbf{A}_{Df} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že je to podmatica $\mathbf{A}_f$, ktorú získame vynechaním posledného riadku a posledného stĺpca.

Všetky tieto úvahy sa dajú úplne rovnako previesť aj pre n -rozmerný priestor, a tak vidíme, že pre afinnú transformáciu $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ s $(n+1) \times (n+1)$ maticou

$$\mathbf{A}_f = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{Df} & \mathbf{a} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$$

je $n \times n$ podmatica $\mathbf{A}_{Df}$ maticou vektorovej zložky Df zobrazenia f .

Hľadanie invariantných bodov je ľahké. Pre transformáciu $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ s maticou $\mathbf{A}_f$ hľadáme také body $X = (x_1, \dots, x_n)$, že $f(X) = X$. Maticovo:

$$\mathbf{A}_f \mathbf{x} = \mathbf{x},$$

kde $\mathbf{x}$ je stĺpcová matica $(x_1 \dots x_n \ 1)^T$. Toto je sústava n lineárnych rovníc o n neznámych $x_1, \dots, x_n$ (v poslednom riadku je rovnosť $1 = 1$, preto je rovníc naozaj len n).

Hľadanie invariantných smerov je trošička komplikovanejšie. Z matice $\mathbf{A}_f$ si zoberieme podmaticu $\mathbf{A}_{Df}$ popisujúcu asociované zobrazenie vektorových priestorov. Chceme teraz nájsť také vektory $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, pre ktoré platí, že $Df(\mathbf{u}) = \lambda \mathbf{u}$ pre nejaké $\lambda \in \mathbb{R}$. Maticovo:

$$\mathbf{A}_{Df} \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$$

(tu $\mathbf{u}$ je stĺpcová matica obsahujúca súradnice vektora $\mathbf{u}$). Poslednú rovnosť upravíme ($\mathbf{I}_n$ je jednotková $n \times n$ matica):

$$(\mathbf{A}_{Df} - \lambda \mathbf{I}_n) \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Tu $\mathbf{u}$ je nenulový vektor a $\mathbf{A}_{Df} - \lambda \mathbf{I}_n$ je štvorcová matica. Ak ju vnímame ako maticu zobrazenia, tak obrazom nenulového vektora môže byť nulový vektor práve vtedy, keď toto zobrazenie nie je injektívne, čo je ekvivalentné podmienke, že

$$(8) \quad |\mathbf{A}_{Df} - \lambda \mathbf{I}_n| = 0.$$

Toto je rovnica s neznámou λ , ktorú nazývame **charakteristickou rovnicou** lineárneho zobrazenia Df , tiež matice $\mathbf{A}_{Df}$. Polynóm na ľavej strane rovnosti (8) tiež nazývame **charakteristickým polynómom** lineárneho zobrazenia Df aj matice $\mathbf{A}_{Df}$.

Pomocou rovnice (8) tak vypočítame vlastné hodnoty zobrazenia f , budú to korene $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ charakteristickej rovnice. Pre každú vlastnú hodnotu λ_i potom vypočítame zodpovedajúci samodružný vektor ako netriviálne riešenie sústavy lineárnych rovníc

$$(\mathbf{A}_{Df} - \lambda_i \mathbf{I}_n) \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

s neznámymi $u_1, \dots, u_n$.

Hľadanie invariantných (afinných) podpriestorov už môže byť dosť náročné. Obmedzíme sa preto len na hľadanie invariantných priamok.

Ak je priamka p invariantná vzhľadom na transformáciu f , potom pre body $A, B \in p$, $A \neq B$ platí, že $f(A), f(B) \in p$ a preto $f(B) - f(A) \in \langle B - A \rangle$. Teda smer priamky p musí byť tiež samodružný. Takže najprv nájdeme samodružné smery transformácie a potom sa ku každému smeru snažíme nájsť priamku, ktorá by bola samodružná. K tomu nám pomôže si uvedomiť (tak ako v príklade o posunutí na začiatku kapitoly), že ak priamka p je samodružná, tak pre

každý bod $X \in p$ platí, že $f(X) - X$ je nejaký smerový vektor priamky (ktorý zároveň určuje samodružný smer zobrazenia). Čiže ak $\langle \mathbf{u} \rangle$ ($\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$) je samodružný smer, tak riešime sústavu rovníc

$$f(X) - X = c\mathbf{u}$$

s neznámymi $x_1, \dots, x_n, c$, kde $x_1, \dots, x_n$ sú súradnice bodu X (pozor, c nie je vlastná hodnota!) alebo ekvivalentne

$$(\mathbf{A}_f - \mathbf{I}_{n+1})\mathbf{x} = c\mathbf{u}.$$

2. Afinity $\mathbb{E}^n$ tvoria grupu

Afinné transformácie $\mathbb{E}^2$ netvoria grupu, napríklad premietanie na x -os $(a, b) \mapsto (a, 0)$ nemá inverzný prvok. Ak by sme sa však obmedzili len na bijektívne transformácie (tzv. afinity), tie už grupu tvoria, o čom sa hneď presvedčíme.

Nech f je afinita $\mathbb{E}^2$, t.j. bijektívne zobrazenie. Presvedčili sme sa (Tvrdenie 2.20 v časti o afinných zobrazeniach), že toto je ekvivalentné fakt, že asociované zobrazenie vektorového priestoru do seba $Df: V(\mathbb{E}^2) \rightarrow V(\mathbb{E}^2)$ je bijektívne.

Lineárne zobrazenie vektorových priestorov je bijektívne práve vtedy, keď jeho matica je regulárna. V tomto prípade teda máme, že $|\mathbf{A}_{Df}| \neq 0$. Lahko sa presvedčíme, že $|\mathbf{A}_f| = |\mathbf{A}_{Df}|$. Našli sme tak kritérium, kedy je afinná transformácia afinitou:

TVRDENIE 5.4. *Nech $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ je afinná transformácia a nech je $\mathbf{A}_f$ jej matica. Potom je f afinitou práve vtedy, keď je matica $\mathbf{A}_f$ regulárna.*

Dôkaz. Dôkaz pre $n = 2$ sme si práve predviedli. Pre ľubovoľné n dôkaz vyzerá tak isto. $\square$

Dá sa samozrejme skúmať štruktúra grupy všetkých afinít. My sa ale obmedzíme na menšiu, veľmi dôležitú podgrupu.

3. Zhodnosti tvoria podgrupu afinít

Okrem invariantých bodov, priamok, smerov... môžeme uvažovať ešte aj iné invarianty afinných zobrazení. Tak v tejto časti sa zameriame na nový invariant: vzdialenosť bodov.

DEFINÍCIA 5.5. Zobrazenie $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ sa nazýva **zhodnosť (izometria)**, ak pre ľubovoľné body $X, Y \in \mathbb{E}^n$ platí, že $|f(X)f(Y)| = |XY|$

VETA 5.6. *Každá zhodnosť euklidovského priestoru je jeho afinitou.*

Dôkaz. Zobrazenie $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ je afinné, keď zachováva afinné kombinácie bodov, t.j. keď pre ľubovoľné $P_0, \dots, P_r \in \mathbb{E}^n$ a $\lambda_0, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ také, že $\sum_{i=0}^r \lambda_i = 1$, platí

$$(9) \quad f\left(\sum_{i=0}^r \lambda_i P_i\right) = \sum_{i=0}^r \lambda_i f(P_i).$$

Podľa Vety 2.12 stačí ukázať, že zobrazenie zachováva afinné kombinácie dvojíc bodov, t.j. že pre ľubovoľné rôzne $P_0, P_1 \in \mathbb{E}^n$ platí

$$f((1-\lambda)P_0 + \lambda P_1) = (1-\lambda)f(P_0) + \lambda f(P_1).$$

Označme $X = (1-\lambda)P_0 + \lambda P_1$. Nech $X \neq P_0$, $X \neq P_1$ (ak by nastala niektorá z rovností, niet čo dokazovať). Potom body P_0, P_1, X sú kolíneárne a tak určite nastane jedna z možností

- $|P_0 P_1| = |P_0 X| + |X P_1|$,
- $|P_0 X| = |P_0 P_1| + |P_1 X|$,
- $|P_1 X| = |P_1 P_0| + |P_0 X|$.

Keďže f je zhodnosť, ten istý vzťah bude platiť aj pre $f(P_0), f(P_1), f(X)$, a teda sú aj tieto body kolíneárne. Navyše analýzou každej z možností o usporiadaní týchto bodov na spoločnej priamke zistíme, že $f(X) = (1 - \lambda)f(P_0) + \lambda f(P_1)$.

Ukázali sme, že zobrazenie f je afinné. Potrebujeme ešte ukázať, že f je bijektívne.

Zo separačnej vlastnosti metriky máme, že ak $A \neq B$, potom $|AB| \neq 0$, teda $|f(A)f(B)| \neq 0$, a tak aj $f(A) \neq f(B)$. Ukázali sme, že zhodnosť f je injektívne zobrazenie. Z Tvrdenia 2.20 je potom aj Df injektívne. Keďže Df je transformácia vektorového priestoru $\mathbb{R}^n$, z lineárnej algebry vieme, že vďaka injektívnosti je Df aj surjektívne, a teda znovu z Tvrdenia 2.20 je f surjektívne. $\square$

Môžeme to teraz zhrnúť aj tak, že zhodnosť je taká afinita $\mathbb{E}^n$, pre ktorú je vzdialenosť bodov invariantom.

VETA 5.7. *Množina všetkých izometrií na $\mathbb{E}^n$ spolu s operáciou skladania zobrazení tvorí grupu.*

Dôkaz. Potrebujeme overiť, že

- (i) identita je zhodnosť,
- (ii) zloženie dvoch zhodností je zhodnosť,
- (iii) inverzná afinita k zhodnosti je tiež zhodnosť.

(i) je zrejmé.

(ii) Nech $f, g: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ sú zhodnosti. Potom pre $X, Y \in \mathbb{E}^n$ platí

$$|(f \circ g)(X)(f \circ g)(Y)| = |f(g(X))f(g(Y))| = |g(X)g(Y)| = |XY|,$$

teda $f \circ g$ je zhodnosť.

(iii) Nech f je zhodnosť a f^{-1} je k nej inverzná afinita. Pre každé $X \in \mathbb{E}^n$ označme $X' = f(X)$, teda platí, že $X = f^{-1}(X')$. Potom

$$|f^{-1}(X')f^{-1}(Y')| = |XY| = |f(X)f(Y)| = |X'Y'|,$$

preto f^{-1} je zhodnosť. $\square$

DEFINÍCIA 5.8. Grupa izometrií euklidovského priestoru $\mathbb{E}^n$ sa nazýva **euklidovská grupa**, ozn. $E(n)$.

4. Ktoré afinity sú izometriami – kritérium

VETA 5.9. *Afinita $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ je zhodnosť práve vtedy, keď $Df: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ zachováva skalárny súčin.*

Dôkaz. Nech je f zhodnosť. Nech $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ sú ľubovoľné vektory. Potrebujeme ukázať, že

$$Df(\mathbf{u}) \cdot Df(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}.$$

Všimnime si najprv, že pre ľubovoľný vektor $\mathbf{w}$, ak $Y - X = \mathbf{w}$ je jeho umiestnenie, tak z faktu, že f je zhodnosť, vyplýva

$$\begin{aligned} \|Df(\mathbf{w})\|^2 &= Df(\mathbf{w}) \cdot Df(\mathbf{w}) = Df(Y - X) \cdot Df(Y - X) = (f(Y) - f(X)) \cdot (f(Y) - f(X)) \\ &= |f(X)f(Y)|^2 = |XY|^2 = (Y - X) \cdot (Y - X) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} = \|\mathbf{w}\|^2, \end{aligned}$$

teda Df zachováva dĺžky vektorov. Potom z Tvrdenia 3.7

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}(\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2).$$

už dostaneme, že Df zachováva skalárny súčin.

Nech teraz naopak Df zachováva skalárny súčin. Potom pre ľubovoľné $X, Y \in \mathbb{E}^n$ platí

$$\begin{aligned} |f(X)f(Y)| &= \|f(Y) - f(X)\| = \|Df(Y - X)\| \\ &= \sqrt{Df(Y - X) \cdot Df(Y - X)} = \sqrt{(Y - X) \cdot (Y - X)} \\ &= \|Y - X\| = |XY|, \end{aligned}$$

čiže f je zhodnosť. $\square$

Lineárne zobrazenie vektorového priestoru do seba, ktoré zachováva skalárny súčin, sa nazýva **ortogonálne**.

VERA 5.10. *Nech $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je lineárne zobrazenie vektorových priestorov. Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:*

- (i) φ je ortogonálne (t.j. zachováva skalárny súčin),
- (ii) φ zobrazuje ortonormálnu bázu na ortonormálnu bázu,
- (iii) $\mathbf{A}_\varphi^T \mathbf{A}_\varphi = \mathbf{I}_n$, kde $\mathbf{A}_\varphi$ je matrica zobrazenia φ (vzhľadom na ortonormálnu bázu).

POZNÁMKA 5.11. Pre zjednodušenie zápisov budeme používať symbol δ_{ij} ($i, j \in \mathbb{N}$), tzv. **Kroneckerovo delta**:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ak } i = j \\ 0 & \text{ak } i \neq j \end{cases}$$

Dôkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii): Nech φ je ortogonálne a nech $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ je ortonormálna báza. Potom pre $\varphi(\mathbf{u}_i)$ a $\varphi(\mathbf{u}_j)$ platí

$$\varphi(\mathbf{u}_i) \cdot \varphi(\mathbf{u}_j) = \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = \delta_{ij},$$

teda vektory $\varphi(\mathbf{u}_i)$ ($i = 1, \dots, n$) tvoria ortonormálnu bázu $\mathbb{R}^n$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Nech pre ortonormálnu bázu $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ je aj báza $\varphi(\mathbf{u}_1), \varphi(\mathbf{u}_2), \dots, \varphi(\mathbf{u}_n)$ ortonormálna. Vidíme, že φ zachováva skalárny súčin na tejto báze. Predvedieme si, že potom už z bilinearít skalárneho súčinu vyplýva, že sa zachováva na všetkých vektoroch. Každý vektor vieme zapísať ako lineárnu kombináciu bázy. Ak $\mathbf{v} = \sum_i v_i \mathbf{u}_i$, $\mathbf{w} = \sum_j w_j \mathbf{u}_j$, potom

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{v}) \cdot \varphi(\mathbf{w}) &= \varphi\left(\sum_i v_i \mathbf{u}_i\right) \cdot \varphi\left(\sum_j w_j \mathbf{u}_j\right) = \left(\sum_i v_i \varphi(\mathbf{u}_i)\right) \cdot \left(\sum_j w_j \varphi(\mathbf{u}_j)\right) \\ &= \sum_i \sum_j v_i w_j \varphi(\mathbf{u}_i) \cdot \varphi(\mathbf{u}_j) = \sum_i \sum_j v_i w_j \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = \left(\sum_i v_i \mathbf{u}_i\right) \cdot \left(\sum_j w_j \mathbf{u}_j\right) \\ &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}. \end{aligned}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Stĺpce matice $\mathbf{A}_\varphi$ obsahujú súradnice vektorov $\varphi(\mathbf{e}_i)$. V matici $\mathbf{A}_\varphi^T \mathbf{A}_\varphi$ preto máme na ij -tej pozícii skalárny súčin $\varphi(\mathbf{e}_i) \cdot \varphi(\mathbf{e}_j)$:

$$(\mathbf{A}_\varphi^T \mathbf{A}_\varphi)_{ij} = \varphi(\mathbf{e}_i) \cdot \varphi(\mathbf{e}_j) = \delta_{ij},$$

(posledná rovnosť vyplýva z (ii)), čiže $\mathbf{A}_\varphi^T \mathbf{A}_\varphi = \mathbf{I}_n$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Ak $\mathbf{A}_\varphi^T \mathbf{A}_\varphi = \mathbf{I}_n$, tak z pozície na i -tom riadku a j -tom stĺpci máme, že $\varphi(\mathbf{e}_i) \cdot \varphi(\mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$, a teda $\varphi(\mathbf{e}_1), \dots, \varphi(\mathbf{e}_n)$ je ortonormálna báza $\mathbb{R}^n$. $\square$

DÔSLEDOK. *Obrazom karteziánskej sústavy súradníc v izometrii je karteziánska sústava súradníc.*

Dôkaz. Nech f je izometria $\mathbb{E}^n$. Nech $(O, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ je karteziánska súradnicová sústava. Jej obrazom je $(n+1)$ -tica $(f(O), Df(\mathbf{e}_1), \dots, Df(\mathbf{e}_n))$, kde $Df(\mathbf{e}_1), \dots, Df(\mathbf{e}_n)$ je tiež ortonormálna báza, lebo Df je ortogonálne zobrazenie. $\square$

TVRDENIE 5.12. *Všetky ortogonálne zobrazenia $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tvoria grupu, ktorá sa nazýva **ortogonálna grupa**, ozn. $O(n)$*

Dôkaz. Identita (ako neutrálny prvok vzhľadom na skladanie ortogonálnych zobrazení) je zrejme ortogonálne zobrazenie.

Nech φ, ψ sú ortogonálne zobrazenia s maticami $\mathbf{A}_\varphi, \mathbf{A}_\psi$. Pre maticu zobrazenia $\psi \circ \varphi$ platí, že $\mathbf{A}_{\psi \circ \varphi} = \mathbf{A}_\psi \mathbf{A}_\varphi$. Preto

$$\mathbf{A}_{\psi \circ \varphi}^T \mathbf{A}_{\psi \circ \varphi} = (\mathbf{A}_\psi \mathbf{A}_\varphi)^T (\mathbf{A}_\psi \mathbf{A}_\varphi) = \mathbf{A}_\varphi^T \mathbf{A}_\psi^T \mathbf{A}_\psi \mathbf{A}_\varphi = \mathbf{A}_\varphi^T \mathbf{A}_\varphi = \mathbf{I}_n,$$

teda $\psi \circ \varphi$ je tiež ortogonálne zobrazenie.

Nech φ^{-1} je inverzné zobrazenie k ortogonálnemu zobrazeniu φ . Vieme už, že $\mathbf{A}_{\varphi^{-1}} = \mathbf{A}_\varphi^{-1}$. Potom

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_n &= \mathbf{A}_\varphi^T \mathbf{A}_\varphi & | & \cdot \mathbf{A}_\varphi^{-1} \\ \mathbf{A}_\varphi^{-1} &= \mathbf{A}_\varphi^T & | & \cdot (\mathbf{A}_\varphi^{-1})^T \\ (\mathbf{A}_\varphi^{-1})^T \mathbf{A}_\varphi^{-1} &= (\mathbf{A}_\varphi^{-1})^T \mathbf{A}_\varphi^T = (\mathbf{A}_\varphi \mathbf{A}_\varphi^{-1})^T = \mathbf{I}_n. \end{aligned}$$

Takže inverzné zobrazenie k ortogonálnemu je tiež ortogonálne. $\square$

PRÍKLAD 5.13. Vieme overiť, že napríklad otočenie r roviny $\mathbb{E}^2$ okolo bodu S je izometria. Najprv sa pomocou Vety 5.10 presvedčíme, že otočenie r_0 okolo $(0, 0)$ je izometria. Nakoniec otočenie r okolo S o uhol α vieme rozložiť

$$r = t_s \circ r_0 \circ t_{-s},$$

kde t_s je posunutie o vektor $S - (0, 0)$.

5. Grupa zhodností $\mathbb{E}^2$

TVRDENIE 5.14. *Nech $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ je zhodnosť. Potom pre determinant matice jej asociovaného zobrazenia Df platí*

$$|\mathbf{A}_{Df}| = \pm 1.$$

Dôkaz. Ide o dôsledok Vety 5.10. Ak f je zhodnosť, tak $\mathbf{A}_{Df}^T \mathbf{A}_{Df} = \mathbf{I}_n$. Potom

$$|\mathbf{A}_{Df}^T \mathbf{A}_{Df}| = |\mathbf{I}_n| = 1$$

a na druhej strane

$$|\mathbf{A}_{Df}^T \mathbf{A}_{Df}| = |\mathbf{A}_{Df}^T| |\mathbf{A}_{Df}| = |\mathbf{A}_{Df}|^2.$$

Odtiaľ už máme výsledok. $\square$

Zhodnosť $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ sa nazýva **priama**, ak $|\mathbf{A}_{Df}| = 1$ a **nepriama**, ak $|\mathbf{A}_{Df}| = -1$. Inak: zhodnosť je priama, ak zachováva orientáciu priestoru.

Zrejme priame zhodnosti tvoria podgrupu všetkých zhodností. (Vedeli by ste to ukázať formálne?)

LEMA 5.15. *Nech $A, B \in \mathbb{E}^2$ sú rôzne body. Množina takých bodov X v $\mathbb{E}^2$, že $AX \cong BX$, tvorí priamku, ktorá prechádza stredom úsečky AB a je kolmá na $\overleftrightarrow{AB}$. Táto priamka sa nazýva **os úsečky AB** .*

Dôkaz. dú $\square$

DEFINÍCIA 5.16. Nech o je priamka v $\mathbb{E}^2$. **Súmernosť podľa priamky o (osová súmernosť)** je transformácia $\mathcal{S}_o$ euklidovskej roviny definovaná nasledovne:

Nech $X \in \mathbb{E}^2$.

- Ak $X \in o$, potom $\mathcal{S}_o(X) = X$,
- Ak $X \notin o$, nech
 - $o_X^\perp$ je priamka prechádzajúca cez X a kolmá na o
 - a $X^\perp = o \cap o_X^\perp$.

Potom $\mathcal{S}_o(X)$ je taký bod na $o_X^\perp$, ktorý leží v opačnej polrovine od o ako X a $|\mathcal{S}_o(X)X^\perp| = |XX^\perp|$.

Ekvivalentne by sme mohli obraz bodu X v súmernosti $\mathcal{S}_o$ podľa o popísať aj tak, že $\mathcal{S}_o(X)$ je taký bod, že o je os úsečky $X\mathcal{S}_o(X)$.

TVRDENIE 5.17. *Osová súmernosť je nepriama zhodnosť.*

Dôkaz. Súmernosť podľa x -osi $\mathcal{S}$ zobrazí bod (x_1, x_2) na bod $(x_1, -x_2)$. Lahko sa presvedčíme, že je to zhodnosť:

$$|\mathcal{S}(a_1, a_2)\mathcal{S}(b_1, b_2)| = |(a_1, -a_2)(b_1, -b_2)| = |(a_1, a_2)(b_1, b_2)|$$

Súmernosť podľa ľubovoľnej osi vieme previesť na súmernosť podľa x -osi zložením s vhodnými otočeniami alebo posunutiami. Otočenia aj posunutia sú tiež zhodnosti, takže výsledné zobrazenie je zhodnosť.

Posunutie aj otočenie sú priame zhodnosti, keďže determinanty matíc týchto zobrazení sú rovné 1. Súmernosť podľa x -osi je zas nepriama zhodnosť. Zloženie jednej nepriamej a viacerých priamych zhodností je nepriama zhodnosť (z vlastnosti determinantu súčinu matíc). $\square$

POZNÁMKA 5.18. Pre osovú súmernosť $\mathcal{S}$ zrejme platí, že $\mathcal{S} \circ \mathcal{S} = id$. Takéto zobrazenie sa nazýva **involúcia**.

VETA 5.19. *Každá zhodnosť euklidovskej roviny sa dá napísať ako zloženie nanajviš troch osových súmerností.*

Dôkaz. Nech f je daná zhodnosť. Nech A, B, C sú tri nekolineárne body. Nájdeme nanajviš tri osové súmernosti $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$ také, že pre ich zloženie

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_3 \circ \mathcal{S}_2 \circ \mathcal{S}_1$$

(prípadne bude $\mathcal{S}$ zložením menej ako 3 súmerností) bude platiť

$$\mathcal{S}(A) = f(A), \quad \mathcal{S}(B) = f(B), \quad \mathcal{S}(C) = f(C).$$

Potom z Dôsledku Vety 2.19 o určenosti afinného zobrazenia vyplýva, že $\mathcal{S}$ a f je to isté zobrazenie.

Keďže f je zhodnosť, tak pre body A, B, C platí, že

$$|f(A)f(B)| = |AB|, \quad |f(B)f(C)| = |BC|, \quad |f(A)f(C)| = |AC|.$$

Ak $f(A) = A$, tak $\mathcal{S}_1$ nech je identita. Ak $f(A) \neq A$, potom nech o_1 je priamka prechádzajúca stredom úsečky $Af(A)$ a kolmá $\overleftrightarrow{Af(A)}$ (tzv. os úsečky $Af(A)$). Nech $\mathcal{S}_1$ je osová súmernosť podľa osi o_1 . Zrejme $\mathcal{S}_1$ bod A zobrazí na bod $f(A)$. Označme $B_1 = \mathcal{S}_1(B)$ a $C_1 = \mathcal{S}_1(C)$. Keďže osová súmernosť je zhodnosť, tak platí

$$|f(A)f(B)| = |AB| = |f(A)B_1|.$$

Ak $f(B) = B_1$, potom zas nech $\mathcal{S}_2$ je identita. Ak $f(B) \neq B_1$, potom nech o_2 je os úsečky $B_1f(B)$ a nech $\mathcal{S}_2$ je osová súmernosť podľa osi o_2 , teda $\mathcal{S}_2(B_1) = f(B)$. Keďže $|f(A)f(B)| = |f(A)B_1|$, tak $f(A) \in o_2$. Preto $\mathcal{S}_2(f(A)) = f(A)$. Pre bod C označme $\mathcal{S}_2(C_1) = C_2$. Pre vzdialenosti bodov máme

$$\begin{aligned} |f(A)f(C)| &= |AC| = |f(A)C_1| = |f(A)C_2| \\ |f(B)f(C)| &= |BC| = |B_1C_1| = |f(B)C_2|, \end{aligned}$$

kde v oboch riadkoch prvá rovnosť vyplýva z faktu, že f je zhodnosť, druhá z toho, že o_1 je zhodnosť a tretia z toho, že o_2 je zhodnosť.

Nakoniec, ak $f(C) \neq C_2$, potom nech o_3 je os úsečky $C_2f(C)$. Z práve ukázaných rovností máme, že $f(A), f(B) \in o_3$, teda sú to pevné body súmernosti $\mathcal{S}_3$ podľa osi o_3 . Navyše $\mathcal{S}_3(C_2) = f(C)$. (Znovu v prípade, že $f(C) = C_2$, položíme $\mathcal{S}_3 = id$)

Našli sme tak súmernosti $\mathcal{S}_i$ také, že zobrazenia $\mathcal{S}_3 \circ \mathcal{S}_2 \circ \mathcal{S}_1$ a f súhlasia na trojici nekolíneárnych bodov A, B, C , čiže

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_3 \circ \mathcal{S}_2 \circ \mathcal{S}_1$$

□

DÔSLEDOK. *Osové súmernosti generujú grupu všetkých zhodností.*