

8. ZADANIA NA CVIČENIE 10.4.

Axiómy zhodnosti

Budeme dokazovať štandardné tvrdenia geometrie základnej a strednej školy (zadania 62, 64 a 63) V každom dôkaze budeme podľa potreby využívať aj predchádzajúce (ideálne už dokázané) tvrdenia.

62. Ukážte, že v trojuholníku je protilahlý uhol k väčšej strane väčší ako protilahlý uhol k menšej strane. Inak: ak v $\triangle ABC$ platí $AB > AC$, potom $\angle C > \angle B$.
(Nápoveda: na strane AB nájdite bod D tak, že $AD \cong AC$ a skúmajte okrem $\triangle ABC$ aj rovnoramenný trojuholník $\triangle ADC$. Zrejme využijete porovnávanie uhlov, Pappovu vetu a vetu o vonkajšom uhle trojuholníka.)

63. Dokážte trojuholníkovú nerovnosť. Presnejšie, ukážte, že v ľubovoľnom trojuholníku $\triangle ABC$ je súčet strán (úsečiek) AC a BC väčší ako strana (úsečka) AB .
(Nápoveda: na polpriamke opačnej k $\overrightarrow{CA}$ zostrojíte bod D tak, že $CD \cong BC$. Potom okrem $\triangle ABC$ skúmajte aj rovnoramenný trojuholník $\triangle BDC$. Zrejme využijete Pappovu vetu, porovnávanie uhlov, a tvrdenie z cvičenia 64.)

DOMÁCA ÚLOHA (DO 24.4.)

Axiómy zhodnosti

64. Ukážte, že v trojuholníku je protilahlá strana k väčšiemu uhlu väčšia ako protilahlá strana k menšiemu uhlu.
(Nápoveda: ide o veľmi jednoduchý dôsledok cvičenia 62.)

65. Dokončíte dôkaz existencie jediného stredú úsečky. (Nápoveda: pre jednoznačnosť uvažujte usporiadanie $A * S_1 * S_2$ a $S_1 * S_2 * B$ na priamke $\overleftrightarrow{AB}$, vyargumentujte, že nejde o ujmu na všeobecnosti. Pre existenciu nech $C \notin \overleftrightarrow{AB}$, nech D je taký bod v polrovine opačnej k $\overleftrightarrow{ABC}$, že $\angle ABD \cong \angle BAC$ a $BD \cong AC$. Uvažujte priesečník CD s $\overleftrightarrow{AB}$ a skúmajte trojuholníky, ktoré Vám týmto vzniknú.)

66. Polpriamka $\overrightarrow{BD}$ medzi polpriamkami $\overrightarrow{BA}$ a $\overrightarrow{BC}$ uhla $\angle ABC$ je *osou uhla* $\angle ABC$, ak $\angle ABD \cong \angle DBC$.

Ukážte, že každý uhol má práve jednu os.

(Treba ukázať jednoznačnosť aj existenciu. Pri dôkaze jednoznačnosti sa môžete inšpirovať v Hilbertovom dôkaze štvrtého Euklidovho postulátu.)

(pokračovanie na ďalšej strane)

67. Nájdite chybu v dôkaze nasledovného tvrdenia:

Tvrdenie: Právý uhol je zhodný s tupým uhlom.

Dôkaz: Nech AB je úsečka, nech body C a D ležia v tej istej polrovine od $\overleftrightarrow{AB}$ tak, že $AC \cong BD$, $\angle ABD$ je pravý a $\angle BAC$ je tupý (viď obrázok). Ukážeme, že tieto dva uhly sú zhodné.

- Nech o_1 je os úsečky AB a nech o_2 je os úsečky CD .
- Priamky $\overleftrightarrow{AB}$ a $\overleftrightarrow{CD}$ určite nie sú rovnobežné,
- preto aj o_1 a o_2 sú rôznobežné; označme ich priesečník N .
- Priesečník N sa určite nachádza na tej istej strane od $\overleftrightarrow{CD}$ ako body A a B ,
- máme teda možnosti: N leží vnútri štvoruholníka $ABDC$, N leží na úsečke AB alebo N leží zvonka štvoruholníka $ABDC$ „pod priamkou“ $\overleftrightarrow{AB}$.
- Nech N leží vnútri štvoruholníka $ABDC$. Uvažujme trojuholníky $\triangle ANC$ a $\triangle BND$. V nich
 - $AN \cong BN$, lebo $N \in o_1$,
 - $CN \cong DN$, lebo $N \in o_2$,
 - $AC \cong BD$ z konštrukcie bodov C a D ,
 preto $\triangle ANC \cong \triangle BND$.
- Odtiaľ $\angle NAC \cong \angle NBD$.
- Ďalej $\triangle ABN$ je rovnoramenný, preto $\angle ABN \cong \angle BAN$.
- Sčítaním uhlov tak dostaneme $\angle BAC \cong \angle ABD$.
- V prípade, keď $N \in AB$, postupujeme tak isto, v tomto prípade zhodnosť uhlov $\angle BAC$ a $\angle ABD$ vyplynie hneď zo zhodnosti $\triangle ANC \cong \triangle BND$.
- Nakoniec v prípade, keď N leží zvonka štvoruholníka $ABDC$ postupujeme tiež analogicky; zhodnosť uhlov $\angle BAC$ a $\angle ABD$ dostaneme odčítaním uhlov $\angle NAC - \angle NAB$ a $\angle NBD - \angle NBA$.

