

9. ZADANIA NA CVIČENIE 24.4.

Axiómy zhodnosti

68. Dokážte vetu Ssu o zhodnosti trojuholníkov:

Ak pre trojuholníky $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$ platí, že $AB \cong A'B' > AC \cong A'C'$ a $\angle C \cong \angle C'$, potom sú tieto trojuholníky zhodné.

(Možný postup: sporom predpokladajte $CB < C'B'$, naneste na $\overrightarrow{CB}$ bod B'' tak, že $CB'' \cong C'B'$. Porovnajte AB s AB'' . Využijete pritom vlastnosť trojuholníkov, že oproti väčšej strane sa nachádza väčší uhol a naopak, viď úloha 62 a 64.)

69. Demonštrujte, že predpoklad v tvrdení z úlohy 68, že uvažovaný uhol musí ležať oproti väčšej z uvažovaných strán, je podstatný. Presnejšie, nájdite $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$ také, že $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$, $\angle C \cong \angle C'$, ale tieto dva trojuholníky nie sú zhodné.

Konstrukčné úlohy

70. Sú dané dva rôzne body A, B ležiace vnútri tej istej polroviny s hraničnou priamkou p . Zostrojte bod X na priamke p taký, aby priamky $\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{BX}$ zvierali s priamkou p zhodné uhly.

71. Sú dané dva rôzne body A, B ležiace vnútri tej istej polroviny s hraničnou priamkou p . Zostrojte bod X na priamke p taký, aby súčet dĺžok úsečiek $|AX| + |BX|$ najmenší.

72. Zostrojte $\triangle ABC$, ak sú dané: veľkosť uhla $\angle A$, veľkosť uhla $\angle B$ a dĺžka strany AC . Úlohu riešte s využitím

- (a) obvodového a stredového uhla nad tetivou kružnice,
- (b) podobnosti trojuholníkov.

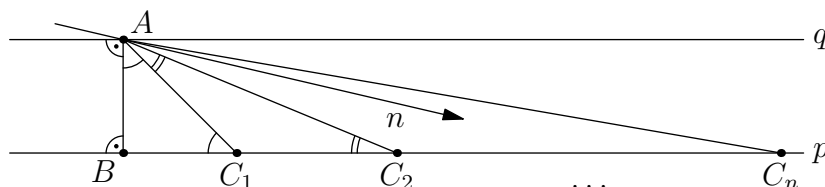
DOMÁCA ÚLOHA (DO 15.5.)

Axióma rovnobežnosti

73. Ukážte, že ak v Hilbertovej rovine (t.j. v rovine, kde platia axiómy incidencie, usporiadania a zhodnosti) platí axióma rovnobežnosti, potom je súčet vnútorných uhlov trojuholníka rovný dvom pravým uhlom. (Dôkaz možno niektorí poznáte zo strednej školy, prípadne sa inšpirujte: Euklides I.32.)

74. Vypracujte dôsledne indukciu v dôkaze vety: „Ak je v Hilbertovej rovine súčet uhlov v každom trojuholníku rovný dvom pravým, potom v tejto rovine platí axióma rovnobežnosti.“ (Veta 5.6 z prednášky).

V dôkaze sa medzi rovnobežkami p, q (q zostrojená cez bod A pomocou kolmíc) konštruje postupnosť rovnoramenných trojuholníkov $\triangle AC_i C_{i+1}$ so základňou AC_{i+1} . Overte,



že vnútorný uhol v $\triangle AC_i C_{i+1}$ pri základni je $(1/2^{i+1})$ -násobok pravého uhla.

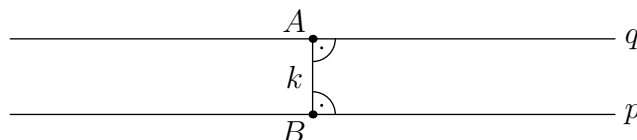
(pokračovanie na ďalšej strane)

Nasledujúce „dôkazy” vychádzajú iba z axióm incidencie, usporiadania a zhodnosti a snažia sa ukázať, že jedinečnosť rovnobežky netreba postulovať, ale že sa dá dokázať.

75. Nájdite chybu v dôkaze nasledovného tvrdenia:

Tvrdenie: Pre danú priamku a daný bod neležiaci na tejto priamke existuje jediná priamka prechádzajúca týmto bodom a rovnobežná s danou priamkou.

Dôkaz: Daná je priamka p a bod A na nej neležiaci. Z bodu A spustíme na priamku

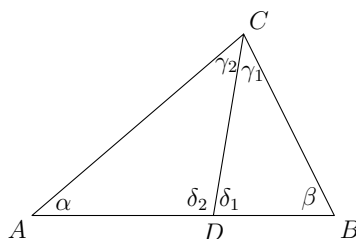


p kolmicu k . Potom bodom A vedieme kolmicu na priamku k , označíme ju q . Vieme (bolo ukázané aj na prednáške), že q a p sú rovnobežné. Tiež už vieme (bolo ukázané na prednáške), že kolmica k spustená z bodu A na priamku p je jediná, a tiež kolmica q ku k vedená bodom A je jediná, preto je rovnobežka q ku priamke p vedená bodom A jediná.

76. Nájdite chybu v dôkaze nasledovného tvrdenia:

Tvrdenie: Súčet uhlov v trojuholníku je rovný dvom pravým uhlom (t.j. 180°) (bez použitia axiómy rovnobežnosti).

Dôkaz: Uvažujme označenie ako na obrázku: trojuholník ABC je úsečkou CD (D je vnútorný bod strany AB) rozdelený na $\triangle ADC$ a $\triangle DBC$. Nech x označuje zatiaľ neznámy



súčet uhlov v trojuholníku. Teda máme:

$$\alpha + \delta_2 + \gamma_2 = x,$$

$$\delta_1 + \beta + \gamma_1 = x.$$

Sčítaním týchto dvoch rovností dostávame

$$\alpha + \delta_2 + \delta_1 + \beta + \gamma_1 + \gamma_2 = 2x.$$

Na druhej strane v $\triangle ABC$ máme

$$\alpha + \beta + \gamma_1 + \gamma_2 = x.$$

Navyše uhly δ_1 a δ_2 sú vedľajšie, teda

$$\delta_1 + \delta_2 = 180^\circ.$$

Odtiaľ dostávame, že

$$x + 180^\circ = 2x.$$

a preto $x = 180^\circ$ je hľadaný súčet uhlov v trojuholníku.