

10. ZADANIA NA CVIČENIE 15.5.

Axiómy spojitosti

PRINCÍP SPOJITOSTI KRUŽNICE 2. Ak priamka obsahuje vnútorný bod kružnice, potom táto priamka pretína kružnicu v dvoch bodoch.

PRINCÍP SPOJITOSTI KRUŽNICE 3. Ak jeden z koncových bodov úsečky je vnútorným a druhý vonkajším bodom kružnice, potom táto úsečka kružnicu pretína.

77. Overte, že Princíp spojitosti kružnice 2. je dôsledkom Princípu spojitosti kružnice 3. (Nápoveda: na priamke, ktorá obsahuje vnútorný bod kružnice, potrebujete nájsť aj vonkajšie body kružnice. Treba ich hľadať dostatočne ďaleko od vnútorného bodu a využiť pri argumentácii, že ide naozaj o vonkajší bod, trojuholníkovú nerovnosť.)

Dokazovanie v euklidovskej rovine

78. Nech k je kružnica so stredom S a nech AB je jej tetiva. Nech X je stred AB . Potom priamka $\overleftrightarrow{SX}$ je kolmá na priamku $\overleftrightarrow{AB}$.

- (a) Dokážte toto tvrdenie s pomocou syntetickej (axiomaticky budovanej) geometrie. (Nápoveda: uvažujte trojuholníky $\triangle SXA$ a $\triangle SXB$.)
- (b) Dokážte toto tvrdenie s pomocou analytickej geometrie. (Nápoveda: vhodne si zvolte súradnicovú sústavu, napr. tak, aby stred kružnice bol v začiatku sústavy, potom pre body kružnice platí $x^2 + y^2 = r^2$, kde (x, y) sú súradnice bodu na kružnici a r je polomer kružnice.)

DOMÁCA ÚLOHA (DO 19.5.)

Axióma rovnobežosti

79. Nájdite chybu v dôkaze nasledovného tvrdenia:

Tvrdenie: Existuje trojuholník, v ktorom súčet jeho uhlov je rovný dvom pravým uhlom (t.j. 180°) (bez použitia axiómy rovnobežnosti).

Dôkaz: Aj bez axiómy rovnobežnosti vieme, že súčet vnútorných uhlov v trojuholníku nie je väčší ako dva pravé uhly (dôsledok Saccheri-Legendrovej vety). Uvažujme trojuholník, označme ho $\triangle ABC$, ktorý má najväčší možný súčet uhlov; ak je takých trojuholníkov viac, vezmeme ľubovoľný z nich. Označme tento súčet x .

Tak ako v predchádzajúcom príklade rozdelíme $\triangle ABC$ bodom D na strane AB na dva trojuholníky. Pre súčty vnútorných uhlov v týchto menších trojuholníkoch platí (viď obrázok v príklade 76)

$$\begin{aligned}\alpha + \delta_2 + \gamma_2 &\leq x, \\ \delta_1 + \beta + \gamma_1 &\leq x.\end{aligned}$$

Odtiaľ

$$\alpha + \delta_2 + \delta_1 + \beta + \gamma_1 + \gamma_2 \leq 2x.$$

Keďže

$$\begin{aligned}\alpha + \beta + \gamma_1 + \gamma_2 &= x \\ \delta_1 + \delta_2 &= 180^\circ,\end{aligned}$$

dostávame tak

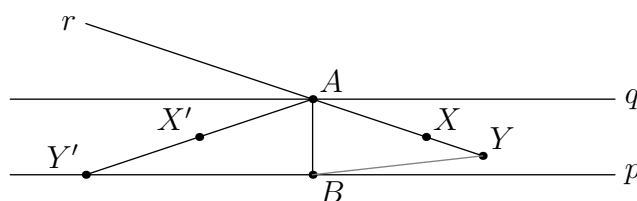
$$x \geq 180^\circ,$$

a keďže už vieme, že $x \leq 180^\circ$, tak sme ukázali $x = 180^\circ$.

(pokračovanie na ďalšej strane)

80. Nájdite slabé miesto v Legendrovom „dôkaze” tvrdenia, že každým bodom neležiacim na danej priamke prechádza jediná rovnobežka s danou priamkou. Čiže každý krok dôkazu sa pokúste odôvodniť nejakou axiómou alebo už dokázanou vetou a zistite, ktorý krok sa zdôvodniť nedá:

- (1) Daná je priamka p a bod A na nej neležiaci.
- (2) Vedme bodom A kolmicu na priamku p , pretne ju v bode B .
- (3) Nech q je priamka prechádzajúca bodom A a kolmá na priamku $\overleftrightarrow{AB}$.
- (4) Potom $q \parallel p$.
- (5) Nech r je iná priamka prechádzajúca bodom A , $r \neq q$. Ukážeme, že priamka r pretína priamku p .
- (6) Nech $\overrightarrow{AX}$ je polpriamka na r ležiaca na tej istej strane od q ako bod B .
- (7) Nech X' je bod na opačnej strane $\overleftrightarrow{AB}$ ako X taký, že $\angle BAX' \cong \angle BAX$.
- (8) Potom B leží vo vnútri uhla XAX' .
- (9) Keďže p prechádza bodom B , pretína aspoň jedno z ramien tohto uhla.
- (10) Ak p pretína $\overrightarrow{AX}$, tak p pretína r , a teda $r \parallel p$, hotovo.
- (11) Nech teda p nepretína $\overrightarrow{AX}$ a pretína $\overrightarrow{AX'}$ v bode Y' .
- (12) Nech Y je bod na $\overrightarrow{AX}$ taký, že $AY \cong AY'$.
- (13) Potom $\triangle BAY \cong \triangle BAY'$ (sus),
- (14) teda uhol ABY je pravý,
- (15) čiže je Y je priesečník priamok r a p .



Axiómy spojitosti

81. Vypracujte detailne krok (1) v dôkaze ekvivalencie Dedekindovej axiómy a Bolzanovho princípu:

ak Σ_1, Σ_2 je Dedekindov rez číselnej osi a $a < b$ pre nejaké $a \in \Sigma_1$ a $b \in \Sigma_2$, potom pre všetky $c \in \Sigma_1$ a všetky $d \in \Sigma_2$ platí $c < d$.

* **82.** Vypracujte dôkaz Princípu spojitosti kružnice 3 z Dedekindovej axiómy.