

Geometria 3

(pre študentov učiteľstva matematiky)

KAG FMFI UK BRATISLAVA

E-mail address: `jana.chalmovianska@fmph.uniba.sk`

KAPITOLA 1

Ako kreslíme obrázky v stereometrii

V celom tomto predmete budeme pracovať v euklidovskej rovine (a teda reálnej rovine so štandardnou metrikou) alebo v euklidovskom priestore.

1. Deliaci pomer

Nech A, B, C sú tri navzájom rôzne kolineárne body. **Deliaci pomer** usporiadanej trojice bodov A, B, C (alebo bodu C vzhľadom na body A, B) je číslo $\lambda = (ABC)$ také, že

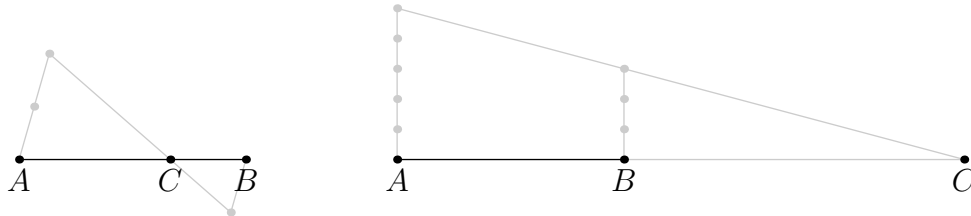
$$C - A = \lambda(C - B).$$

POZNÁMKA 1.1. Niekedy na môžete stretnúť aj so zápisom

$$\lambda = (ABC) = \frac{C - A}{C - B}.$$

Ide o symbolický zápis, pretože v zlomku sú v čitateli aj menovateli vektory, podiel vektorov sme však vo všeobecnosti nikdy nedefinovali!

Štandardne sa budete stretávať s deliacim pomerom, ktorý je racionálne číslo. Je to výhodné pri kreslení obrázkov (či už črtaní alebo rysovaní): na rovnobežné priamky, ktorým je $\overleftrightarrow{AB}$ transversálou, nanášame k bodu A dieliky, ktorých počet je daný čitateľom (ABC) , a k bodu B počet daný menovateľom. Ak $(ABC) > 0$, nanášame do tej istej strany, inak do opačných strán od $\overleftrightarrow{AB}$.



vľavo: $(ABC) = -2$, vpravo: $(ABC) = 5/3$.

ÚLOHA NA ZAMYSLENIE SA 1. Všimnime si, že pre dané prípustné body A, B, C bude deliaci pomer (ABC) vždy reálne číslo. No nie každému reálnemu číslu zodpovedá nejaký bod $C \in \overleftrightarrow{AB}$, $C \neq A, B$. Ktoré reálne hodnoty (ABC) nenadobudne?

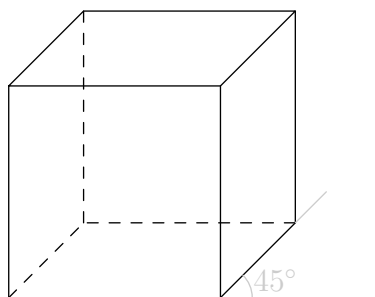
2. Voľné rovnobežné premietanie

Štandardne používame tzv. **voľné rovnobežné premietanie**: 3D objekt potrebujeme nakresliť do roviny - ako to urobiť čo najjednoduchšie a pritom dostatočne názorne?

Priemet kocky, prípadne pravouhlého kvádra:

- predná stena (a všetky steny a hrany s ňou rovnobežné) - v skutočných rozmeroch,
- bočné hrany (tie, čo sú v skutočnosti kolmé na prednú stenu)
 - nanášame „pod uhlom 45° “ (s vodorovným smerom zvierá uhol 45°): hranu smerujúcu v skutočnosti spredu dozadu, vedieme v smere severovýchod
 - na papieri majú polovičnú dĺžku oproti skutočnosti

Ide o tzv. **nadhľad sprava**.



Kocka vo voľnom rovnobežnom premietaní

Pre voľné rovnobežné premietanie platí:

- priamky, ktoré sú v skutočnosti rovnobežné, sú aj na papieri rovnobežné (možno splynú do jednej priamky), v krajnom prípade ich vidíme ako dva body,
- zachováva sa deliaci pomer (stred hrany sa zobrazí na stred a podobne).

Pri mnohostenoch kreslíme vrcholy a hrany (body **drôteného modelu**). Všeobecnejšie (kužeľové, valcové a iné plochy) kreslíme aj obrys. Pre lepšiu čitateľnosť obrázku zvykneme viditeľnosť znázorňovať použitím prerušovaných čiar pre neviditeľné hrany alebo obrysy. U komplikovanejších objektov sa niekedy používa dokonca aj tieňovanie.

KAPITOLA 2

Mnohosteny

1. Definícia mnohostena

V axiomatike v planimetrii bol mnohouholník jednoduchá uzavretá lomená čiara (JULČ). Jordanova veta tvrdila, že mnohouholník rozdelí ostatné body roviny na dve súvislé oblasti, z ktorých jednu sme nazvali vnútrom a druhú vonkajškom. Odteraz bude mnohouholník JULČ spolu so svojím vnútrom (t.j. tou z dvoch oblastí, ktorá neobsahuje priamku). Tejto konvencie sa budeme držať aj ďalej: mnohosteny budú pre nás už telesá spolu s vnútrom.

Mnohouholník môžeme (s rovinou, v ktorej leží) vnoriť aj do 3-rozmerného priestoru. Z takýchto mnohouholníkov teraz vyskladáme mnohostenovú plochu.

Mnohostenová plocha $\mathcal{M} \subset \mathbb{E}^3$ je také zjednotenie konečného počtu mnohouholníkov M_i (**steny** mnohostenovej plochy), že

- pre rôzne mnohouholníky M_i, M_j je prienik $M_i \cap M_j$
 - buď $\emptyset$,
 - alebo spoločný vrchol (**vrchol** mnohostenovej plochy)
 - alebo spoločná strana (**hrana** mnohostenovej plochy)
- každá hrana je stranou nanejvýš dvoch stien
- $\mathcal{M}$ je súvislá množina: pre každé dva vrcholy A, B existuje lomená čiara $A_0A_1 \dots A_n$ taká, že
 - $A = A_0, B = A_n$,
 - A_iA_{i+1} sú hrany mnohostenovej plochy
- ak M_i a M_j majú spoločnú stranu, tak neležia v spoločnej rovine.

Mnohostenová plocha $\mathcal{M}$ je

- **uzavretá**, ak každá hrana leží presne v dvoch stenách
- **jednoduchá**, ak každý vrchol má vlastnosť: všetky hrany s ním incidentné vieme usporiadať do postupnosti $h_1, h_2, \dots, h_n$ tak, že $h_i h_{i+1}$ ležia v spoločnej stene ($i = 1, \dots, n-1$)

Presne ako pri mnohouholníkoch máme (tzv. **Jordanova veta**): jednoduchá uzavretá mnohostenová plocha delí ostatné body $\mathbb{E}^3$ na dve súvislé množiny (oblasti). (Dva body patria do tej istej súvislej oblasti, ak sa dajú spojiť lomenou čiarou, ktorá mnohostenovú plochu nepretína.) Jedna z oblastí je ohraničená a neobsahuje priamku (**vnútro** mnohostenovej plochy), druhá je neohraničená a obsahuje priamku (**vonkajšok** mnohostenovej plochy).

Mnohosten je jednoduchá uzavretá mnohostenová plocha spolu s vnútrom.

Mnohosten je **konvexný**, ak je konvexnou množinou (t.j. s každými dvoma bodmi obsahuje aj celú úsečku nimi určenú).

Pozorujeme, že (ide o tvrdenia, ktoré sa dajú formálne ukázať, my to však robiť nebudeme):

- mnohosten je konvexný práve vtedy, keď pre všetky jeho steny platí: ak α je rovina obsahujúca túto stenu, tak mnohosten leží celý v jednom z polpriestorov určených rovinou α ,
- mnohosten je konvexný práve vtedy, keď je prienikom polpriestorov určených rovinami obsahujúcimi jeho steny (každá stena určí jednu rovinu, pre každú rovinu vezmeme vhodný polpriestor).

Niekedy nepotrebujeme pracovať s ľubovoľnými mnohostenmi, stačia nám konvexné. Vtedy sa často uchýľujeme alternatívnej, omnoho jednoduchšej definícii, motivovanej predchádzajúcimi pozorovaniami:

Konvexný mnohosten je ohraničený prienik konečného počtu polpriestorov v $\mathbb{E}^3$ s neprázdny vnútro.

Pri takejto definícii sa držíme konvencie, že vždy uvažujeme minimálny počet polpriestorov tak, aby definoval tú istú množinu, teda len tie polpriestory, ktoré sú určené rovinami obsahujúcimi steny mnohostena.

Polpriestory sú konvexné množiny, prienik konvexných množín je konvexná množina, preto takto definovaný konvexný mnohosten je naozaj konvexnou množinou.

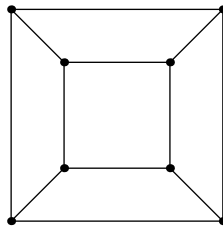
ÚLOHA NA ZAMYSLENIE SA 2. Keby sme z definície konvexného mnohostenu vynechali podmienku konečnosti počtu uvažovaných polpriestorov, mnohostenmi by sa stali aj iné telesá. Aké napríklad?

VETA 1.1 (**Euler**). *Pre konvexný mnohosten platí*

$$(1) \quad V - H + S = 2,$$

kde V je počet vrcholov, H je počet hrán a S je počet stien mnohostena.

Dôkaz. Tvrdenie dokážeme indukciou. Každý konvexný mnohosten reprezentujeme planárnym grafom. Namiesto stien mnohostena tu máme súvislé oblasti oddelené hranami, jedna z oblastí je aj vonkajšok, t.j. neohraničená časť.



Planárny graf reprezentujúci kocku, a tiež ľubovoľný štvorboký hranol.

1. Uvažujme najprv „obrys“ tohto grafu, t.j. hrany a vrcholy tvoriace hranicu vonkajšej, neohraničenej oblasti, ostatné vrcholy a hrany vynechajme: zrejme ide o mnohoúholník, a teda

$$V = n, \quad H = n, \quad S = 2,$$

teda (1) platí.

2. (indukčný krok) V grafe spojíme dva vrcholy lomenou čiarou. Namiesto pôvodných počtov V, H, S máme nové počty V', H', S' , pre ktoré platí:

$$\begin{aligned} V' &= V + k \\ H' &= H + k + 1 \\ S' &= S + 1 \end{aligned}$$

Vidíme, že

$$V' - H' + S' = (V + k) - (H + k + 1) + (S + 1) = V - H + S = 2.$$

□

ÚLOHA NA ZAMYSLENIE SA 3. Viete nájsť mnohosten, pre ktorý platí $V = 12$, $H = 24$ a $S = 12$?

POZNÁMKA 1.2. Pri mnohostenoch zavádzame jeho **Eulerovu charakteristiku** χ (ostatné označenie ako v Eulerovej vete):

$$\chi = V - H + S.$$

Práve dokázaná veta sa dá potom preformulovať: „Eulerova charakteristika konvexného mnohostena je 2.” Významný v geometrii a topológii je vzťah

$$\chi = 2 - 2g,$$

kde g je tzv. **rod** alebo **genus** (mnohostenovej) plochy. Intuitívne, pre jednoduchú uzavretú plochu je jeho rodom počet „dier”.

2. Pravidelné mnohosteny (Platónske telesá)

Pravidelný mnohosten alebo tiež **Platónske teleso** je konvexný mnohosten, ktorého steny sú zhodné pravidelné mnohouholníky, a v každom vrchole sa stretáva rovnaký počet stien (hrán).

Ak sú stenami Platónskeho telesa pravidelné p -uholníky a v každom vrchole sa stretáva q stien, potom dvojicu $\{p, q\}$ nazývame **Schläfliho symbolom** tohto telesa.

Dualita Platónskych telies: v strede steny pôvodného telesa je vrchol nového telesa, nové vrcholy spojíme hranou, ak príslušné steny pôvodného telesa mali spoločnú hranu. (Robíme vlastne konvexný obal vrcholov.)

Ak v pôvodnom telese sa vo vrchole stretávalo q hrán, v duálnom telese tak budú stenami pravidelné q -uholníky. Podobne, ak v pôvodnom telese boli stenami pravidelné p -uholníky, v duálnom telese sa bude v každom vrchole stretávať p hrán. Teda ak $\{p, q\}$ je Schläfliho symbol pôvodného Platónskeho telesa, tak $\{q, p\}$ je Schläfliho symbol duálneho Platónskeho telesa.

Dualita sa niekedy uvažuje aj pri iných ako Platónskych telesách.

Platónske telesá:

- základný mnohosten, trojrozmerný simplex: **štvorsten** $\{3, 3\}$, je to samoduálne teleso
- v štvorstene spojíme stredy strán: dostávame **osemsten** $\{3, 4\}$
- duálne teleso k osemstenu je **kocka** $\{4, 3\}$
- v osemstene spojíme body rozdeľujúce hrany v zlatom pomere: dostávame **dvadsaťsten** $\{3, 5\}$

- duálne teleso k dvadsaťstenu je **dvanásťsten** $\{5, 3\}$

VETA 2.1 (**Euklides, Základy**). *Existuje 5 Platónskych telies.*

Dôkaz. Kľúčové pozorovania:

- vo vrchole sa stretávajú aspoň 3 steny,
- súčet vnútorných uhlov v stenách okolo vrchola je menej ako 360° .

Teraz už len preveríme všetky možnosti. Nech stenami Platónskeho telesa sú rovnostranné trojuholníky, pôjde tak o telesá so Schläfliho symbolom $\{3, q\}$. Možnosti:

- $q = 3$: súčet uhlov okolo vrchola je 180° a ide o štvorsten,
- $q = 4$: súčet uhlov okolo vrchola je 240° a ide o osemsten,
- $q = 5$: súčet uhlov okolo vrchola je 300° a ide o 20-sten.

Ak sú stenami štvorce, zistíme, že jedinou možnosťou je, keď sa vo vrchole stretávajú 3 štvorce, dostávame tak kocku. Inak je už súčet uhlov privysoký.

Ak sú stenami pravidelné päťuholíky, znova sa vo vrchole môžu stretnúť len 3 a máme tak 12-sten.

Zrejme šesť- a viacuholníky už stenami telesa byť nemôžu, lebo už tri stretávajúce sa vo vrchole dávajú privysoký súčet uhlov. Našli sme teda všetky Platónske telesá. $\square$

ÚLOHA NA ZAMYSLENIE SA 4. Prečo je v definícii Platónskeho telesa nutné dodať podmienku konvexnosti? Nájdite mnohosten, ktorého steny sú zhodné pravidelné mnohouholníky, v každom vrchole sa stretáva rovnaký počet stien, a ktorý nie je konvexný.

3. Pravidelné mnohosteny ešte raz

Iný pohľad na pravidelný mnohouholník: je to mnohouholník, ktorý má veľa symetrií. **Symetria mnohouholníka** je izometria (zhodnosť) roviny, ktorá mnohouholník zobrazí na seba.

PRÍKLAD 3.1. Symetrie štvorca: otočenia okolo stredu, osové súmernosti, dokopy 8 symetrií. Grupu symetrií štvorca označujeme aj D_4 , je to tzv. **dihedrálna grupa**.

PRÍKLAD 3.2. Symetria pravidelného n -uholníka N je jednoznačne určená obrazom jedného z vrcholov a tiež jednej strany incidentnej s týmto vrcholom. Teda mohutnosť grupy symetrií $|G(N)| = 2n$. Grupa symetrií pravidelného n -uholníka je dihedrálna grupa D_n .

Postupnosť

(vrchol, hrana, stena, mnohosten)

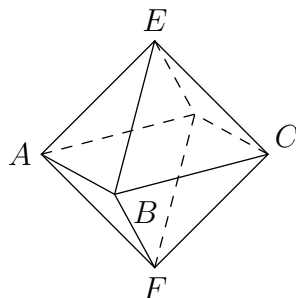
taká, že

$\text{vrchol} \subset \text{hrana} \subset \text{stena} \subset \text{mnohosten}$

(t.j. hrana je stranou steny a vrchol je incidentný s hranou) sa nazýva **vľajka**.

PRÍKLAD 3.3. V štvorci $ABCD$ je vľajkou napríklad $(C, BC, \square ABCD)$. V osemstene na obrázku je vľajkou napríklad

$(A, AE, ABE, \text{osemsten})$.



POZOROVANIE. Každá symetria g pravidelného mnohouholníka určite zobrazí vlajku na vlajku, napríklad v štvorci $ABCD$:

$$g : (B, BC, \square ABCD) \mapsto (g(B), g(BC) = g(B)g(C), \square ABCD).$$

Na druhej strane, ak V_1, V_2 sú dve vlajky pravidelného mnohouholníka M , tak existuje iba jedna symetria $g \in G(M)$, že $g : V_1 \mapsto V_2$. Inak: symetria pravidelného mnohouholníka je jednoznačne určená obrazom jednej vlajky.

Nech S je ľubovoľná množina a nech G je nejaká grupa bijekcií $S \rightarrow S$. Hovoríme, že akcia grupy G na množine S je **tranzitívna**, ak pre každé $e_i, e_j \in S$ existuje $g \in G$, že $g(e_i) = e_j$. Hovoríme, že akcia grupy G na množine S je **jednoducho tranzitívna**, ak také g je jediné.

Teda naše pozorovanie môžeme teraz preformulovať, že grupa symetrií pravidelného mnohouholníka má **jednoducho tranzitívnu akciu** na jeho vlajkách.

Všimnime si, že to isté platí napríklad pre symetrie kocky a vlajky kocky. To nás vedie k alternatívnej definícii Platónskeho telesa:

Mnohosten je **Platónskym telesom**, ak grupa jeho symetrií má jednoducho tranzitívnu akciu na jeho vlajkách.

POZNÁMKA 3.4. Stačí v definícii stanoviť, že grupa symetrií mnohostena má mať tranzitívnu akciu na vlajkách. Že je jednoducho tranzitívna, sa už dá dokázať.

Tiež potom máme, že mohutnosť grupy symetrií pravidelného mnohostena je rovná počtu jeho vlajok.

ÚLOHA NA ZAMYSLENIE SA 5. Skúste nájsť mohutnosti grúp symetrií všetkých Platónskych telies.

PRÍKLAD 3.5. Kolmé prizmy (hranoly) a antiprizmy (antihranoly): vrcholy sú navzájom izomorfné. Inak: akcia grupy automorfozmov je na vrcholoch tranzitívna, ale nie nutne jednoducho tranzitívna.

Mnohosten $\mathcal{M}$ je **polopravidelný**, ak

- jeho steny sú pravidelné mnohouholníky,
- všetky vrcholy (presnejšie ich okolia) sú navzájom izomorfné (alternatívne: $G(\mathcal{M})$ má tranzitívnu akciu na vrcholoch $\mathcal{M}$).

Poznáme tieto polopravidelné mnohosteny:

- pravidelné hranoly (bočné steny sú štvorce),

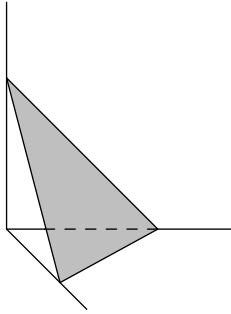
- pravidelné antihranoly (bočné steny sú rovnostranné trojuholníky),
- Archimedovské telesá (tých je 13, dajú sa získať z Platónskych telies).

4. Viacrozmerné polytopy (informačne, nepovinne)

Zovšeobecnením mnohouholníkov v $\mathbb{E}^2$ mnohostenov v $\mathbb{E}^3$ sú tzv. **polytopy** v $\mathbb{E}^n$.

Tzv. štandardné n -rozmerné polytopy sú:

- **Kocka:** $\text{Cub}_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid |x_i| \leq 1 \ \forall i\}$.
Pre $n = 2$ ide o štvorec, pre $n = 3$ je to štandardná kocka.
- **Duálna kocka:** $\text{Coc}_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \sum_{i=1}^n |x_i| \leq 1\}$.
Ako pomenovanie naznačuje, ide o duálny polytop ku kocke. Pre $n = 2$ je to znova štvorec, pre $n = 3$ osemsten.
- **Simplex:** $\text{Simp}_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1 \text{ a } x_i \geq 0 \ \forall i\}$.
Pre $n = 2$ máme rovnostranný trojuholník, pre $n = 3$ pravidelný štvorsten.



Dvozmerný simplex je rovnostranný trojuholník.

Všimnime si, že kým n -rozmerná kocka aj duálna kocka sú definované v $\mathbb{E}^n$, n -simplex sa zvyčajne definuje tak, ako sme si ho uviedli, v $\mathbb{E}^{n+1}$. Prirodzene aj simplex vieme následne vnoriť do $\mathbb{E}^n$.

V n -rozmernom priestore naozaj nemáme chuť definovať si všeobecné polytopy, ako sme to robili pri mnohostenoch. Stačí nám, že n -rozmerný **konvexný polytop** v $\mathbb{E}^n$ je ohraničený a neprázdny prienik konečného počtu n -rozmerných polpriestorov.

Ak $\mathcal{P} \subset \mathbb{E}^n$ je n -rozmerný konvexný polytop, tak analogicky stenám a hranám mnohostenom definujeme

- $(n-1)$ -stenu ako $(n-1)$ -rozmerný prienik jednej z určujúcich nadrovín s $\mathcal{P}$,
- $(n-2)$ -stenu ako $(n-2)$ -rozmerný prienik dvoch z určujúcich nadrovín s $\mathcal{P}$,
- ...

Vlajka je postupnosť

(vrchol (0-stena), hrana (1-stena), ..., $(n-1)$ -stena, konvexný polytop)

taká, že

$\text{vrchol} \subset \text{hrana} \subset \dots \subset (n-1)\text{-stena} \subset \text{konvexný polytop}$

Konvexný polytop $\mathcal{P}$ je **pravidelný**, ak grupa jeho symetrií $G(\mathcal{P})$ má tranzitívnu akciu na jeho vlajkách. (Že je jednoducho tranzitívna, sa dá už dokázať.)

PRÍKLAD 4.1. Pre simplex Simp_n platí, že ľubovoľná permutácia jeho vrcholov predstavuje jeho symetriu. Teda Simp_n je pravidelný polytop. Tiež sme sa presvedčili, že $G(\text{Simp}_n) = S_{n+1}$ (tzv. **symetrická grupa**, grupa všetkých permutácií $n + 1$ prvkov).

Podobne Cub_n a Coc_n sú pravidelné polytopy.

VETA 4.2 (Schläfli, 1850). *Pravidelnými polytopmi sú*

- *v $\mathbb{E}^2$: pravidelné mnohouholníky, t.j. nekonečne veľa pravidelných polytopov,*
- *v $\mathbb{E}^3$: Platónske telesá (teda okrem štandardných polytopov ešte dvanáststen a dvadsaťsten),*
- *v $\mathbb{E}^4$: okrem troch štandardných polytopov sú pravidelnými aj*
 - *konvexný obal bodov nasledovných 24 bodov (body kocky a zväčšenej duálnej kocky):*
 $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1), (\pm 2, 0, 0, 0), (0, \pm 2, 0, 0), (0, 0, \pm 2, 0), (0, 0, 0, \pm 2),$
ide o samoduálny polytop ,
 - *k predchádzajúcemu polytopu sa pridá ďalších 96 vrcholov a z tejto množiny sa utvorí konvexný obal,*
 - *duálny polytop k predchádzajúcemu,*
teda dokopy 6 pravidelných polytopov,
- *v $\mathbb{E}^n$, $n \geq 5$: len štandardné polytopy.*

KAPITOLA 3

Elementy stereometrie

Priamka je jednoznačne určená:

- dvoma rôznymi bodmi,
- bodom a smerom (smer je daný napríklad priamkou, s ktorou má byť určovaná priamka rovnobežná)

Rovina je jednoznačne určená:

- trojicou nekolineárnych bodov,
- priamkou a bodom, ktorý na tejto priamke neleží,
- dvoma rôznobežkami
- dvoma rovnobežkami
- bodom a smerom (smer je daný napríklad rovinou, s ktorou má byť určovaná rovina rovnobežná)

1. Rovnobežnosť

V trojrozmernom priestore na môžeme rozprávať o rovnobežnosti priamok a rovín. Synteticky sa charakterizácia rovnobežnosti rozpadá na jednotlivé prípady:

- Dve roviny v $\mathbb{E}^3$ sú rovnobežné, ak sú totožné alebo ak nemajú žiaden spoločný bod.
- Rovina a priamka v $\mathbb{E}^3$ sú rovnobežné, ak priamka leží celá v rovine alebo ak nemajú žiaden spoločný bod.
- Dve priamky sú rovnobežné, ak sú totožné alebo ak ležia v jednej rovine a nemajú žiaden spoločný bod.

V analytickej geometrii sa rovnobežnosť dá vybaviť jednou definíciou pokrývajúcou všetky dimenzie:

DEFINÍCIA 1.1. Podpriestory $\alpha, \beta \subset \mathbb{E}^n$ sú **rovnobežné**, ak

$$V(\alpha) \subseteq V(\beta) \quad \text{alebo} \quad V(\beta) \subseteq V(\alpha)$$

ÚLOHA NA ZAMYSLENIE SA 6. Transitívnosť rovnobežnosti priamok a rovín:

- rovnobežnosť priamok je tranzitívna relácia;
- rovnobežnosť rovín je tranzitívna relácia;
- čo sa stane, ak pomiešame priamky s rovinami?

TVRDENIE 1.2 (Kritériá rovnobežnosti).

- *Priamka je rovnobežná s rovinou práve vtedy, ak je rovnobežná s priamkou roviny.*

- *Dve roviny sú rovnobežné práve vtedy, keď jedna z rovín obsahuje dve rôznobežky, ktoré sú rovnobežné s druhou rovinou.*

2. Incidencia priamok a rovín (rezy mnohostenov)

Rôznobežné roviny sa pretínajú v priamke - **priesečnici**. Pre jej nájdenie potrebujeme nájsť dva body ležiace v oboch rovinách.

Nájsť prienik roviny a priamky: často priamkou preložíme rovinu a pomáhame si prienikom dvoch rovín - hľadaný **priesečník** bude ležať na priesečnici týchto rovín.

Nájsť prienik dvoch priamok (rozhodnúť, či sú priamky rôznobežné alebo mimobežné): často redukuje na predchádzajúci prípad: jednou z priamok preložíme rovinu a hľadáme prienik priamky a roviny.

Nájsť rez mnohostena rovinou: nájsť prieniky tejto roviny s jednotlivými stenami. Výrazne sa v týchto úlohách opierame o fakt, že do hry vstupuje viac rovín:

Dané sú rôzne roviny α a β . Skúmame prieniky s tretou rovinou ρ :

- (1) Nech $\alpha \parallel \beta$.
 - (1a) $\rho \parallel \alpha$: roviny sú po dvoch disjunktné
 - (1b) $\rho \not\parallel \alpha$: rovina ρ pretína roviny α a β v navzájom rovnobežných priamkach.
- (2) Nech $\alpha \not\parallel \beta$. Budeme uvažovať len situácie, keď ani ρ nie je rovnobežná so žiadnou zo zadaných rovín, lebo v takom prípade máme po preznačení predchádzajúcu situáciu.
 - (2a) ρ prechádza spoločnou priesečnicou rovín α a β
 - (2b) ρ pretína rovinu α v priamke rôznej ale rovnobežnej s priesečnicou $\alpha \cap \beta$. Potom priesečnica $\rho \cap \beta$ je s týmito dvoma rovnobežná.
 - (2c) ρ pretína rovinu α v priamke rôznobežnej s priesečnicou $\alpha \cap \beta$. Potom priesečnica $\rho \cap \beta$ tiež prechádza priesečníkom prvých dvoch priesečníc.

PRÍKLAD 2.1. V štvorstene $ABCD$ nech $K \in AB$, $L \in BC$, $M \in CD$ sú vnútornými bodmi týchto hrán. Nech K je stred AB . Treba nájsť rez štvorstena rovinou $\overleftrightarrow{KLM}$, ak

- (a) L je stred BC ,
- (b) L nie je stred BC .

Čo viete povedať o tomto reze, ak všetky tri body K, L, M sú stredmi hrán, na ktorých ležia?

PRÍKLAD 2.2. Overíme, že ťažnice štvorstena sa pretínajú v jednom bode

- (a) synteticky:
 - Rovina cez A, B a stred CD štvorstena $ABCD$ obsahuje dve ťažnice: t_A a t_B . Teda ťažnice sú po dvoch rôznobežné.
 - priesečnice troch vhodne zvolených z týchto rovín sa stretávajú v jednom bode, a tým je ťažisko.
- (b) analyticky:

Počítame prienik ťažníc štvorstena. Zistíme, že existuje a je to bod $(A + B + C + D)/4$.

3. Kolmosť

Z lineárnej algebry poznáte pojem kolmosti dvoch množín vektorov: nech V, W sú (neprázdne) množiny vektorov nejakého vektorového priestoru. Potom

$$V \perp W \quad \text{práve vtedy, keď} \quad v \perp w \quad \forall v \in V, \forall w \in W.$$

Nech α, β sú podpriestory euklidovského afinného priestoru $\mathbb{E}^3$, kolmosť by sme mohli definovať priamočiarym prenesením tohto pojmu z lineárnej algebry: α a β by boli navzájom kolmé práve vtedy, keď

$$(2) \quad V(\alpha) \perp V(\beta).$$

Potom by ale dve roviny nemohli byť na seba kolmé. My by sme sa chceli baviť o kolmých rovinách. Podmienka (2) je ekvivalentná

$$(3) \quad V(\alpha) \subseteq V(\beta)^\perp.$$

Túto podmienku trochu zvoľníme a použijeme na definíciu kolmosti euklidovských podpriestorov (v $\mathbb{E}^3$ priamok a rovín):

DEFINÍCIA 3.1. Podpriestory $\alpha, \beta \subset \mathbb{E}^n$ sú na seba **kolmé**, $\alpha \perp \beta$ práve vtedy, keď

$$V(\alpha) \subseteq V(\beta)^\perp \quad \text{alebo} \quad V(\alpha)^\perp \subseteq V(\beta).$$

DEFINÍCIA 3.2. (Alternatívna definícia kolmosti) Podpriestory $\alpha, \beta \subset \mathbb{E}^n$ sú na seba **kolmé**, $\alpha \perp \beta$ práve vtedy, keď

$$V(\alpha) \cap (V(\alpha) \cap V(\beta))^\perp \perp V(\beta) \cap (V(\alpha) \cap V(\beta))^\perp.$$

TVRDENIE 3.3 (Kritériá kolmosti).

- (a) *Priamka p je kolmá na rovinu α ($p \perp \alpha$) práve vtedy, keď je kolmá na dve rôznobežky ležiace v rovine α .*
- (b) *Roviny α a β sú na seba kolmé ($\alpha \perp \beta$) práve vtedy, keď v rovine α existuje taká priamka p , že $p \perp \beta$.*

4. Vzdialenosti

DEFINÍCIA 4.1. Nech $M_1, M_2 \subset \mathbb{E}^n$ sú množiny bodov. Ak je niektorá z týchto množín prázdna, tak **vzdialenosť**

$$d(M_1, M_2) = |M_1 M_2| := \infty.$$

Inak

$$d(M_1, M_2) = |M_1 M_2| := \inf\{d(x_1, x_2) \mid x_1 \in M_1, x_2 \in M_2\}.$$

TVRDENIE 4.2. (vzdialenosť bodu od priamky a od roviny) Nech A je bod.

- Ak p je priamka a $A_p^\perp$ kolmý priemet A na priamku p , potom

$$|Ap| = |AA_p^\perp|.$$

- Ak ρ je rovina a $A_\rho^\perp$ je kolmý priemet A do roviny ρ , potom

$$|A\rho| = |AA_\rho^\perp|.$$

Dôkaz. V analytickej geometrii sme to dokazovali analyticky, dôkaz sa opiera o fakt, že skalárny súčin vektora so sebou je nezáporné číslo.

Syntetický dôkaz vyplýva z pozorovania, že prepona je najdlhšou stranou pravouhlého trojuholníka. $\square$

Čo viete povedať o vzdialenosti

- rovnobežných priamok?
- rovnobežných rovín?
- priamky od rovnobežnej roviny?

Priečka mimobežiek je ľubovoľná priamka, ktorá obe mimobežky pretína.

Os mimobežiek je priamka, ktorá obe mimobežky pretína a je na obe kolmá (tiež tzv. **kolmá priečka**).

TVRDENIE 4.3. (*vzdialenosť mimobežiek*) *Nech p, q sú mimobežné priamky. Nech o je ich os. Potom*

$$|pq| = |PQ|, \quad \text{kde } P = p \cap o, \quad Q = q \cap o.$$

Dôkaz. Nech P' je ľubovoľný bod na p a Q' zas na q . Ukážeme, že $|P'Q'| \geq |PQ|$.

Ak $Q' = Q$, potom je $\triangle QPP'$ pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole P , a tak prepona QP' je dlhšia ako odvesna PQ .

Nech teraz $Q' \neq Q$. Nech α je rovina, ktorá obsahuje priamku p a je rovnobežná s priamkou q . Nech ďalej R je kolmý priemet bodu Q' do α . Potom

$$Q'R \parallel QP \quad \text{a} \quad |Q'R| = |QP|.$$

Trojuholník $Q'RP'$ je tak pravouhlý, s pravým uhlom pri vrchole R . Teda $P'Q'$ je prepona, a tak

$$|P'Q'| \geq |Q'R| = |QP|.$$

$\square$

5. Uhly

Uhol v rovine je dvojica polpriamok so spoločným začiatkom.

K uhlu okamžite priradujeme jeho veľkosť. Symbol $\angle$ bude označovať uhol (t.j. nejaký útvar v euklidovskom priestore), symbol $\sphericalangle$ zas jeho veľkosť.

Uvažujme $\angle ABC$. Nech $\mathbf{u}$ je vektor popisujúci polpriamku $\overrightarrow{BA}$, teda reprezentovaný orientovanou úsečkou so začiatočným bodom vo vrchole uhla a koncovým vnútri polpriamky, napr. $\mathbf{u} = A - B$. Podobne $\mathbf{v}$ priradíme polpriamke $\overrightarrow{BC}$, napr. $\mathbf{v} = C - B$. Potom veľkosť uhla bude

$$\angle ABC := \sphericalangle \mathbf{u}\mathbf{v} \quad \text{a} \quad \cos \sphericalangle \mathbf{u}\mathbf{v} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}.$$

Definícia je korektná, lebo veľkosť uhla nezávisí od voľby vektora: ak $\mathbf{u}', \mathbf{v}'$ sú iné vektory polpriamok, potom $\mathbf{u}' = c\mathbf{u}$, $\mathbf{v}' = d\mathbf{v}$, kde $c, d > 0$ a platí

$$\cos \sphericalangle \mathbf{u}'\mathbf{v}' = \frac{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}'}{\|\mathbf{u}'\| \|\mathbf{v}'\|} = \frac{c\mathbf{u} \cdot d\mathbf{v}}{\|c\mathbf{u}\| \|d\mathbf{v}\|} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} = \cos \sphericalangle \mathbf{u}\mathbf{v}.$$

5.1. Trocha goniometrie. Pri výpočtoch veľkosťami uhlov sú celkom užitočnými nasledovné vlastnosti goniometrických funkcií:

LEMA 5.1.

$$\begin{aligned}\cos(180^\circ - \varphi) &= -\cos \varphi \\ \cos(90^\circ - \varphi) &= \sin \varphi\end{aligned}$$

Dôkaz. Pre prvý vzťah si stačí všimnúť, že graf funkcie $\cos$ je súmerný podľa bodu $(\pi/2, 0)$. Podobne druhý vzťah vyplýva z faktu, že ak graf funkcie $\cos$ zobrazíme symetricky podľa priamky $x = \pi/4$ ($= 45^\circ$), dostaneme graf funkcie $\sin$.

Prípadne si uvedomíme, že súradnice bodu B na jednotkovej kružnici sú $(\cos \varphi, \sin \varphi)$, kde φ je orientovaný uhol, ktorý zviera kladný smer x -osi s polpriamkou $\overrightarrow{OB}$.

Oba vzťahy sa dajú tiež odvodiť zo súčtového vzorca

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

(dôkaz súčtového vzorca viď nižšie, kto ho nepozná). Po dosadení máme

$$\begin{aligned}\cos(180^\circ + (-\varphi)) &= \cos 180^\circ \cdot \cos(-\varphi) - \sin 180^\circ \cdot \sin(-\varphi) \\ &= (-1) \cdot \cos(-\varphi) - 0 \cdot \sin(-\varphi) = -\cos(-\varphi) \\ &= -\cos \varphi, \\ \cos(90^\circ + (-\varphi)) &= \cos 90^\circ \cdot \cos(-\varphi) - \sin 90^\circ \cdot \sin(-\varphi) \\ &= 0 \cdot \cos(-\varphi) - 1 \cdot \sin(-\varphi) = -\sin(-\varphi) \\ &= \sin \varphi.\end{aligned}$$

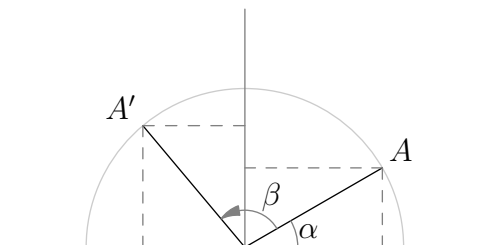
□

Na záver tejto odbočky ku goniometrii si ešte pre úplnosť uvedme geometrický dôkaz súčtových vzorcov.

LEMA 5.2. *Pre ľubovoľné uhly α, β platí*

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.\end{aligned}$$

Dôkaz. Nech A je bod na jednotkovej kružnici, ktorého smerový vektor zviera s kladným smerom x -osi uhol α . Pre súradnice A tak platí $A = (\cos \alpha, \sin \alpha)$. Po otočení tohto



bodu okolo začiatku súradníc o uhol β dostaneme bod A' so súradnicami

$$A' = (a'_1, a'_2) = (\cos(\alpha + \beta), \sin(\alpha + \beta)).$$

Na druhej strane môžeme súradnice bodu A' vypočítať zo súradníc bodu A pomocou matice otočenia o uhol β :

$$\begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \alpha - \sin \beta \sin \alpha \\ \sin \beta \cos \alpha + \cos \beta \sin \alpha \end{pmatrix}$$

□

5.2. Uhol priamok. Pre ilustráciu sa skúsime aspoň v prípade priamka-priamka dôkladne zamyslieť nad ich uhlom ako nad geometrickým objektom.

Uvažujme najprv prípad, keď sú priamky rôznobežné. Ich priesečník ich rozdelí na štyri polpriamky. Priamky tak určujú štyri uhly, po dva navzájom vrcholové, a tak zhodné. Za uhol priamok považujeme menší z dvojice rôznych uhlov. Vidíme, že uhol priamok ako geometrický objekt akoby nebol jednoznačne určený, má totižto dvoch reprezentantov, a síce vrcholové uhly určené týmito priamkami. Ak sú priamky na seba kolmé, ako ich uhol berieme hociktorý zo štyroch pravých uhlov, čiže v tomto prípade máme dokonca štyroch reprezentantov uhla priamok. Veľkosť uhla priamok bude veľkosť hociktorého z dvoch (resp. štyroch) reprezentantov. Keďže vrcholové uhly sú zhodné, veľkosť uhla priamok je takto dobre definovaná.

Ak sú priamky p, q rovnobežné, pristúpme rovno k definícii jeho veľkosti: ak $p \parallel q$, tak $\angle pq := 0$.

Na záver treba ešte uvažovať uhol mimobežných priamok. Definícia bude mať opodstatnenie v nasledovnej vete:

TVRDENIE 5.3. *Nech a, b sú ľubovoľné priamky v $\mathbb{E}^3$. Nech $M', M'' \in \mathbb{E}^3$ sú ľubovoľné body. Nech a', a'', b', b'' sú priamky jednoznačne určené nasledovnými podmienkami:*

$$\begin{aligned} a' : & a' \parallel a, a' \ni M', \\ b' : & b' \parallel b, b' \ni M', \\ a'' : & a'' \parallel a, a'' \ni M'', \\ b'' : & b'' \parallel b, b'' \ni M''. \end{aligned}$$

Potom $\angle a'b' \cong \angle a''b''$.

Dôkaz. Keďže $a' \parallel a''$ (rovnobežnosť priamok je tranzitívna relácia), ležia tieto priamky v spoločnej rovine, označme ju α . V tejto rovine zvolíme

$$A' \in a, A' \neq M'.$$

Ďalej na tej istej strane od $\overleftrightarrow{M'M''}$ ako A' zostrojíme bod A'' tak, že

$$A'' \in a'', M'A'' \cong M'A'.$$

Máme tak rovnobežník $M'A'A''M''$, teda (z viet o zhodnosti trojuholníkov)

$$(4) \quad A'A'' \parallel M'M'' \quad \text{a} \quad A'A'' \cong M'M''.$$

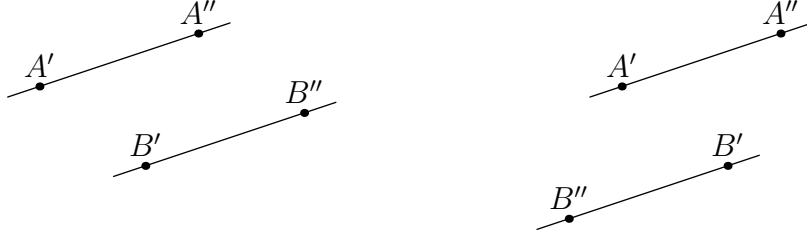
Analogicky na priamkach b', b'' zostrojíme body B' a B'' , pre ktoré následne odvodíme, že

$$B'B'' \parallel M'M'' \quad \text{a} \quad B'B'' \cong M'M''.$$

Z tranzitívnosti rovnobežnosti a zhodnosti úsečiek tak spolu s (4) dostávame

$$A'A'' \parallel B'B'' \quad \text{a} \quad A'A'' \cong B'B''.$$

Štyri body A', A'', B', B'' sú preto koplanárne a tvoria jednu z dvoch konfigurácií na obrázku. Pomerne zdĺhavou argumentáciou (vynecháme ju tu) sa dá konfigurácia vpravo



vylúčiť, čiže body tvoria rovnobežník $A'A''B''B'$. Odtiaľ už máme, že $A'B' \cong A''B''$.

Ukázali sme tak, že $\triangle M'A'B'$ a $\triangle M''A''B''$ sú podľa vety sss zhodné trojuholníky. Preto $\angle A'M'B' \cong \angle A''M''B''$ $\square$

Môžeme teraz definovať uhol mimobežiek aj ako geometrický objekt, no znovu nepôjde o jednoznačný uhol: ak p, q sú mimobežné, tak za $\angle pq$ považujeme hociktorý z $\angle p'q'$, kde $p' \parallel p$, $q' \parallel q$ a p', q' sú rôznobežné. Veľkosť uhla mimobežných priamok je potom veľkosť ľubovoľného reprezentatna ich uhla. Vďaka práve (čiastočne) dokázanej vete je táto veľkosť dobre definovaná.

Vidíme, že definovať veľkosť uhla dvoch priamok dôsledne pomocou ich uhla ako geometrického objektu je síce korektná ale pomerne náročná konštrukcia. Preto sa často od tohto postupu upúšťa a definuje sa priamo veľkosť ich uhla, keďže táto v konečnom dôsledku závisí iba od smerov priamok a dá sa tak v každom prípade (rôznobežnosť, rovnobežnosť, mimobežnosť) jednoducho vypočítať:

$$(5) \quad \angle pq \in [0, \pi/2] (= [0, 90^\circ]) \quad \text{taký, že} \quad \cos \angle pq := \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|},$$

kde $\mathbf{u}$ je nenulový smerový vektor priamky p a $\mathbf{v}$ nenulový smerový vektor priamky q .

5.3. Uhol priamky a roviny. Nech α je rovina a p je priamka.

Ak $p \perp \alpha$, tak $\angle p\alpha := \pi/2$. Za uhol priamky p a roviny α môžeme považovať hociktorý z $\angle pq$, kde q je priamka v rovine α rôznobežná s p .

Nech $p \not\perp \alpha$. Nech $p^\perp$ je kolmý priemet priamky p do roviny α . Uhol p a α definujeme

$$\angle p\alpha := \angle pp^\perp.$$

Veľkosť uhla p a α je potom veľkosť uhla $\angle pp^\perp$.

Lahko sa presvedčíme, že

$$\sin \angle p\alpha = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{n}\|},$$

kde $\mathbf{u}$ je smerový vektor priamky p a $\mathbf{n}$ je normálový vektor roviny α .

5.4. Uhol dvoch rovín. Nech α, β sú roviny.

Ak $\alpha \parallel \beta$, potom zadefinujeme $\angle\alpha\beta := 0$.

Nech α, β sú teraz rôznobežné, nech r je ich priesečnica. Nech ρ je rovina kolmá na priesečnicu r . Označme

$$\begin{aligned} p &= \rho \cap \alpha \\ q &= \rho \cap \beta \end{aligned}$$

Potom za uhol rovín α, β považujeme uhol priamok p, q . Inak: ak r je priesečnica rovín α a β , tak

$$\angle\alpha\beta := \angle pq,$$

kde $p \subset \alpha, p \perp r, q \subset \beta, q \perp r$. Pre veľkosť uhla je to zas jednoduchšie, je jednoznačná:

$$\cos \angle\alpha\beta = \frac{|\mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\beta|}{\|\mathbf{n}_\alpha\| \|\mathbf{n}_\beta\|},$$

kde $\mathbf{n}_\alpha$ resp. $\mathbf{n}_\beta$ je normálový vektor roviny α resp. β .

5.5. Dihedrálly uhol, klin. Uhol dvoch rovín, tak ako uhol dvoch priamok, nemôže byť väčší ako 90° . Pri mnohostenoch však chceme hovoriť aj o väčších uhloch, keď popisujeme uhol susedných stien, napríklad pri pravidelnom dvanáststene. Hovoríme tu o takzvanom **dihedrálly uhol**. Ide o priestorovú (trojrozmernú) analógiu rovinného uhla z axiomatiky: je to zjednotenie priamky (**hrana** klinu / dihedrálneho uhla) a dvoch polrovín s touto hraničnou priamkou (**strany** klinu / dihedrálneho uhla), pričom od polrovín vyžadujeme, aby neboli koplánarne.

K veľkosti dihedrálneho uhla (klinu): Nech ρ je rovina kolmá na hranu. Potom prienikom ρ a klinu je uhol, ako ho poznáme z axiomatiky. Veľkosť dihedrálneho uhla je veľkosť tohto uhla, viď začiatok podkapitoly o uhloch.

Podobne ako pri uhle dvoch rovín, môžeme veľkosť dihedrálneho uhla vypočítať aj pomocou uhla normálových vektorov rovín obsahujúcich jeho strany. Treba si však dať pozor na orientáciu týchto normálových vektorov. Napríklad, ak $\mathbf{n}_1$ je normálový vektor roviny jednej strany dihedrálneho uhla ležiaci v tom istom polpriestore ako druhá strana uhla (smerujúci do toho istého polpriestoru), to isté nech platí pre normálový vektor $\mathbf{n}_2$ druhej strany dihedrálneho uhla, potom veľkosť tohto dihedrálneho uhla je

$$\varphi = 180^\circ - \angle\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2$$

alebo inak

$$\cos \varphi = -\frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{\|\mathbf{n}_1\| \|\mathbf{n}_2\|}.$$

PRÍKLAD 5.4. Ktorými pravidelnými mnohostenmi sa dá teselovať trojrozmerný priestor? Potrebujeme skúmať veľkosť uhla medzi susednými stenami: ide o dihedrálly uhol, nie uhol dvoch rovín.

POZNÁMKA 5.5. S dihedrálly uhlom sa môžete stretnúť v chémii pri popise tvaru molekúl (hlavne) organických zlúčenín (tzv. stereochemia?).

PRÍKLAD 5.6. Uhol medzi väzbami v molekule metánu: molekula má tvar pravidelného štvorstena, kde vo vrcholoch sú atómy vodíka a v strede štvorstena je atóm uhlíka. Treba vypočítať $\angle AXB$, kde A, B sú ľubovoľné z dvoch vrcholov a X je stred štvorstena.

5.6. Priestorové uhly. Uvažujme plášť rotačného kužela, v ktorom úsečky spájajúce vrchol s bodom na hranici podstavy nahradíme celými polpriamkami so začiatkom v danom vrchole, dostávame tak rotačnú kuželovú plochu (inak: kuželová plocha zostrojená nad kružnicou). Táto plocha je hranicou **priestorového uhla**. Veľkosť priestorového uhla sa meria v **steradiánoch** (skr. sr) a rovná sa obsahu plochy na jednotkovej sfére, ktorá má stred vo vrchole uhla, a je týmto uhlom ohraničená.

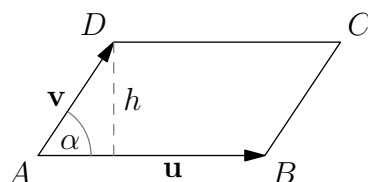
Všeobecnejšie, kuželová plocha nemusí byť zostrojená nad kružnicou ale nad ľubovoľnou jednoduchou uzavretou krivkou. Uhol zostrojený nad (rovinným) mnohoúhelníkom nazývame **polyhedrálnym uhlom**. Lokálne popisuje napríklad mnohosten v okolí jeho vrchola. Napríklad pri štvorstene hovoríme o **trihedrálom uhle** (tiež **trojhran**) - uhol je zostrojený nad trojuholníkom.

POZNÁMKA 5.7. Priestorové uhly určené rotačnými kuželmi sa bežne využívajú napríklad v astronómii.

PRÍKLAD 5.8. Aká je veľkosť trojhranu určeného trom navzájom kolmými rovinami (tzv. oktant)?

6. Obsahy a objemy

6.1. Obsah rovnobežníka. Elementárnym rovinným útvarom (inak: dvojrozmerným simplexom) je trojuholník. Vypočítať obsah trojuholníka ABD vieme, ak vieme vypočítať obsah rovnobežníka $ABCD$. Obsah rovnobežníka $ABCD$ ($\mathbf{u} = B - A$, $\mathbf{v} =$



Výpočet obsahu rovnobežníka.

$D - A$) je

$$S = |AB|h = \|\mathbf{u}\|h = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\sin \angle \mathbf{u}\mathbf{v} = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|.$$

Aby tento vektorový súčin dával zmysel, vnoríme našu rovinu do trojrozmerného priestoru tak, že x - a y -súradnice ostanú zachované a z -súradnica je nulová. Teda pôvodnú rovinu $\mathbb{E}^2$ sme stotožnili s rovinou $z = 0$ v $\mathbb{E}^3$. Potom

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(0, 0, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right).$$

Čiže obsah rovnobežníka určeného vektormi $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ je

$$S = \left\| \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right\| = |u_1v_2 - u_2v_1|.$$

Inšpirovaní posledným výpočtom môžeme v orientovanej rovine pre rovnobežník, ktorý určený vektormi $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, definovať **orientovaný obsah**

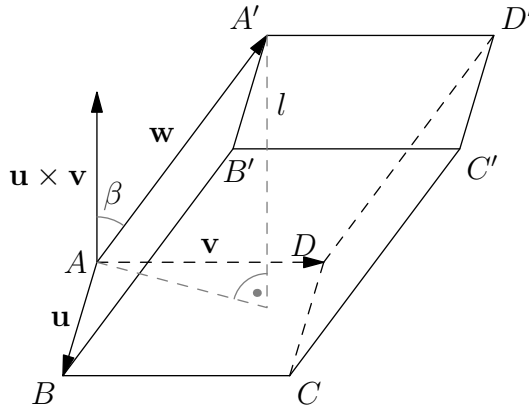
$$oS = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = u_1v_2 - u_2v_1.$$

Orientovaný obsah bude kladný, keď vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ tvoria kladne orientovanú bázu, a záporný, keď tvoria záporne orientovanú bázu. Pre obsah potom máme $S = |oS|$.

6.2. Objem rovnobežnostena: zmiešaný súčin. Nech je rovnobežnosten v $\mathbb{E}^3$ určený vektormi

$$\mathbf{u} = B - A, \mathbf{v} = D - A \text{ a } \mathbf{w} = A' - A.$$

Nech l označuje výšku na podstavu $ABCD$ ($ABCD$ je rovnobežník), teda l je vzdialenosť rovín $\overleftrightarrow{ABC}$ a $\overleftrightarrow{A'B'C'}$. Vieme, že $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ je vektor kolmý na $\mathbf{u}$ aj $\mathbf{v}$. Nech β je uhol, ktorý



Výpočet obsahu rovnobežníka.

zvierajú vektory $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$. Zrejme

$$\cos \beta = \pm \frac{l}{\|\mathbf{w}\|},$$

pričom $\cos \beta$ je kladný, ak $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$ zvierajú uhol menší ako 90° , a záporný, ak je tento uhol väčší ako 90° . Všetky tieto pozorovania môžeme zhrnúť teraz vo výpočte objemu rovnobežnostena $ABCD A'B'C'D'$:

$$V = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| \cdot l = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\| \cdot |\cos \beta| = |(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}|$$

DEFINÍCIA 6.1. Číslo

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) := (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

nazývame **zmiešaným súčinom** vektorov $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$.

LEMA 6.2. Pre zmiešaný súčin troch vektorov platí

- $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$ práve vtedy, keď sú vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ lineárne závislé.
- $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}) = (\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$.
- $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) > 0$, keď $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ v tomto poradí je kladne orientovaná báza.

Dôkaz. Jednoduché preverovanie. □

Podobne ako v prípade rovnobežníka v rovine, aj v orientovanom trojrozmernom euklidovskom priestore pre rovnobežnosten určený vektormi $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ definujeme **orientovaný objem**

$$oV = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Orientovaný objem bude kladný práve vtedy, keď vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ tvoria kladne orientovanú bázu. Pre objem potom $V = |oV|$.

KAPITOLA 4

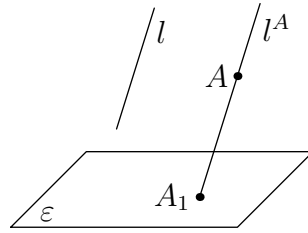
Ravnobežné premietanie

1. Základné pojmy

Nech je daná rovina ε (**priemetňa**) a priamka l (**smer premietania**) taká, že $l \nparallel \varepsilon$.

Ravnobežné premietanie v smere l do roviny ε je zobrazenie $\mathbb{E}^3 \rightarrow \varepsilon$, ktoré každému bodu A priradí bod A_1 nasledovne:

- (1) nech l^A je taká priamka, že $l^A \parallel l$ a $l^A \ni A$; l^A je **premietacia priamka bodu** A ,
- (2) $A_1 = l^A \cap \varepsilon$ je (**ravnobežný priemet bodu** A).



Ravnobežné premietanie

Vlastnosti ravnobežného premietania:

- Ravnobežné premietanie je afinné zobrazenie. Zobrazenie je afinné, keď
 - zachováva afinné kombinácie bodov (charakterizácia používaná v analytickej geometrii)
 - obrazom priamky je bod alebo priamka, pričom v druhom prípade sa zachováva deliaci pomer (charakterizácia používaná v syntetickej geometrii).
 Obe tieto definície afinného zobrazenia sú ekvivalentné.
- Priemetňa je rovinou samodružných bodov.

Osnova priamky l , ktorá určuje smer premietania (t.j. množina všetkých priamok ravnobežných s l) sa nazýva **osnovou premietania**.

1.1. Ravnobežný priemet priamky. Ravnobežný priemet priamky p získame, keď premietneme všetky jej body. Predstava pri premietaní: premietame akoby všetky body priamky naraz.

Ak p je osová (ravnobežná so smerom premietania), potom jej ravnobežným priemetom je bod. Inak **premietacím útvarom** priamky (t.j. zjednotením premietacích priamok všetkých bodov priamky p) je rovina λ ravnobežná so smerom premietania (tzv. **osnovová rovina**). Priemetom priamky p je priamka $p_1 = \varepsilon \cap \lambda$.

PRÍKLAD 1.1. Nech $p, q \subset \mathbb{E}^3$ sú dve rôzne priamky, ani jedna z nich nech nie je osnovová. Ako môže vyzeráť priemet tejto dvojice, ak sú p, q

- rovnobežné,
- rôznobežné,
- mimobežné?

1.2. Rovnobežné priemety niektorých ďalších objektov.

PRÍKLAD 1.2. Ako vyzerajú premietacie útvary (t.j. zjednotenia premietacích priamok všetkých bodov objektu) a priemety nasledovných objektov?

- rovinný n -uholník $\mathcal{P}$, t.j. $\mathcal{P} \subset \alpha$, ak rovina α
 - je osnovová,
 - nie je osnovová;
- kružnica $k \subset \alpha$, ak rovina α
 - je osnovová,
 - nie je osnovová;
- sféra S .

2. Pohlkeho veta

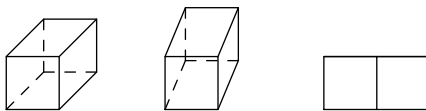
Uvažujme priemet kocky vo voľnom rovnobežnom premietaní. Nech jedna stena leží v rovine xy . Jeden vrchol je v začiatku súradníc O , tri susedné vrcholy sú jednotkové body na súradnicových osiach: $E^x = (1, 0, 0)$, $E^y = (0, 1, 0)$, $E^z = (1, 0, 0)$. Priemetňou ε nech je xy -rovina, teda $O = O_1$, $E_1^x = E^x$, $E_1^y = E^y$. Pri voľnom rovnobežnom premietaní vieme presne, kam naniest bod E_1^z .

Mohol by sa bod E_1^z nachádzať inde (pri inom rovnobežnom premietaní ako voľnom)?

Lahko sa presvedčíme, že bod $E^z = (0, 0, 1)$ sa môže zobrazíť kdekoľvek do roviny ε , teda na ľubovoľný bod $E_1^z(a, b, 0)$. Priamka cez body E^z a E_1^z je osnovovou priamkou určujúcou smer premietania.

PRÍKLAD 2.1. Ak napríklad $|O_1 E_1^z| = |OE^z|$ (teda premietanie zachováva vzdialenosť v smere z -osi), vidíme, že smer premietania a priemetňa zvierajú uhol 45° .

Už priemet kocky, ktorej jedna zo stien kocky leží v priemetni a s uhlom smeru premietania a roviny je 45° , môže vyzeráť rôznorodo.



Rôzne priemety kocky, keď uhol premietania je 45°

Uhol premietania φ je uhol osnovovej priamky s priemetňou. Hovorí sa mu tiež **odchýlka premietania**. V závislosti od uhla premietania ide o

- **kolmé (pravouhlé)** premietanie, ak $\varphi = 90^\circ$,
- **šikmé (kosouhlé)** premietanie, ak $\varphi < 90^\circ$.

Nech XY je úsečka ležiaca na priamke, ktorá je kolmá na priemetňu. Potom pomer $|X_1Y_1|/|XY|$ sa nazýva **koeficient skrátenia** uvažovaného rovnobežného premietania. T.j. napríklad pri premietaní s odchýlkou 45° máme koeficient skrátenia 1.

Medzi uhlom premietania φ a koeficientom skrátenia v je vzťah

$$\cotg\varphi = v.$$

PRÍKLAD 2.2. Koeficient skrátenia voľného rovnobežného premietania je $1/2$, teda $\varphi = 63,4^\circ$.

Aby priemety objektov neboli príliš pretiahnué, odporúča sa pre odchýlku (uhol premietania), aby $\varphi \in (60^\circ, 90^\circ)$.

V príklade 2.1 ide stále o priemety kocky v priemetaní s uhlom 45° a v každom prípade má kocka jednu z podstav v priemetni. Ktorý priemet dostaneme, závisí od otočenia kocky okolo osi kolmej na priemetňu.

2.1. Axonometria, súradnicové sústavy v priestore a v priemetni. Nech O je začiatok súradnicovej sústavy. Bod O spolu s kladnými smermi súradnicových osí x, y, z určujú pravouhlý trojhran, jeden z oktantov určených súradnicovou sústavou v $\mathbb{E}^3$. Ak rovnobežný priemet tohto trojhranu v priemetni ϵ pozostáva z troch polpriamok, z ktorých žiadne dve neležia na jednej priamke, nazývame toto premietanie **axonometriou**. Priemet trojhranu (O, x, y, z) , t.j. zjednotenie troch polpriamok sa nazýva **axonometrický osový kríž**.

Nech E^x, E^y, E^z sú jednotkové body na príslušných súradnicových osiach. Ich priemety spolu s priemetom začiatku, čiže štvoricou bodov O_a, E_a^x, E_a^y, E_a^z (nazývanou tiež **axonometrická súradnicová sústava**), je príslušná axonometria jednoznačne určená.

VETA 2.3 (Pohlkeho veta). *Lubovoľné tri komplanárne úsečky $O_aE_a^x, O_aE_a^y, O_aE_a^z$ neležiace na jednej priamke možno považovať za rovnobežný priemet trojice incidentných hrán kocky.*

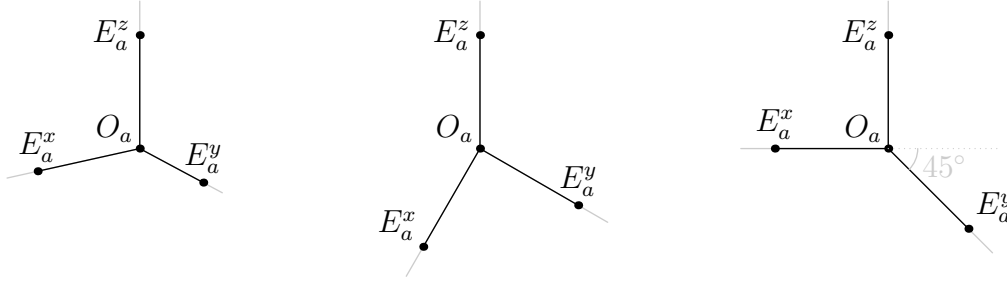
Neskôr Schwartz dokázal trochu všeobecnejšie tvrdenie, tzv. **Pohlke-Schwartzovu vetu**, ktorá hovorí o priemete ľubovoľného štvorstena.

Dôkaz sa robí analyticky, skúmajú sa pri ňom vlastné smery a vlastné čísla rovnobežného premietania.

PRÍKLAD 2.4. Ak $|O_aE_a^x| = |O_aE_a^y| = |O_aE_a^z|$, ide o tvz. **izometriu**. Pozor, nejde o izometriu v exaktnom geometrickom zmysle! Myslí sa len, že sa zachovávajú pomery dĺžok v smere všetkých súradnicových osí.

2.2. Šikmé premietanie. Často sa priemetňa a súradnice volia tak, že súradnicové osi priemetne splývajú so súradnicovými osami xz -roviny. Ak uhol premietania nie je pravý, v deskriptívnej geometrii hovoríme v takom prípade o **šikmom premietaní**. Ide o špeciálny prípad axonometrie. Priemet tretej súradnicovej osi v priemetni je potom určený

- uhlom ω medzi kladným smerom vodorovnej súradnicovej osi priemetne a priemetom kladného smeru tretej osi zobrazovaného priestoru
- koeficientom skrátenia (ekvivalente: uhlom premietania)



Vľavo: náhodná axonometria, v strede: vojenská perspektíva, vpravo: kavalierna perspektíva (nadhľad zľava). Vojenská aj kavalierna perspektíva sú izometriami (v zmysle deskriptívnej geometrie)

PRÍKLAD 2.5. Kavalierna perspektíva v príklade 2.4 je aj šikmým premietaním. Veľmi podobným šikmým premietaním je aj voľné rovnobežné premietanie. Líšia sa len koeficientom skrátenia ($v = 1$ verus $v = 1/2$). V oboch prípadoch štandardne volíme $\omega = 135^\circ$ (nadhľad sprava), niekedy môžeme zvoliť $\omega = 45^\circ$ (nadhľad zľava).

2.3. Kolmá axonometria. Ak smer premietania v axonometrii je kolmý na priemetňu, hovoríme o **kolmej axonometrii**.

Nech priemetňa ϵ pretína všetky súradnicové osi. (Zvyčajne sa premietanie volí tak, aby tieto priesečníky ležali na kladných polpriamkach súradnicových osí.) Nech $X = \epsilon \cap x$, podobne $Y = \epsilon \cap y$ a $Z = \epsilon \cap z$. Trojuholník XYZ sa potom nazýva **axonometrický trojuholník**.

VETA 2.6. *Axonometria je kolmou práve vtedy, keď XO_a, YO_a, ZO_a ležia na výškach $\triangle XYZ$.*

Dôkaz. Nech je daná axonometria kolmá. Označme normálový vektor priemetne ϵ ako $\mathbf{n}$. Nech ρ_z je kolmopremietacia rovina z -osi. Smer tejto roviny je $V(\rho_z) = \langle \mathbf{n}, \mathbf{e}_3 \rangle$. Priamka $\overleftrightarrow{XY}$ leží v xy -súradnicovej rovine, preto je kolmá na z -os. Z $\overleftrightarrow{XY} \subset \epsilon$ máme aj $\overleftrightarrow{AB} \perp \mathbf{n}$. Čiže $\overleftrightarrow{XY} \perp \rho_z$, a tak $\overleftrightarrow{XY} \perp \rho_z \cap \epsilon = \overleftrightarrow{ZO_a}$. Ukázali sme, že ZO_a leží na výške $\triangle XYZ$. Podobne pre ostatné výšky.

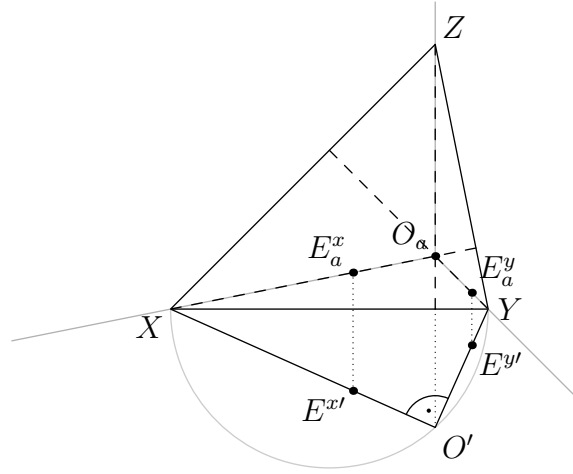
Nech teraz XO_a, YO_a, ZO_a ležia na výškach $\triangle XYZ$. Nech $\mathbf{u}$ je nenulový vektor určujúci smer premietania. Uvažujme najprv predpoklad, že $ZO_a \perp XY$. O smere premietacej roviny ρ_z tretej súradnicovej osi vieme, že jednak $V(\rho_z) = \langle \mathbf{u}, (Z - O_a) \rangle$, a tiež, že $V(\rho_z) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{e}_3 \rangle$. Smer V je generovaný dvoma lineárne nezávislými vektormi, teda tiež platí, že $V(\rho_z) = \langle (Z - O_a), \mathbf{e}_3 \rangle$. Keďže vektor $(Y - X)$ je kolmý na oba generátory priestoru $V(\rho_z)$, je kolmý na všetky smerové vektory tejto roviny, špeciálne $(Y - X) \perp \mathbf{u}$. Podobne sa ukáže, že $(Z - Y) \perp \mathbf{u}$. Teda $\mathbf{u} \perp \epsilon$. $\square$

Kolmá axonometria je jednoznačne určená jedným z nasledovných:

- axonometrický osový kríž,
- axonometrický trojuholník.

Ak $\triangle XYZ$ je axonometrický trojuholník, jeho ortocentrum je priemet začiatku súradnicovej sústavy O_a a spojnice O_a s vrcholmi trojuholníka určujú axonometrický osový kríž. Trojuholník $\triangle XYO_a$ je kolmým axonometrickým priemetom $\triangle XYO$ do priemetne

ϵ . Na druhej strane uvažujme otočenie okolo $\overleftrightarrow{XY}$ do roviny ϵ tak, že začiatok súradníc O sa zobrazí do bodu O' , ktorý leží v opačnej polrovine od $\overleftrightarrow{XY}$ ako O_a . Zrejme každý bod P v $\triangle XYO_a$ (a vlastne v celej rovine tohto trojuholníka) sa v axonometrii zobrazí do P_a a otočením do P' , kde (ak $P \notin \overleftrightarrow{XY}$) $P_aP' \perp XY$ (rovina otočenia bodu P je kolmá na XY a tak obsahuje kolmopremietáciu priamku bohto bodu). Preto ak $E^{x'}$ je otočením jednotkového bodu E^x na x -osi, jeho axonometrický priemet E_a^x získame ako priemet $E^{x'}$ na $\overrightarrow{O_aX}$ v smere kolmom na XY .



Konštrukcia axonometrickej súradnicovej sústavy v kolmej axonometrii

3. Mongeova projekcia

Ide o dvojicu kolmých premietaní (rovnobežné premietania s uhlami premietania 90°).

- (1)
 - Prvá priemetňa π je xy rovina, nazýva sa tiež **pôdorysňa**. Priemet bodu/objektu do tejto roviny sa nazýva prvý priemet alebo tiež **pôdorys**. Napríklad prvým priemetom bodu $A = (a_x, a_y, a_z)$ je bod $A_1 = (a_x, a_y)$.
 - Druhá priemetňa ν je xz rovina, nazýva sa tiež **nárysňa**. Priemet bodu/objektu do tejto roviny sa nazýva druhý priemet alebo tiež **nárys**. Napríklad druhým priemetom bodu $A = (a_x, a_y, a_z)$ je bod $A_2 = (a_x, a_z)$.

Matematicky ide teda v prvom kroku o zobrazenie

$$f: \mathbb{E}^3 \rightarrow \pi \times \nu$$

$$A \mapsto (A_1, A_2)$$

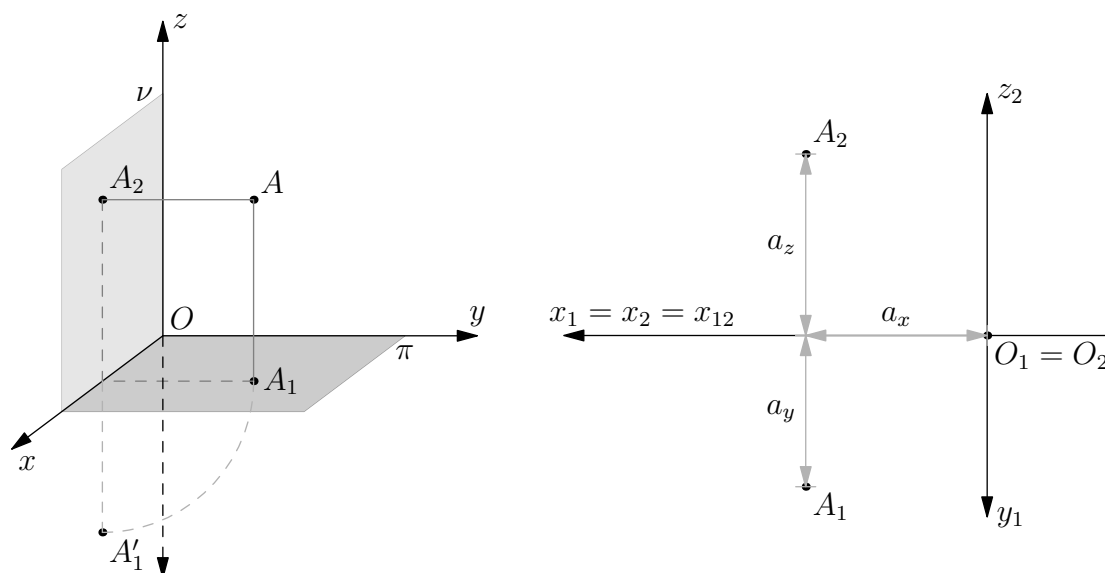
- (2) Rovinu π otočíme okolo x -osi tak, že kladný smer y -osi splynie so záporným smerom z -osi (tzv. **združenie priemetní**).

$$\pi \times \nu \rightarrow \nu \times \nu, \quad (A_1, A_2) \mapsto (A'_1, A_2)$$

Mongeovo zobrazenie (Mongeova projekcia)

$$g: \mathbb{E}^3 \rightarrow \nu \times \nu, \quad A \mapsto (A'_1, A_2)$$

je zloženie týchto dvoch zobrazení. V praxi máme tak jednu rovinu, v ktorej sa nachádza aj nárys aj pôdorys objektu. Pre odľahčenie označenia sa znovu namiesto A'_1 píše A_1 .



Súradnicová os $x_1 = x_2$ sa nazýva **základnica**.

Kvôli prehľadnosti sa zobrazované objekty sa zvyknú do súradnicovej sústavy umiestňovať tak, aby y - a z -súradnice všetkých bodov boli nezáporné. Pokiaľ sa zobrazujú pravouhlé objekty, tiež sa štandardne umiestňujú tak, aby ich hrany boli rovnobežné so súradnicovými osami. Umožňuje to priamo v projekcii merať dôležité vzdialenosti.

PRÍKLAD 3.1. Pôdorysom a nárysom priamky je priamka, v špeciálnom prípade bod. Dôležité body priamky p v Mongeovom zobrazení:

- **pôdorysný (prvý) stopník** $P = p \cap \pi$,
- **nárysný (druhý) stopník** $N = p \cap \nu$,

PRÍKLAD 3.2. Ako vyzerá obraz priamky

- kolmej na niektorú priemetňu,
- rovnobežnej s niektorou priemetňou, prípadne s oboma priemetňami?

Ide síce v matematike o špeciálne prípady, no v praxi sú to naopak preferované a veľmi časté prípady.

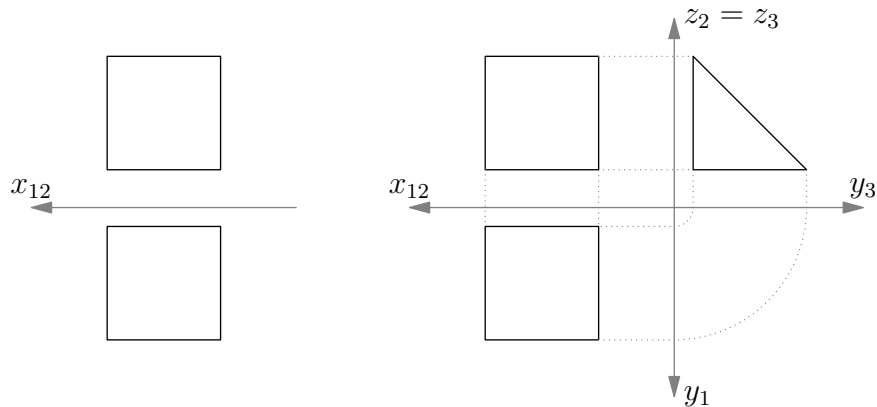
PRÍKLAD 3.3. Ako zistiť vzájomnú polohu dvoch priamok, keď poznáme ich obrazy v Mongeovej projekcii?

Spravidla Mongeov obraz poskytuje dostatočnú predstavu o objekte. Poloha bodu $A \in \mathbb{E}^3$ sa dá jednoznačne zrekonštruovať z jeho pôdorysu a nárysu. To isté platí pre priamku. S komplexnejšími (viacrozmernými) objektami je to komplikovanejšie.

PRÍKLAD 3.4. Zostrojiť nárys a pôdorys kocky (axiálnej) je jednoduché. No tento nárys o pôdorys môže okrem kocky predstavovať aj rôzne iné telesá.

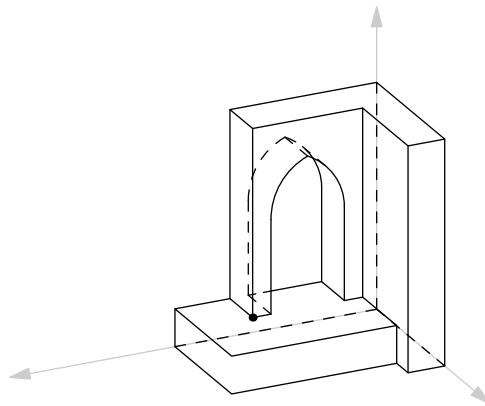
V záujme čo najvyššej výpovednosti:

- volíme vhodnú polohu telesa (viď predchádzajúci príklad),
- pôdorys a nárys môžeme doplniť tretím priemetom, tzv. **bokorysom**,
- pôdorys a nárys (možno aj s bokorysom) môžeme pre názornosť doplniť axonometrickým obrazom telesa.



Bokorys na obrázku vpravo odhalí, že ide o trojboký hranol.

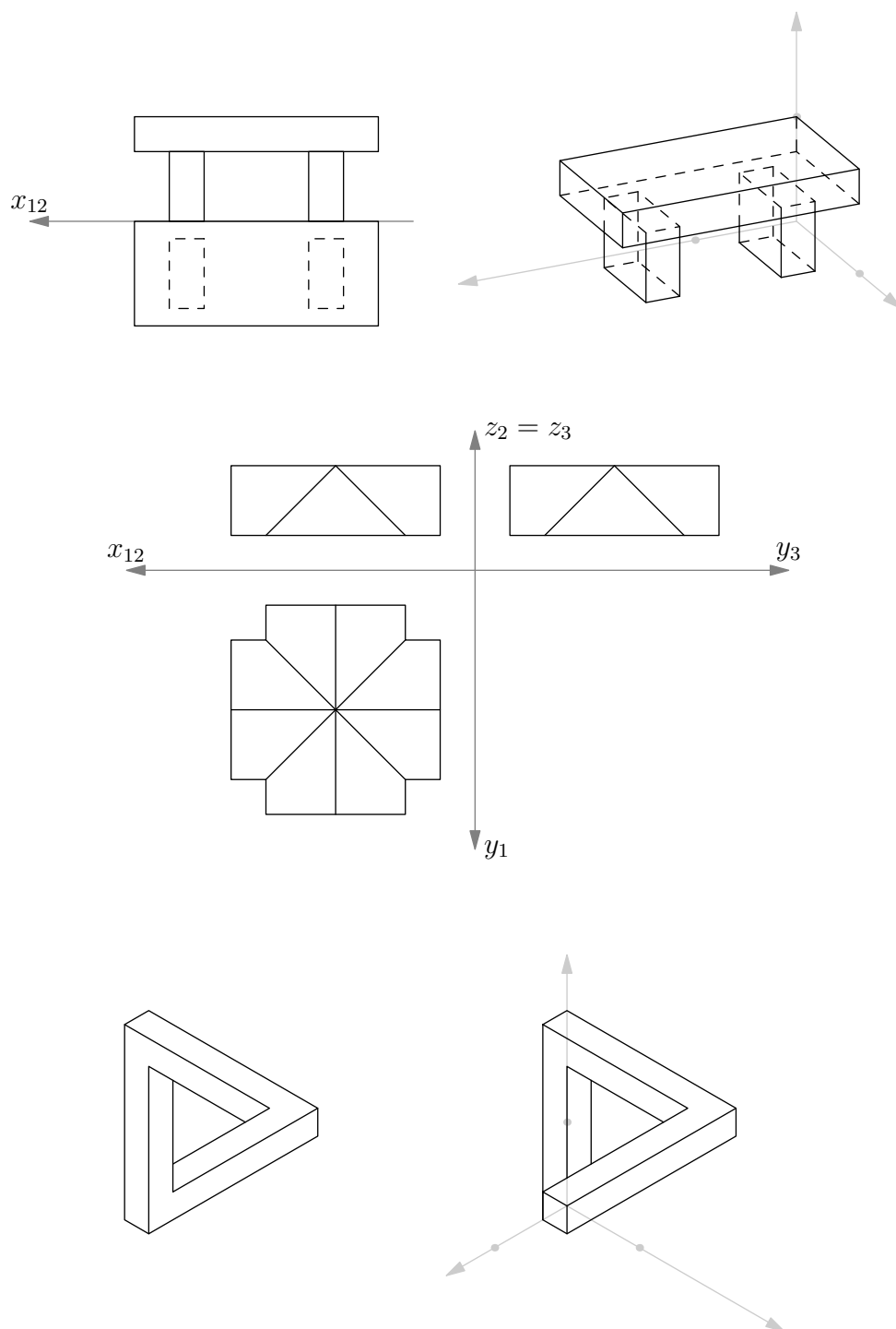
PRÍKLAD 3.5. Nakresliť pôdorys, nárys aj bokorys objektu.



PRÍKLAD 3.6. Objekt znázornený v Mongeovej projekcii (pôdorys a nárys sú oddelené) znázorniť v axonometrii danej napríklad axonometrickým osovým krížom. Existuje napríklad zárezová metóda pre pohodlné rysovanie. Takýmito technickými konštrukciami sa však na tejto prednáške nebudeme zaoberať. Možný postup je napríklad najprv si nanieť do axonometrie pôdorys a následne každý bod ešte doplniť z -súradnicou.

PRÍKLAD 3.7. Objekt znázornený v Mongeovej projekcii (pôdorys, nárys aj bokorys) zobrazte v axonometrii.

PRÍKLAD 3.8. Takzvaný Penrose-ov trojuholník (na obrázku vľavo) je neexistujúci objekt v štýle viacerých Escherových obrazov. Po malej úprave (vpravo) sa ale stáva axonometrickým obrazom reálneho objektu. Nakreslite jeho pôdorys, nárys aj bokorys.



Lineárna perspektíva

- „lineárna”: ide o zobrazenie, ktoré zachováva kolinearitu: priamka sa zobrazuje na priamku, prípadne na jediný bod (podobne ako pri rovnobežnom premietaní)
- „perspektíva”: geometricky vyjadruje, že vzdialenejšie objekty sa javia menšie

1. Stredové premietanie

Matematickým modelom lineárnej perspektívy je **stredové premietanie**. Ide o zobrazenie priestoru do roviny určené

- **priemetňou** ρ a
- **stredom premietania** S , kde $S \notin \rho$.

Nech $X \in \mathbb{E}^3$, $X \neq S$. Ak $\overleftrightarrow{XS} \not\parallel \rho$, je obrazom bodu $X \in \mathbb{E}^3$ v tomto stredovom premietaní bod $X' = \overleftrightarrow{XS} \cap \rho$. V opačnom prípade (ak $\overleftrightarrow{XS} \parallel \rho$), nie je obraz bodu X definovaný. Stredové premietanie tak nie je definované pre body v rovine ι , ktorá je rovnobežná s priemetňou ρ a prechádza stredom premietania S .

Pozrime sa teraz, čo je obrazom priamky v stredovom premietaní.

- Ak $p \subset \iota$, tak zobrazenie nie je definované v žiadnom z bodov p .
- Ak $p \parallel \rho$, $p \not\subset \iota$, tak obrazom priamky p je priamka p' , kde $p' \parallel p$ a p' je zároveň afinným obrazom p , teda pre jednotlivé body na tejto priamke sa zachováva ich deliaci pomer.
- Ak $p \ni S$ a $p \not\subset \iota$, je obrazom p jediný bod, a to priesečník p s priemetňou ρ .
- V najvšeobecnejšom prípade, ak $p \not\parallel \rho$, $p \not\ni S$, je obrazom priamky p priamka p' okrem jedného bodu, a síce bodu $\tilde{p} \cap \rho$, kde $\tilde{p} \parallel p$, $\tilde{p} \ni S$. Tento bod nazývame **úbežníkom** priamky p . Na priamke p je zobrazenie definované pre všetky body okrem bodu $p \cap \iota$.

Dôležité pozorovanie: ak p , q sú priamky vo všeobecnej polohe vzhľadom na priemetňu a stred premietania (viď posledný z práve skúmaných prípadov), tak $p \parallel q$ práve vtedy, keď p a q majú spoločný úbežník.

2. Základné pojmy lineárnej perspektívy

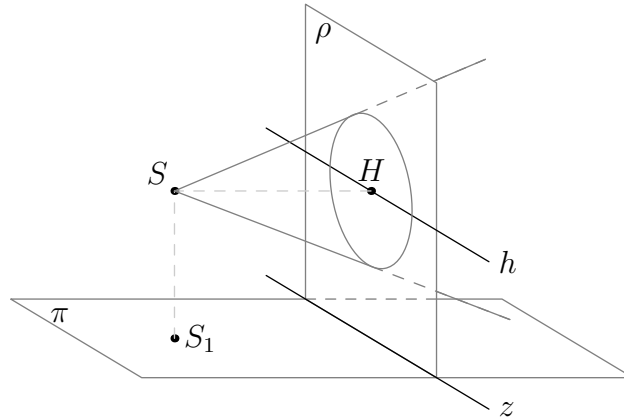
Hoci stredové premietanie je definované takmer na celom priestore, v technickej praxi sa používa len na malú časť priestoru. V prvom rade je zaužívaná konvencia, že priemetňa sa nachádza medzi stredom premietania (v lineárnej perspektíve **pozorovateľom**) a zobrazovanými objektami. K tomu sa v lineárnej perspektíve zobrazujú len objekty nachádzajúce sa vo vnútri **zornej kužeľovej plochy**, čo je kužeľová plocha s vrcholom S , ktorej os je kolmá na priemetňu ρ .

Zorná kružnica je prienik zornej kužeľovej plochy s priemetňou. Jej polomer budeme označovať r .

Hlavný bod H lineárnej perspektívy je kolmý priemet pozorovateľa (t.j. stred premietania) do priemetne. Je teda priesečníkom osi kužeľovej plochy s priemetňou. Vzďialenosť $d = |SH| = |S\rho|$ sa nazýva **dišťancia** perspektívy.

Čím väčšiu odchýľku majú premietacie priamky zobrazovaného objektu od osi zornej kužeľovej plochy, tým k väčšiemu skresleniu pri premietaní dochádza (efekt, ktorý poznáte z rovnobežného premietania). Preto pre čo najrealistickejšie zobrazenie sa odporúča, aby tvoriace priamky zornej kužeľovej plochy mali od normály priemetne maximálnu odchýľku 45° . Na druhej strane by dišťancia d nemala byť v porovnaní s r príliš veľká, inak by sa stratil efekt perspektívy a zobrazenie by sa príliš podobalo na kolmé rovnobežné premietanie. Za vhodné hodnoty pre d sa považujú

$$r \leq d \leq 3r.$$

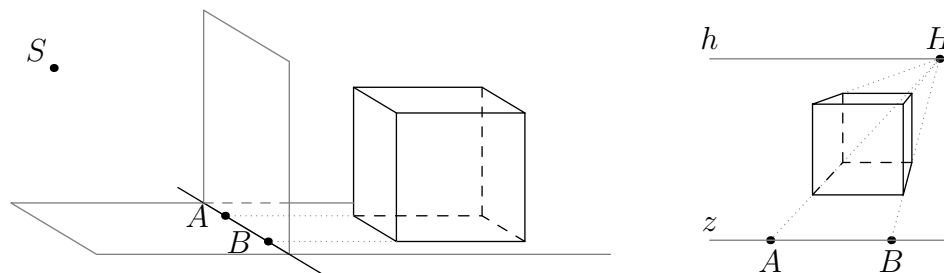


Lineárna perspektíva pre situáciu, keď priemetňa je kolmá na základnú rovinu.

Základná rovina π je vhodná horizontálna rovina (zem) pod S . Zobrazované objekty reprezentované pravouhlými kvádrami kladieme jednou stenou na základnú rovinu. Kolmý priemet S do π , ozn. S_1 , je **stanovište**. Vzďialenosť $|SS_1| = |S\pi|$ sa nazýva **výška horizontu**. Nech π^S je rovina prechádzajúca bodom S a rovnobežná s π . Rovina π^S sa nazýva **obzorová rovina**. **Horizont** je priamka $h = \pi^S \cap \rho$. Horizont je množinou úbežníkov priamok rovnobežných so základnou rovinou. Na záver priamka $z = \pi \cap \rho$ sa nazýva **základnica**.

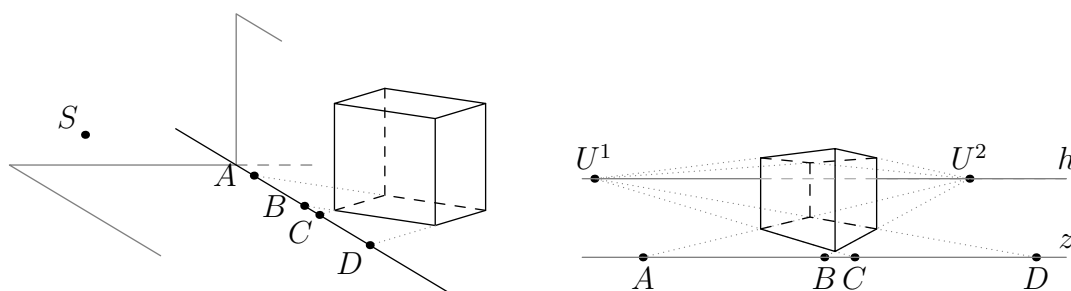
V závislosti od polohy zobrazovaného objektu vzhľadom na priemetňu hovoríme o tzv. **jedno-**, **dvoj-** alebo **trojúbežníkovej perspektíve**. Jedno- a dvojúbežníkové perspektívy sú **zvislými perspektívami**, čím sa vracia, že priemetňa je kolmá na základnú rovinu.

2.1. Jednouúbežníková (frontálna, priečelná) perspektíva. Objekt (kváder) je položený na základnej rovine π a jedna jeho stena je rovnobežná s priemetňou ρ . Každá hrana zobrazovaného kvádra je tak buď rovnobežná s priemetňou alebo je na priemetňu kolmá. Hrany kolmé na priemetňu sa zobrazujú na priamky so spoločným úbežníkom H (hlavný bod lineárnej perspektívy).



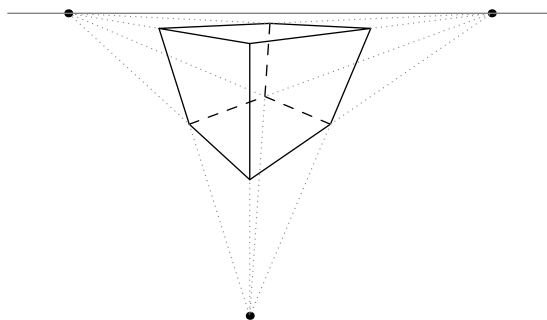
Vľavo: znázornenie situácie jednoúbežníkovej perspektívy; vpravo: obraz v priemetni.

2.2. Dvojúbežníková (nárožná) perspektíva. Objekt leží jednou stenou v základnej rovine, a všetky jeho steny sú s priemetňou rôznobežné. Zvislé hrany sú tak rovnobežné s priemetňou a zvislé hrany sú s priemetňou rôznobežné. Tieto (nie zvislé hrany) sú po štyroch navzájom rovnobežné, každá štvorica má tak spoločný úbežník. Oba úbežníky sú na horizonte, keďže hrany sú rovnobežné so základnou rovinou.



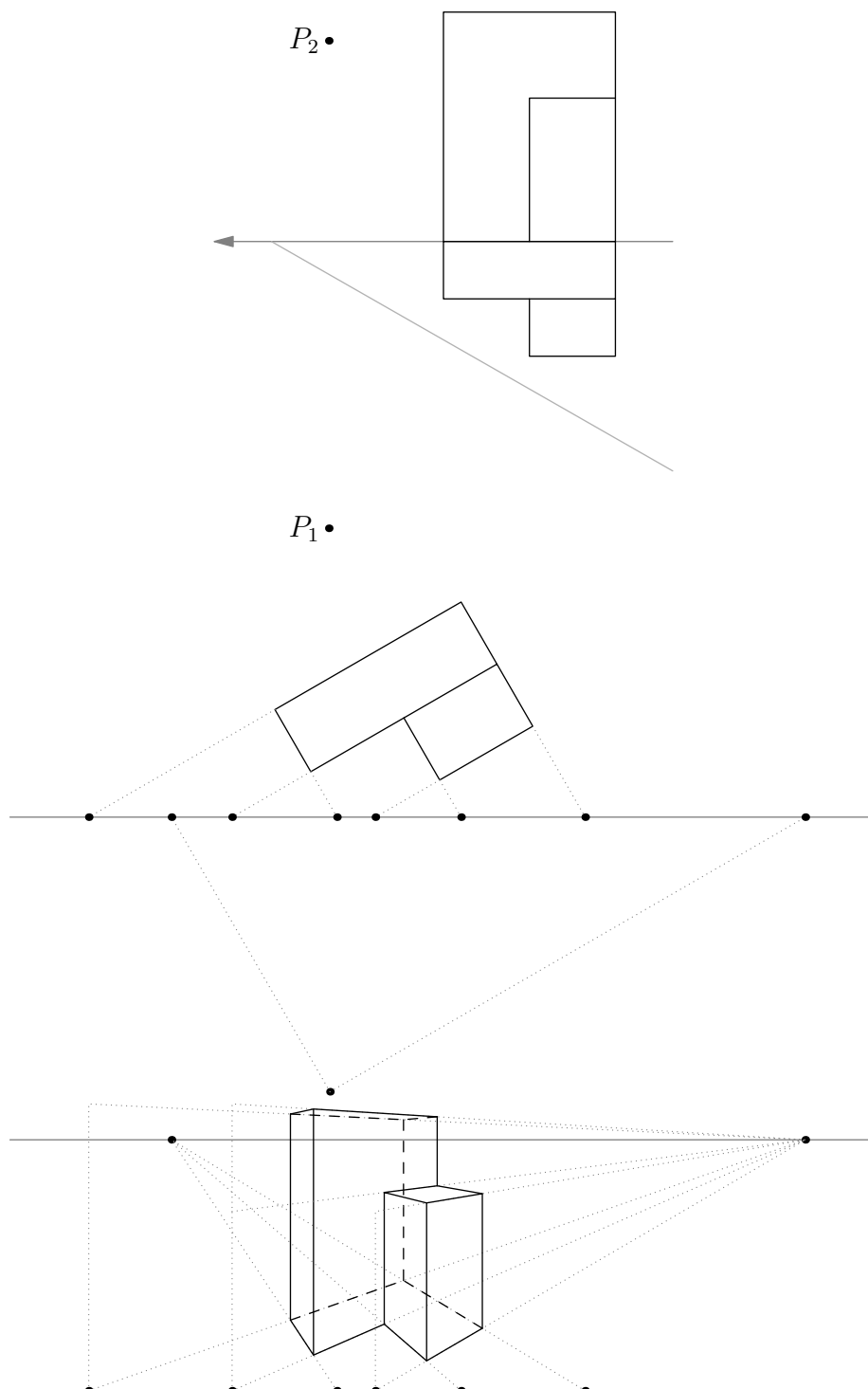
Vľavo: dvojúbežníková perspektíva; vpravo: obraz v priemetni.

2.3. Trojúbežníková perspektíva. Hovorí sa jej aj **šikmá perspektíva**. Objekt stále leží jednou stenou v základnej rovine a ani jedna trieda navzájom rovnobežných hrán nie je rovnobežná s priemetňou. To znamená, že priemetňa nie je zvislá, teda nie je kolmá na základnú rovinu. Tak každá z troch tried navzájom rovnobežných hrán pravouhlého kvádra má v priemetni svoj úbežník. Dva z týchto úbežníkov, zodpovedajúcich hranám v základnej rovine, určujú v priemetni horizont.



3. Príklad

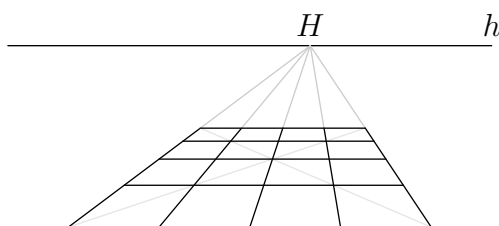
Objekt daný Mongeovou projekciou zobrazte v dvojúbežníkovej perspektíve. Priemetňa je kolmá na základnú rovinu (pôdorysňu) a je znázornená v pôdoryse. Pozorovateľ sa nachádza v bode P .



4. Deliaci pomer v lineárnej perspektíve

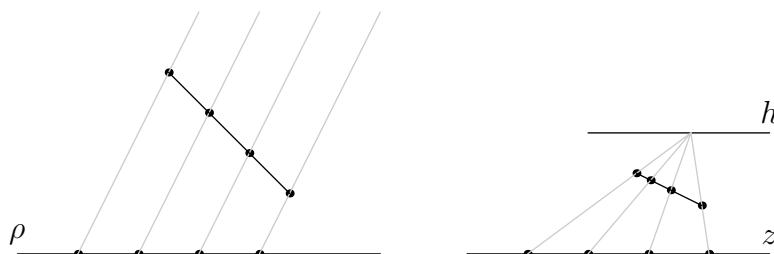
Stredové premietanie nezachováva deliaci pomer. Ako naniest žiadaný deliaci pomer na úsečku, ktorá nie je rovnobežná s priemetňou (napríklad rozdeliť úsečku na rovnaké dieliky)? Ukážeme si možné postupy v jednoúbežníkovej perspektíve.

4.1. Špeciálny prípad: delenie na polovice. Pre šachovnicu vieme deliť každú stranu na polovicu pomocou uhlopriečok: ide o veľmi špeciálnu situáciu, kde si môžeme pomôcť takýmto jednoduchým trikom.



4.2. Všeobecná konštrukcia v technickej praxi. Všeobecnejšie, ak chceme úsečku, ktorá pred zobrazením nebola rovnobežná s priemetňou, rozdeliť na n zhodných častí, premietneme si ju rovnobežným premietaním najprv do priemetne: ak úsečka leží v základnej rovine π , jej rovnobežný priemet bude na základnici. Rovnobežné premietanie zachováva deliaci pomer a v priemetni sú zachované skutočné vzdialenosti. Úlohu vyriešime v priemetni a riešenie následne premietneme naspäť. Pri rysovaní alebo črtaní v lineárnej perspektíve teda postupujeme nasledovne:

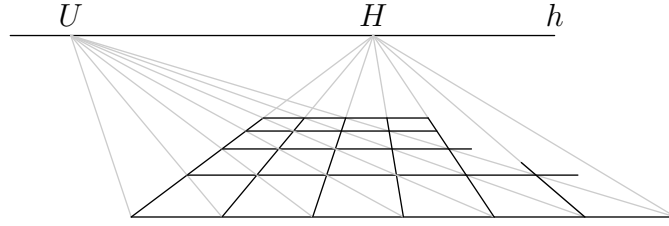
- (1) Pomocou niektorého úbežníka na horizonte prenesieme úsečku na základnicu. V základnej rovine (v pôdoryse) ide o rovnobežný priemet tejto úsečky na základnicu, kde smer premietania je určený úbežníkom.
- (2) Potrebné vzdialenosti nanášame na úsečke na základnici.
- (3) Skonštruované body/úseky nanesieme na pôvodnú úsečku. V základnej rovine ide o rovnobežné premietanie inverzné k premietaniu v prvom kroku.



Vľavo: pôdorys riešenia delenia úsečky na tri rovnaké časti (zdôvodnenie riešenia); vpravo: riešenie problému v lineárnej perspektíve

4.3. Konštrukcia pravidelnej štruktúry (dláždenie). Vidíme, že aj v jedno-úbežníkovej perspektíve sa používa viac úbežníkov, nielen hlavný bod. Ako špeciálny prípad predchádzajúceho postupu dostaneme konštrukciu, ktorá sa využíva napríklad pri kreslení pravidelnej dlažby. Pre rovnobežné premietanie sa použije úbežník uhlopriečok a pomocou neho dlažbu rozšírime podľa potreby/želania.

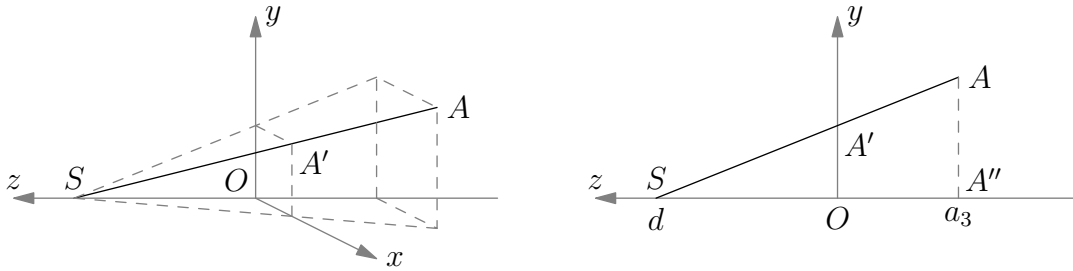
Tiež je užitočné si uvedomiť, že úsečku, ktorú chceme deliť alebo nanášať ďalej na danú priamku, nemusíme zobrazovať presne na základnicu, môžeme ju zobraziť na akúkoľvek priamku rovnobežnú so základnicou.



Hlavný bod H je úbežníkom priamok kolmých na priemetňu, bod U je úbežníkom priamok, na ktorých ležia uhlopriečky dlažby.

5. Analytické vyjadrenie stredového premietania

Nech priemetňa ρ je xy -rovina, x - a y -súradnicové osi nech sú spoločné pre $\mathbb{E}^3$ aj pre priemetňu. Pozorovateľ nech sa nachádza na z -osi vo vzdialenosti d od priemetne: $S = (0, 0, d)$. Bod $A = (a_1, a_2, a_3)$ chceme v stredovom premietaní so stredom v S zobraziť do priemetne ρ . Výpočet súradníc priemetu $A' = (a'_1, a'_2)$ bodu A (tretiu súradnicu



Stredové premietanie; vpravo: kolmý priemet situácie do yz -roviny

vynechávame, jej hodnota je 0, keďže leží v priemetni ρ):

- (synteticky) Pre výpočet y -súradnice vynechajme x -súradnicu (urobili sme kolmý priemet situácie do yz -roviny). Z podobnosti trojuholníkov SOA' a $SA''A$ máme

$$\begin{aligned} \frac{|A'O|}{|OS|} &= \frac{|AA''|}{|A''S|} \\ \frac{a'_2}{d} &= \frac{a_2}{d - a_3} \\ a'_2 &= \frac{a_2 d}{d - a_3}. \end{aligned}$$

Také isté vyjadrenie dostaneme aj pre x -súradnicu bodu A' . Takže máme

$$s : (a_1, a_2, a_3) \mapsto \left(\frac{a_1 d}{d - a_3}, \frac{a_2 d}{d - a_3} \right).$$

- (analyticky) A' dostaneme ako prienik $\overleftrightarrow{SA}$ a ρ . Parametrické vyjadrenie priamky je

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{SA} : x &= 0 + a_1 t \\ y &= 0 + a_2 t \\ z &= d + (a_3 - d)t \end{aligned}$$

Rovina ρ má rovnicu $z = 0$. Odtiaľ dostávame súradnice priemetu bodu

$$A' = s(A) = \left(\frac{a_1 d}{d - a_3}, \frac{a_2 d}{d - a_3} \right)$$

(tretiu súradnicu sme znovu zahodili, je nulová).

Tak ako sme si to všimli v úvode, aj z analytického vyjadrenia vidíme, že zobrazenie nie je definované pre body, ktorých z -súradnica je d , čo sú body roviny, ktorá je rovnobežná s priemetňou a prechádza stredom premietania S .

PRÍKLAD 5.1. Analyticky nájdeme úbežník priamok kolmých na priemetňu.

PRÍKLAD 5.2. Analyticky ukázať, že úbežníky priamok rovnobežných zo základnou rovinou tvoria v priemetni priamku (horizont).

6. Projektívna rovina, projektívny priestor

Navzájom rovnobežné priamky majú spoločný úbežník. Ide o obraz tzv. nevlastného bodu priamky.

Euklidovský priestor rozšírime pridaním nevlastných bodov priamok. Navzájom rovnobežné priamky majú spoločný nevlastný bod. Teda každá osnova priamok prinesie jeden nový nevlastný bod. Môžeme tak tiež povedať, že **nevlastný bod** je osnova priamok (t.j. množina všetkých navzájom rovnobežných priamok) euklidovského priestoru. Množinu všetkých nevlastných bodov priestoru $\mathbb{E}^n$ označíme $\mathbb{E}_\infty^n$. Dostávame tak **projektívne rozšírenie (zúplnenie)** euklidovského priestoru: $\overline{\mathbb{E}}^n = \mathbb{E}^n \cup \mathbb{E}_\infty^n$. Body $\mathbb{E}^n$ priestoru $\overline{\mathbb{E}}^n$ sa tiež nazývajú **vlastné body**.

Projektívny priestor sa štandardne označuje aj $\mathbb{P}^n$, najmä keď neuvažujeme jeho euklidovskú štruktúru (meranie vzdialeností). Vtedy ho vnímame ako rozšírenie afinného priestoru $\mathbb{A}^n$.

6.1. Vizualizácia projektívnej roviny. Uvažujme znovu stredové premietanie so stredom S a priemetňou ρ . Nech α je rovina kolmá na ρ a neprechádzajúca bodom S . Obrazom roviny α je celá priemetňa ρ okrem jednej priamky (ktorá sa v lineárnej perspektíve nazýva horizont). Navyše v rovine α sa nachádza priamka q , ktorá nemá v rovine ρ obraz, inak: v bodoch tejto priamky nie je stredové premietanie definované. Ide o priamku, ktorá spolu so stredom premietania S určuje rovinu rovnobežnú s priemetňou.

Ak by sme rovinu α , ktorá je euklidovskou rovinou, rozšírili nevlastnými bodmi na projektívnu rovinu, potom by obrazom roviny α bola celá rovina ρ . Ak by sme aj rovinu ρ rozšírili na projektívnu rovinu, bolo by stredové premietanie definované vo všetkých

bodoch roviny α : body priamky q sa zobrazujú na nevlastné body priemetne $\bar{p}$. Stredové premietanie sa tak stáva bijekciou medzi rovinami $\bar{\alpha}$ a $\bar{p}$.

Stredové premietanie nám tak umožnilo vizualizovať nevlastné body roviny α (okrem jedného, ktorého?), avšak stratili sa nám body priamky q . Ak chceme vidieť všetky body projektívnej roviny, musíme siahnuť po inom zobrazení.

Gnómonická projekcia (Tháles, cca 600 pr.n.l.) je bijekcia medzi rovinou a polsférou, ktorú skonštruujeme nasledovne.

Nech $\alpha \cong \mathbb{E}^2$ je rovina vnorená do trojrozmerného priestoru $\mathbb{E}^3$ a nech $\mathcal{S}$ je sféra, ktorá sa tejto roviny dotýka v jednom bode, napríklad v južnom póle:

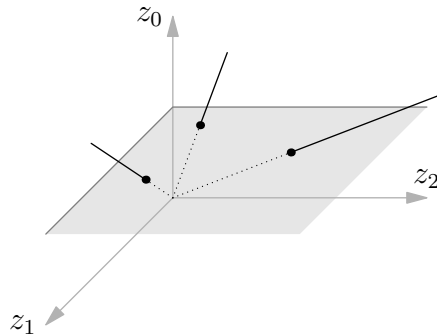
$$\begin{aligned}\mathcal{S} : x^2 + y^2 + z^2 - 1 &= 0 \\ \alpha : z + 1 &= 0\end{aligned}$$

Bod $O = (0, 0, 0)$ je stredom sféry a zohráva rolu stredú premietania:

- Ak P je bod roviny α , jeho obrazom na sfére je bod $P' = \overrightarrow{OP} \cap \mathcal{S}$. Obrazom roviny α je tak južná polsféra sféry $\mathcal{S}$ bez hranice (rovníka).
- Ak Q je bod na južnej polsfére $\mathcal{S}$. Jeho obrazom je bod $Q' = \overleftarrow{OQ} \cap \alpha$.

Nech $p \subset \alpha$ je priamka. Jej obrazom na $\mathcal{S}$ je polkružnica so stredom v O a s koncovými bodmi na rovníku sféry. Ak $q \subset \alpha$, $q \parallel p$, obrazom q na $\mathcal{S}$ je znovu polkružnica na južnej polsfére, s tými istými koncovými bodmi ako mal obraz p . Dvojica koncových bodov tak reprezentuje nevlastný bod týchto navzájom rovnobežných priamok. Projektívnu rovinu tak máme vizualizovanú ako polsféru spolu s jej hranicou, kde sme ale na hranici identifikovali navzájom protíhlé body (t.j. dvojica protíhlých bodov na hranici polsféry reprezentuje jeden bod projektívnej roviny).

6.2. Algebraická konštrukcia projektívnej roviny. V trojrozmernom priestore $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ budeme teraz jednotlivé súradnice označovať z_0, z_1, z_2 . Uvažujme v tomto priestore všetky priamky, ktoré prechádzajú začiatkom $(0, 0, 0)$ (tzv. **trs priamok**, čiže množina priamok v $\mathbb{A}^3$ prechádzajúcich jedným bodom). Na druhej strane majme rovinu $\alpha : z_0 = 1$. Každý bod roviny α jednoznačne určuje priamku uvažovaného trsu. Naopak, každá priamka trsu, ktorá neleží v $z_1 z_2$ -rovine, jednoznačne určí bod v rovine α . Máme tak bijekciu medzi bodmi roviny α a priamkami trsu cez $(0, 0, 0)$ neležiacimi v $z_1 z_2$ -rovine, ide o priesečník priamky a roviny α . Afinnú rovinu α rozšírime na projektívnu rovinu pridaním priamok trsu, ktoré ležia v $z_1 z_2$ -rovine: každá takáto priamka bude zodpovedať nevlastnému bodu triedy priamok v α , ktoré sú s touto priamkou rovnobežné. Body (a_0, a_1, a_2) a (b_0, b_1, b_2) rôzne od $(0, 0, 0)$ ležia na tej istej priamke trsu,



a teda reprezentujú ten istý bod projektívnej roviny práve vtedy, keď

$$(6) \quad b_0 = \lambda a_0, \quad b_1 = \lambda a_1 \text{ a } b_2 = \lambda b_2 \quad \text{pre nejaké } \lambda \neq 0.$$

(Môžte to nahliadnuť cez parametrické vyjadrenie priamky cez $(0, 0, 0)$ alebo rýchlejšie cez polohové vektory týchto bodov.) Obe trojice (a_0, a_1, a_2) aj (b_0, b_1, b_2) môžeme tak chápať ako súradnice toho istého bodu projektívnej roviny. Hovoríme im **homogénne súradnice** bodu a zapisujeme $(a_0 : a_1 : a_2)$ $(= (\lambda a_0 : \lambda a_1 : \lambda a_2))$.

Bod P , ktorého afinné súradnice sú (p_1, p_2) , tak po vnorení do $\mathbb{A}^3$ (ako bod roviny α) bude mať súradnice $(1, p_2, p_2)$, jeho homogénne súradnice sú tak $(1 : p_1 : p_2)$.

Všetky body afinnej roviny budú mať po vnorení do projektívnej roviny homogénne súradnice

$$(a_0 : a_1 : a_2), \quad \text{kde } a_0 \neq 0.$$

Nevlastné body projektívnej roviny, t.j. tie, ktoré sme získali obohatením afinnej roviny o „body v nekonečne“, majú homogénne súradnice

$$(0 : a_1 : a_2), \quad \text{kde } (a_1 : a_2) \neq (0 : 0).$$

Všetky predchádzajúce pozorovania a konštrukcie tak môžeme zhrnúť do exaktnej algebraickej definície projektívnej roviny:

DEFINÍCIA 6.1.

$$\mathbb{P}^2 := (\mathbb{A}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}) / \sim,$$

kde $\sim$ je relácia ekvivalencie (overte si, že je to naozaj ekvivalencia!) definovaná (6).

Body projektívnej roviny sú teda triedy ekvivalencie vzhľadom na reláciu (6).

6.3. Projektívna rovina analyticky. Nech P je vlastný bod v rovine. Ak jeho afinné súradnice (pred rozšírením roviny na projektívnu) boli (p_1, p_2) , jeho homogénne súradnice sú napríklad $(1 : p_1 : p_2)$.

Naopak, ak Q je bod roviny so súradnicami $(q_0 : q_1 : q_2)$. Ak Q je vlastným bodom, potom $q_0 \neq 0$ a

$$(q_0 : q_1 : q_2) = \left(1 : \frac{q_1}{q_0} : \frac{q_2}{q_0} \right),$$

teda jeho afinné súradnice (ktoré použijeme napríklad na jeho vykreslenie) sú

$$Q = \left(\frac{q_1}{q_0}, \frac{q_2}{q_0} \right).$$

Majme teraz v afinnej rovine priamku l so všeobecnou rovnicou

$$l : ax + by + c = 0.$$

Bod P s homogénnymi súradnicami $P = (p_0 : p_1 : p_2)$ leží na priamke, keď jeho afinné súradnice spĺňajú rovnicu priamky, teda keď

$$a \frac{p_1}{p_0} + b \frac{p_2}{p_0} + c = 0,$$

čo je ekvivalentné rovnosti

$$ap_1 + bp_2 + cp_0 = 0.$$

V homogénnych súradniciach teda rovnica priamky l vyzerať:

$$(7) \quad az_1 + bz_2 + cz_0 = 0.$$

Pozrime sa teraz na smerové vektory tejto priamky. Vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ je smerovým vektorom priamky l práve vtedy, keď spĺňa asociovanú hohonennú rovnicu, čiže keď

$$au_1 + bu_2 = 0.$$

Ak by sme vektor $\mathbf{u}$ reprezentovali tiež rozšírenými súradnicami: $\mathbf{u} = (0, u_1, u_2)$, tak pre overenie, či daný vektor leží na priamke (je smerovým vektorom priamky), môžeme použiť tú istú rovnicu (7) ako pre bod.

V ďalšom kroku nahradíme rozšírené súradnice vektora homogénnymi:

$$(0, u_1, u_2) \rightsquigarrow (0 : u_1 : u_2).$$

V tomto kroku nám na rozdiel od bodov niektoré vektory splnynuli do jedného objektu: „homogenizované súradnice” vektorov (u_1, u_2) a $(\lambda u_1, \lambda u_2)$ ($\lambda \neq 0$) reprezentujú ten istý objekt:

$$(0 : u_1 : u_2) = (0 : \lambda u_1 : \lambda u_2),$$

a síce nevlastný bod priamok, pre ktoré sú tieto vektory smerovými vektormi.

7. Maticové vyjadrenie stredového premietania

Výhodou homogénnych súradníc je, že sa vôbec nemusíme zaoberať zlomkami: ak $P = (3/5, 4/5)$ sú afinné súradnice bodu, v homogénnych súradniciach vôbec nemusíme mať menovateľa: $P = (5 : 3 : 4)$. Podobne pri racionálnych funkciách menovateľa dáme do „homogenizujúcej” súradnice. Tak napríklad predpis pre stredové premietanie

$$(x, y, z) \mapsto \left(\frac{xd}{d-z}, \frac{yd}{d-z} \right)$$

je v homogénnych súradniciach

$$(1 : x : y : z) \mapsto (d - z : xd : yd),$$

čo už vieme napísať aj maticovo (a tak v prípade potreby elegantne vyskladať s inými zobrazeniami):

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 & -1 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

so stredom

KAPITOLA 6

Geometria sféry

1. Základné pojmy

Hneď po euklidovskej rovine ide o najjednoduchší objekt v geometrii.

Štandardne sa v matematike uvažuje jednotková sféra: guľová plocha v trojrozmernom euklidovskom priestore so stredom v začiatku súradníc a polomerom 1. Jej všeobecnú rovnicu ľahko odvodíme, keď si uvedomíme, že **sféra** S^2 je množina bodov, ktorých vzdialenosť od stredu sféry, t.j. v tomto prípade od bodu $O = (0, 0, 0)$ je 1.

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Všeobecnejšie môžeme skúmať d -rozmernú sféru S^d ($d \in \mathbb{N}$), ktorá sa štandardne vnorí do $(d+1)$ -rozmerného priestoru. Napríklad pre $d = 1$ tak máme jednotkovú kružnicu v rovine, jej rovnica je $x^2 + y^2 = 1$.

Terminológia, ktorou v geometrii popisujeme sféru, má silnú inšpiráciu v geografii.

Bod $N = (1, 0, 0)$ budeme nazývať **severný pól**, bod $S = (-1, 0, 0)$ zas **južný pól**. Prienik sféry s xy -rovinou, teda kružnicu pozostávajúcu z bodov $(x, y, 0)$ na sfére nazývame **rovník**. Ostatné vodorovné kružnice (množiny bodov s konštantnou z -súradnicou) nazývame **rovnobežkami**, kružnice prechádzajúce severným aj južným pólom zase **poludníkmi**.

Nech $A = (a_1, a_2, a_3), B = (b_1, b_2, b_3) \in S^2$. Euklidovská vzdialenosť bodov síce má nejakú výpovednú hodnotu, ale užitočnejšie je poznať vzdialenosť týchto bodov v takom zmysle, ako ju meriame na Zemi.

PRÍKLAD 1.1. Overíme, že spomedzi všetkých kružnicových oblúkov na sfére spájajúcich dané dva body je najkratším oblúk kružnice so stredom v strede sféry.

Krivka so začiatočným bodom v A , koncovým bodom v B , ktorá celá leží na sfére S^2 a má najkratšiu dĺžku, sa nazýva **ortodróma**. Ak $A \neq -B$, existuje jediná ortodróma spájajúca body A a B : je ňou kratšia časť oblúka kružnice na sfére, ktorej stred je v strede sféry (ide o tzv. **hlavnú kružnicu** alebo tiež **geodetickú priamku**); oblúk je ohraničený týmito dvoma bodmi. (Hlavnú kružnicu dostaneme ako prienik sféry s rovinou obsahujúcou stred sféry.) Ak $A = -B$, potom každá polkružnica na sfére spájajúca A a B je ortodróma. Napríklad ak A a B sú severný a južný pól, ortodróamami sú poludníky.

Nech $d_S(A, B)$ je dĺžka trajektórie najkratšej krivky spájajúcej po jednotkovej sfére body A a B . Na základe uvedeného potom vieme, že

$$d_S(A, B) = \angle \mathbf{v}_A \mathbf{v}_B,$$

kde $\mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B$ sú polohové vektory bodov A, B a pre meranie uhla používame oblúkovú mieru (radiány).

2. Sféricke súradnice

Každý bod v $\mathbb{E}^3$ má okrem Vám dobre známych kartézskych súradníc (x, y, z) aj **sféricke súradnice**, kde (podobne ako pri polárnych súradniciach) polohu bodu vieme jednoznačne určiť jeho vzdialenosťou od začiatku súradníc a odklonom od súradnicových osí/rovín. Sféricke súradnice bodu X bude trojica (r, φ, θ) , kde

- r je vzdialenosť bodu X od začiatku O ,
- φ je uhol polárnych súradníc kolmého priemetu X do xy -roviny,
- θ je uhol, ktorú zvierá polohový vektor bodu X s kladným smerom z -osi (takto sa štandardne určuje v matematike) alebo odklon polohového vektora bodu X od xy -roviny (takto sa určuje v geografii).

Ohľadne uhla θ sa v tomto predmete budeme držať geografickej konvencie. Tak uhol θ pre body na rovníku sféry bude 0, pre body nad xy -rovinou bude kladný, pre body pod touto rovinou bude záporný.

Medzi kartézskymi a sférickými súradnicami máme vzťah

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi \cos \theta, \\y &= r \sin \varphi \cos \theta, \\z &= r \sin \theta.\end{aligned}$$

Toto zobrazenie $(r, \varphi, \theta) \mapsto (x, y, z)$ budeme označovať τ . (Pre „matematickú voľbu“ uhla θ bude v tomto vyjadrení $\sin \theta$ namiesto $\cos \theta$ a naopak.)

Keď nás zaujímajú iba body na sfére, vtedy vzdialenosť r je pre všetky body konštantná (polomer sféry) a teda poloha bodu na sfére je jednoznačne určená súradnicami φ, θ . Uhol φ popisuje zemepisnú dĺžku a θ zemepisnú šírku.

POZNÁMKA 2.1. Pre väčšiu presnosť je vhodné Zem aproximovať nie sférou ale rotačných elipsoidom, tzv. **geoidom**, jeho osou rotácie je priamka cez južný a severný pól. Polomer geoidu na rovníku je 6 378 km (najväčší polomer), na pólach 6 357 km (najmenší polomer). S určovaním zemepisnej dĺžky nie je problém. Zemepisná šírka sa určuje ako uhol normály v danom bode a roviny rovníka.

Na rozdiel od kartézskych súradníc, sféricke nemusia byť pre daný bod jednoznačné (viď body na z -osi). Je možné odvodiť aj inverzné zobrazenie τ^{-1} , predpis ale nie je taký jednoduchý ako pre τ .

PRÍKLAD 2.2. Aproximujme Zem sférou. Poloha na tejto sfére je daná zemepisnou dĺžkou $\varphi \in [-180^\circ, 180^\circ)$ a zemepisnou šírkou $\theta \in [-90^\circ, 90^\circ]$. Nech P_1 je poloha na Zemi so súradnicami $\varphi = 30^\circ, \theta = 60^\circ$ a P_2 je poloha so súradnicami $\varphi = -90^\circ, \theta = 45^\circ$. Aká je vzdialenosť týchto dvoch polôh (vzdialenosť po sfére)?

Vidíme, že pre metrické úlohy na sfére sú vzdialenosti bodov a veľkosti uhlov prepojené tesnejšie než v euklidovskej rovine. Toto pozorovanie sa potvrdzuje, aj keď sa snažíme počítať obsah plôch.

TVRDENIE 2.3. Nech A, B, C sú body na sfére neležiace na jednej hlavnej kružnici. Nech v trojuholníku $\triangle ABC$ na sfére α, β a γ označujú veľkosti uhlov (v radiánoch!) pri vrchoch A, B a C v tomto poradí. Potom obsah trojuholníka je

$$S_{\triangle ABC} = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

(Porovnajte s Príkladom 5.8 v Kapitole 3, kde sme počítali veľkosť trihedrálneho uhla.)

Dôkaz. Tri hlavné kružnice, na ktorých ležia strany $\triangle ABC$, rozdeľujú sféru na osem trojuholníkov, z ktorých vždy dva protilahlé sú zhodné. Nech S je obsah $\triangle ABC$. Nech S_a je obsah trojuholníka susediaceho s $\triangle ABC$ pozdĺž strany BC , teda ide o obsah $\triangle(-A)BC$, analogicky označíme S_b a S_c . Vieme teda, že

$$S + S_a + S_b + S_c = 2\pi.$$

Susediace trojuholníky $\triangle ABC$ a $\triangle(-A)BC$ tvoria na sfére mesačík s vrcholmi v protilahlých bodoch A a $(-A)$. Jeho obsah zrátať vieme: k obsahu celého povrchu sféry má ten istý pomer ako uhol α k plnému uhlu 2π :

$$S + S_a = 2\alpha.$$

Podobne

$$S + S_b = 2\beta,$$

$$S + S_c = 2\gamma.$$

Zo všetkých uvedených rovností potom už ľahko odvodíme dokazovaný vzorec. $\square$

3. Mapy

Mapou sféry S^2 rozumieme dvojicu $(\mathcal{A}, f)$, kde $\mathcal{A} \subset S^2$ a $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^2$ je injektívne zobrazenie. Mapa je teda bijekciou medzi $\mathcal{A}$ a $f(\mathcal{A})$, takže existuje aj inverzné zobrazenie $f^{-1} : f(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$. Zvyčajne sa od mapy vyžaduje aj to, aby zobrazenie f aj zobrazenie f^{-1} bolo spojité. Takéto zobrazenie (spojité so spojitým inverzným zobrazením) sa nazýva **homeomorfizmus**. Súbor máp, ktorý pokrýva celú sféru (čiže pre každý bod sféry existuje mapa obsahujúca tento bod vo svojom definičnom obore) sa nazýva **atlas**.

Jednu dôležitú mapu sféry už poznáte, a síce gnómonickú projekciu: za množinu $\mathcal{A}$ si zvolíme južnú polsféru:

$$\mathcal{A} = \{(x, y, z) \in S^2 \mid z < 0\}$$

a robíme stredové premietanie so stredom v $(0, 0, 0)$ tejto množiny do roviny $z + 1 = 0$. Zrejme $f(\mathcal{A} = \mathbb{R}^2)$. Rovnako môžeme premietnuť severnú polsféru do roviny $z - 1 = 0$. Ak ešte pokryjeme mapami aj rovník (budeme premietat polsféry ohraničené protilahlými poludníkmi) do vhodnej dotykovej roviny, dostaneme celý atlas.

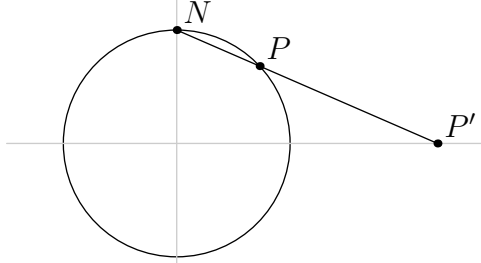
3.1. Stereografická projekcia. Je to veľmi dôležitá projekcia sféry do roviny. Podobne ako pri gnómonickej projekcii ide o stredové premietanie, tentokrát z pevne zvoleného bodu na sfére. Najčastejšie sa za stred premietania volí severný pól N a priemetňou je xy -rovina.

PRÍKLAD 3.1. Pre prvé oboznámenie sa so stereografickou projekciou sféry do roviny (premietame zo severného pólu) si premyslite:

- Kam sa zobrazí južný pól?
- Čo je obrazom rovníka?
- Čo je obrazom južnej polsféry? A čo severnej?
- Čo viete povedať o obraze severného pólu?
- Ako sa zobrazujú poludníky?
- Ako sa zobrazujú rovnobežky?

- Čo sa zobrazuje na priamku neprechádzajúcu začiatkom roviny?

PRÍKLAD 3.2. Odvodíme analytický predpis pre stereografickú projekciu.



Priamka p cez stred premietania $N = (0, 0, 1)$ a bod $P = (a, b, c)$ na sfére má parametrické vyjadrenie

$$\begin{aligned} p: x &= at \\ y &= bt \\ z &= 1 + (c - 1)t \end{aligned}$$

Stereografický priemet bodu P je bod priamky p s nulovou z -súradnicou:

$$P = (a, b, c) \mapsto P' = \left(\frac{a}{1-c}, \frac{b}{1-c}, 0 \right).$$

Tretia (nulová) súradnica priemetu P' sa pri výpočtoch spravidla vynecháva.

Naopak, ak bod $(s, t) \in \mathbb{E}^2$ stotožníme s bodom $(s, t, 0)$, tak podobne ako v predchádzajúcom prípade mu v stereografickej projekcii nájdeme na sfére zodpovedajúci bod

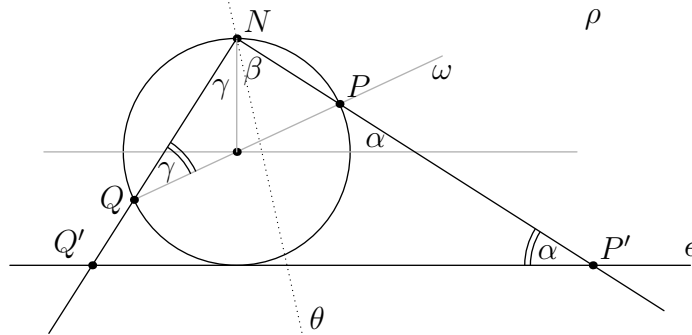
$$(s, t) \mapsto \left(\frac{2s}{s^2 + t^2 + 1}, \frac{2t}{s^2 + t^2 + 1}, \frac{s^2 + t^2 - 1}{s^2 + t^2 + 1} \right).$$

VETA 3.3. V stereografickej projekcii $S^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ je obrazom hlavnej kružnice priamka alebo kružnica.

Dôkaz. (synteticky) Stereografickou projekciou zo severného pólu sa poludníky zobrazia na priamky. Ostatné hlavné kružnice (t.j. geodetické priamky) sa zobrazia na krivky. Potrebujeme overiť, že tieto krivky sú vždy kružnice.

Nech k je hlavná kružnica sféry. Jej premietacím útvarom je kužeľová plocha, ale s výnimkou rovníka nejde o rotačnú kužeľovú plochu. Ak k nie je rovník, tak nech P je bod kružnice k , ktorý zo všetkých bodov kružnice leží najbližšie k stredu premietania N (ktorý je tým zároveň vrcholom kužeľovej plochy), $Q \in k$ je zas najvzdialenejší bod.

Kužeľová plocha (premietací útvar kružnice k) síce nie je rotačná, je ale zrejme súmerná podľa roviny $\rho = \overleftrightarrow{NPQ}$, ktorá je kolmá na rovinu ω kružnice k a prechádza stredom premietania N . Na obrázku je zakreslený prierez situácie touto rovinou súmer-
nosti ρ . Rez kužeľovej plochy každou rovinou rovnobežnou s ω (t.j. rovinou kolmou na rez



Stereografická projekcia hlavnej kružnice ležiacej v rovine ω .

znázornený obrázkom a zvierajúcou s priamkou $\overleftrightarrow{NQ}$ uhol γ) je kružnica. Druhú triedu rezov, ktoré sú kružnicami, dostaneme, keď budeme uvažovať navzájom rovnobežné roviny, ktoré sú tiež kolmé na rovinu ρ a zvierajú uhol γ s priamkou $\overleftrightarrow{NP}$. Overíme, že priemetňa ϵ patrí do tejto druhej triedy.

Pre uhly znázornené na obrázku platí

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= 90^\circ \\ \beta + \gamma &= 90^\circ,\end{aligned}$$

teda $\alpha = \gamma$. Čiže prienik premietacieho kužela kružnice v rovine ω s priemetňou ϵ je tiež kružnica. $\square$

Dôkaz. (analyticky) Hlavná kružnica na jednotkovej sfére pozostáva z bodov (x, y, z) , ktoré sú riešeniami sústavy dvoch rovníc:

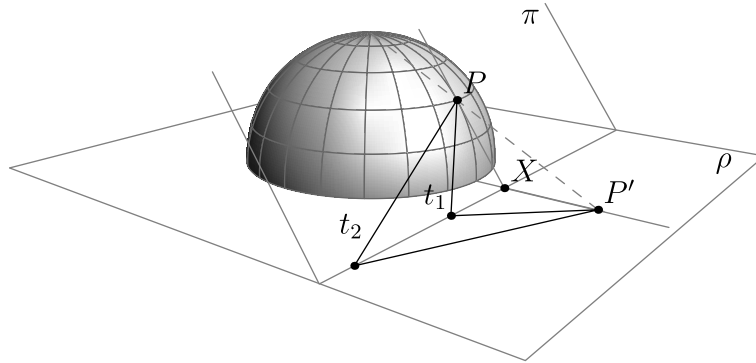
$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\ ax + by + cz &= 0 \quad (a, b, c) \neq (0, 0, 0)\end{aligned}$$

V druhej rovnici budeme predpokladať, že $c \neq 0$, čím z nášho uvažovania vylúčime poludníky (o ktorých vieme, že sa zobrazujú na priamky). Z predpisu pre projekciu $\mathbb{E}^2 \rightarrow S^2$ po dosadení nám prvá rovnica zmizne a druhá sa zmení na rovnicu kružnice so stredom v $(-a/c, -b/c)$ a polomerom $\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}/|c|$. $\square$

Zobrazenie $U \rightarrow V$, kde U, V sú nejaké plochy (nie nutne euklidovské roviny) nazývame **konformným**, ak zachováva veľkosti uhlov.

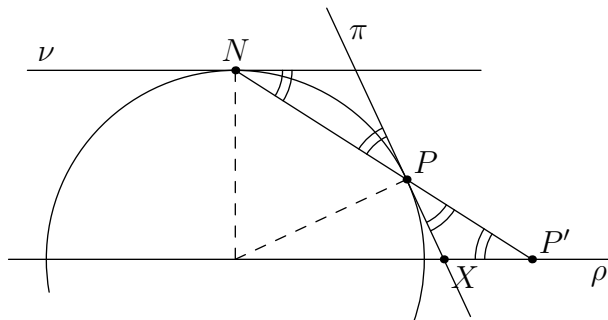
VETA 3.4. *Stereografická projekcia je konformné zobrazenie.*

Dôkaz. Nech sa krivky na sfére stretávajú v bode P pod uhlom α . Každú krivku nahradíme priamkou v $\mathbb{E}^3$, ktorá je pre túto krivku v bode P dotyčnicou. Potrebujeme ukázať, že obrazy týchto priamok budú v obraze bodu P zvierat uhol α .



Nech π je rovina, ktorá sa v bode P sféry dotýka. V tejto rovine ležia aj priamky t_1, t_2 , ktoré sú dotyčnicami daných kriviek v bode P . Tieto priamky sa premietaním z bodu N zobrazia na t'_1 a t'_2 . Ukážeme, že ich uhol je tiež α .

Obrázok zobrazuje rez situácie rovinou cez severný pól N, P a stred sféry, ν je rovina prechádzajúca severným pólom (stredom preietania) a rovnobežná s priemetňou ρ . V reze sú uhly pri vrchole P zhodné, lebo sú navzájom vrcholové. Horný uhol pri vrchole P a uhol pri vrchole N sú zhodné, lebo sú vnútornými uhlami pri základni rovnoramenného



trojuholníka. Uhol pri N a uhol pri P' sú zhodné, lebo sú striedavými pri rovnobežkách ν a ρ . Preto sú uhly pri P' a dolný pri P (t.j. $\angle XPP'$) zhodné, a tak $PX \cong P'X$. Odtiaľ potom už ľahko usúdime, že trojuholníky v dotykovvej rovine π a ich obrazy v priemetni ρ (viď obrázok vyššie) sú zhodné, z čoho vyplýva zhodnosť uvažovaných uhlov. $\square$

3.2. Niektoré vlastnosti máp. Požiadavky na mapu:

- zachovávanie pomerov vzdialeností: pochopiteľne nemusí ísť o izometriu, ale chceli by sme, aby sa všetky vzdialenosti zobrazovali v rovnakej mierke (t.j. aby išlo matematicky o tzv. **podobnosť**.) Bohužiaľ toto nie je možné zaručiť pre mapu ako celok. Môžeme sa snažiť len o čo najlepšiu aproximáciu podobnosti, a aj to len lokálne.
- zachovávanie pomerov obsahov,
- zachovávanie veľkosti uhlov, t.j. požadujeme, aby mapa bola konformným zobrazením. Konformnými zobrazeniami sú zjavne napríklad izometria a podobnosť. Už sme si ukázali, že tú istú vlastnosť má aj stereografická projekcia. Konformné zobrazenia majú vlastnosť, ktorú by sme mohli popísať ako lokálnu podobnosť: lokálne, t.j. v každom bode ide o rovnomerné škálovanie (rovnaké škálovanie vo všetkých smeroch), avšak v každom bode s iným koeficientom.

4. Ďalšie kartografické zobrazenia

„Osúradnicovanie” bodu na sfére sférickými súradnicami už dáva mapu v matematickom vnímaní: bod na sfére (okrem južného a severného pólu) má jednoznačne určené súradnice (φ, θ) . Ide o inverzné zobrazenie k zobrazeniu τ , ktoré sme si explicitne popísali pri zavádzaní sférických súradníc.

Táto mapa však nemá veľmi dobré vlastnosti, preto sa v praxi používajú iné zobrazenia.

V geografii sa pod mapou rozumie zložené zobrazenie $f \circ \tau$, kde τ je nám už známe zobrazenie, ktoré zo sférických súradníc vypočíta kartézske a f je nejaká vhodná projekcia $\mathcal{A}(\subset S^2) \rightarrow \mathbb{R}^2$. Často je jednoduchšie počítať výsledné súradnice priamo zo sférických súradníc a netreba ísť cez kartézske súradnice v $\mathbb{R}^3$. Zobrazenie f môže byť stereografická projekcia (využívaná pre mapovanie polárnych oblastí), gnómonická projekcia (výhodná pre námornú alebo leteckú navigáciu) alebo napríklad niektorá z nasledovných projekcií (existuje ich samozrejme mnoho viac):

4.1. Lambertova cylindrická projekcia. Tzv. **priama** projekcia je projekciou sféry na valcovú plochu, ktorá sa danej sféry dotýka pozdĺž rovníka. Každý bod sféry sa

kolmo zobrazí na najbližší bod valcovej plochy:

$$(\varphi, \theta) \mapsto (\varphi, \sin(\theta)),$$

a valcová plocha sa následne rozvinie do roviny. Poludníky a rovnobežky sa zobrazujú na dve triedy navzájom kolmých priamok. Toto zobrazenie zachováva pomery plôch.

Variácie Lambertovej cylindrickej projekciu zobrazujú sféru na valec, ktorý sa sféry dotýka pozdĺž inej hlavnej kružnice.

4.2. Mercatorova projekcia. Podobne ako pri Lambertovej projekcii zobrazujeme sféru na valcovú plochu, ktorá sa jej dotýka pozdĺž rovníka. Tentokrát sa ale snažíme o konformné zobrazenie. Matematicky ide o zobrazenie

$$(\varphi, \theta) \mapsto (\varphi, V(\theta)),$$

kde funkcia V je zvolené tak, aby išlo o konformné zobrazenie, čo vychádza

$$V(\theta) = \log \left(\tan \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right).$$

Poludníky a rovnobežky sa znovu zobrazujú na dve triedy navzájom kolmých priamok.

Keďže ide o konformné zobrazenie, ľahko sa v týchto mapách hľadajú tzv. **loxodrómy**, čo sú krivky na sfére, ktoré so všetkými rovnobežkami zvierajú rovnaký uhol.

Loxodrómy vo všeobecnosti nie sú ortordómami, napriek tomu sa v navigácii často používajú, lebo sa ľahko vytyčujú. V prípade Mercatorovej projekcie, keďže

- poludníky a rovnobežky sa zobrazujú na dve triedy navzájom kolmých priamok
- ide o konformné zobrazenie,

tak loxodrómy sú na tejto mape priamkami.

4.3. Lambertove konformné projekcie. Modifikácie klasickej Mercatorovej projekcie. Chceme zostrojiť konformné zobrazenie. Ďalej chceme zobrazit poludníky a rovnobežky na jednoduché triedy kriviek. Sféra sa bude zobrazovať na kužeľovú plochu, ktorá sa sféry dotýka pozdĺž niektorej rovnobežky, a tá sa následne rozvinie do roviny. Namiesto osnovy priamok, ktoré v Mercatorovej projekcii reprezentujú rovnobežky, dostaneme triedu sústredných kružníc.

Podobne ako v predchádzajúcich prípadoch nie je nutné za dotykovú krivku zvoliť rovnobežku, ale ľubovoľnú kružnicu na sfére.

Literatúra

- [1] Marcel Berger. **Geometry 2**. Springer-Verlag, 2nd edition, 2009.