

5. DOMÁCA ÚLOHA DO 17.10.

AFINNÉ ZOBRAZENIA

24. Ukážte, že afinné zobrazenie $f: \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$ je injektívne práve vtedy, keď je asociované lineárne zobrazenie $Df: V(\mathbb{A}_1) \rightarrow V(\mathbb{A}_2)$ injektívne.

(Obe implikácie sa dobre ukazujú nepriamo: predpokladajte, že f nie je injektívne, a skúste nájsť nenulový vektor vo $V(\mathbb{A}_1)$, ktorý sa zobrazením Df zobrazí na nulový. Pre druhú implikáciu: ak Df nie je injektívne, skúste nájsť dva rôzne body v \mathbb{A}_1 , ktoré majú v zobrazení f ten istý obraz.)

25. Dané je afinné zobrazenie $f: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x', y', z')$, kde

$$\begin{aligned} x' &= -2x - 2y + z + 1, \\ y' &= 2x + 3y - 3z, \\ z' &= y - z + 4. \end{aligned}$$

Zistite, či je f injektívne.

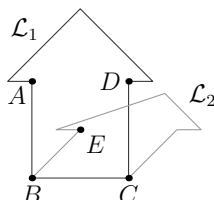
26. (a) Vo vhodnej súradnicovej sústave napíšte analytické vyjadrenie (napr. maticou) afinného zobrazenia $f: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$, ktoré vrcholom trojuholníka ABC priradí stredy protilahlých strán.

(b) V tej istej súradnicovej sústave napíšte vyjadrenie afinného zobrazenia g , ktoré zobrazuje body A, B, C v tomto poradí do bodov A, B, T , kde T je ťažisko $\triangle ABC$.

(c) Určte analytické vyjadrenia zobrazení $f \circ g$, $g \circ f$, f^{-1} a g^{-1} .

27. Vhodne si zvolte súradnicovú sústavu a nájdite analytické vyjadrenie zobrazenia, ktoré lomenú čiaru \mathcal{L}_1 zobrazí na lomenú čiaru \mathcal{L}_2 (viď obrázok: body A, B, C, D sú vrcholmi štvorca a bod E je jeho stredom, ide o uzavreté lomené čiary: úsečka BC je spoločná pre obe. Obidve lomené čiary sa nachádzajú v spoločnej rovine $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$).

Kolko takých zobrazení existuje?



28. Zapíšte analyticky (napríklad maticou) otočenie v \mathbb{E}^2 okolo začiatku súradnicovej sústavy, ktoré bod so súradnicami $(5, 0)$ otočí do bodu so súradnicami $(4, 3)$ (teda body $(5, 0)$, $(0, 0)$ a $(4, 3)$ určujú uhol otočenia).

(Môžte predpokladať, že otočenie je afinné zobrazenie a pomôcť si dokázaným tvrdením, že afinné zobrazenie je dané obrazmi troch nekolineárnych bodov.)

29. Zapíšte analyticky otočenie v \mathbb{E}^2 o uhol φ okolo začiatku súradnicovej sústavy.

30. Zapíšte analyticky otočenie v \mathbb{E}^2 okolo bodu $S = (s_1, s_2)$. Uhol otočenia si zvolte podľa vlastných preferencií buď všeobecne φ (ako v úlohe 29) alebo konkrétne uhol z úlohy 28.