6. Domáca úloha do 24.10.

Analytická geometria, rôzne

31. Dané sú vrcholy $A = (1,3,5), B = (-1,2,1)$ trojuholníka ABC a jeho ťažisko $T = (1,0,1)$. Nájdite vrchola C.

Zmena súradnicovej sústavy

32. Nech body

$$P = (2,-1), \quad Q = (1,1), \quad R = (0,-2)$$

majú v novej súradnicovej sústave súradnice

$$P = (0,0), \quad Q = (1,0), \quad R = (2,5).$$

Nájdite túto súradnicovú sústavu (čiže súradnice bodu O' a vektorov $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$ v pôvodnej súradnicovej sústave)!

Orientácia afinného priestoru

Cieľom nasledujúcich cvičení je presvedčiť sa, že orientácia súradnicových sústav v reálnej rovine, ako sme si ju definovali pomocou signatúry determinantu matice prechodu od jednej sústavy k druhej, naozaj popisuje naše intuitívne vnímanie orientácie: ak štandardnú sústavu (x-os doprava, y-os nahor) nazveme kladne orientovanou, tak potom je kladne orientovaná každá súradnicová sústava, v ktorej sa z kladného smeru x-osi na kladný smer y-osi dostaneme otočením o menej ako π proti smeru hodinových ručičiek.

33. Overte, že ak v $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ zvolíme nový začiatok súradnicovej sústavy (t.j. $O' = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$) a jednotkové vektory necháme nezmenené (t.j. $\mathbf{e}'_i = \mathbf{e}_i$, pre $i = 1, 2, \ldots, n$), bude mať nová súradnicová sústava rovnakú (=súhlasnú) orientáciu ako stará.

34. Overte, že ak v súradnicovej sústave v $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ iba prenásobíme bázové vektory kladným číslom, (t.j. $O' = O$, $\mathbf{e}'_i = c_i\mathbf{e}_i$, kde $c_i \in \mathbb{R}$, $c_i > 0$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$), bude nová súradnicová sústava súhlasne orientovaná so starou.

35. Overte, že ak v reálnej rovine $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ zvolíme novú súradnicovú sústavu tak, že otočíme starú okolo začiatku (t.j. $O' = O$, $\mathbf{e}'_1 = \rho(\mathbf{e}_1)$ a $\mathbf{e}'_1 = \rho(\mathbf{e}_1)$, kde $\rho\colon\ \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ je otočenie okolo začiatku súradnicovej sústavy, viď zadanie 29), bude mať nová súradnicová sústava rovnakú orientáciu ako stará.

Vektorový súčin

36. V priestore $V^3(\mathbb{R})$ $(= \mathbb{R}^3)$ dokážte:

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} :\ \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$$

(tzv. Lagrangeova identita).

37. V reálnej rovine máme body

$$P = (1,2), \quad Q = (2,1), \quad R = (4,3).$$

Nájdite vzdialenosť bodu R od priamky $\overleftrightarrow{PQ}$ (t.j. výšku na stranu PQ v $\triangle PQR$).