7. Domáca úloha do 7.11.

Afinná a konvexná kombinácia bodov

38. Nech $A, B \in \mathbb{A}$, $A \neq B$,

$$\overleftrightarrow{AB} = \{A + t(B - A) \mid \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Akej hodnote parametra t zodpovedá bod A? Bod B? Stred úsečky AB?

39. Nech $A, B \in \mathbb{E}^2$, $A \neq B$ a

$$\overleftrightarrow{AB} = \{(1 - t)A + tB \mid \forall t \in \mathbb{R}\} = \{A + t(B - A) \mid \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Ako by ste pomocou parametra t charakterizovali úsečku AB? A ako polpriamku $\overrightarrow{AB}$?

Ak v afinnej kombinácii bodov

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_n P_n \qquad \sum \lambda_i = 1$$

navyše platí $\lambda_i \geq 0$ $\forall i$, hovoríme o tzv. *konvexnej kombinácii bodov.*

40. Pracujme v $\mathbb{E}^2$.

- Nech $A = (0, 0)$, $B = (5, 1)$, $C = (1, 2)$. Nájdite všetky konvexné kombinácie bodov A, B, C. (Bude ich, prirodzene, nekonečne veľa, skúste ich množinu načtnúť.)
- To isté pre päticu bodov $P = (0, 0), R = (1, 0), S = (0, 1), T = (-2, -2), U = (2, 3)$.
- Vyslovte hypotézu o množine všetkých konvexných kombinácií konečného počtu bodov.

Vzdialenosť dvoch bodov

41. Overte, že body

$$A_0 = (0, 0, 0),\ A_1 = (0, 1, 1),\ A_2 = (1, 0, 1),\ A_3 = (1, 1, 0)$$

sú vrcholmi pravidelného štvorstena.

42. Nech $A, B \in \mathbb{E}^2$, $A = (4, 0)$, $B = (1, 0)$. Nájdite množinu bodov X takých, že $|AX| = 2|BX|$.

*** 43.** V reálnom afinnom priestore $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ sa dajú okrem štandardnej euklidovskej definovať i iné, menej štandardné metriky:

- Manhattanská (taxikárska) metrika: koľko najmenej musí taxikár najazdiť, aby sa v Manhattane dostal z bodu A do bodu B:

$$d_M(A, B) = |b_1 - a_1| + |b_2 - a_2| + \cdots + |b_n - a_n|.$$

- Čebyševova (šachovnicová, maximová) metrika: koľko najmenej krokov musí šachový kráľ urobiť na šachovnici, aby sa dostal z bodu A do bodu B:

$$d_C(A, B) = \max\{|b_1 - a_1|, |b_2 - a_2|, \ldots, |b_n - a_n|\}.$$

- diskrétna metrika:

$$d_D(A, B) = 0 \quad \text{pre} \quad A = B$$
$$d_D(A, B) = 1 \quad \text{pre} \quad A \neq B$$

(a) Aká je vzdialenosť bodov $A = (5, -3)$ a $B = (2, 1)$ v štandardnej, manhattanskej, Čebyševovej a diskrétnej metrike?

(b) Ako vyzerá v týchto metrikách jednotková kružnica (t.j. množina bodov, ktorých vzdialenosť od začiatku súradnicovej sústavy je 1)?