10. Úlohy na 1.12.

Podpriestory afinného priestoru

61. Nájdite parametrické vyjadrenie a všeobecné rovnice priamky, ktorá prechádza bodom $M = (1, 2, 3)$ a pretína priamky

$$p\colon\ x = 2t,\ y = -1 - 2t,\ z = 2 + t,$$
$$q\colon\ x = 4t,\ y = -2,\ z = 3t.$$

(Môžte napríklad najprv nájsť rovinu, ktorá obsahuje priamku p a prechádza bodom M, a následne nájsť jej prienik s priamkou q.)

62. Sú dané priamky:

$$p\colon\ x = 3 + t,\ y = -1 + 2t,\ z = 4t,$$
$$q\colon\ x = -2 + 3t,\ y = -1,\ z = 4 - t,$$
$$r\colon\ x - 3y + z = 0,\ x + y - z + 4 = 0.$$

Určte parametrické vyjadrenie priamky, ktorá pretína prvé dve a je rovnobežná s treťou priamkou.

(Podobne ako v predchádzajúcom príklade môžte najprv nájsť rovinu, ktorá obsahuje priamku p a smer priamky r, a následne nájsť jej prienik s priamkou q.)

63. Nájdite parametrické vyjadrenie a všeobecné rovnice priamky určenej bodmi $B = (5, -1, 3, 2)$, $C = (6, -1, 5, 5)$.

64. Nájdite parametrické vyjadrenie podpriestoru v $\mathbb{E}^5$, ktorého všeobecné rovnice sú

$$\begin{aligned} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 - 3 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 - 6 &= 0. \end{aligned}$$

65. Vyšetrite vzájomnú polohu priamok v $\mathbb{E}^3$:

$$p : x - 2z = 7,\ y = 2$$
$$q : x + z = -1,\ 2x + y = 1.$$

66. Určte vzájomnú polohu rovín α, β z $\mathbb{E}^3$, kde

$$\alpha\colon\ 2x + 3y + 4z - 12 = 0$$
$$\beta\colon\ 3x - 6y + 1 = 0.$$

67. Vyšetrite vzájomnú polohu priamky p a roviny α v $\mathbb{E}^3$, ak

$$p\colon\ x = 12 + 4t,\ y = 9 + 3t,\ z = 1 + t;$$
$$\alpha\colon\ 3x + 5y - z - 2 = 0.$$

68. Nájdite príklad troch priamok v $\mathbb{E}^3$ tak, aby ľubovoľné dve z nich boli mimobežné.

*** 69.**

(a) V $\mathbb{E}^4$ nájdite príklad dvoch rovín, ktoré sa pretínajú v jedinom bode.
(b) V $\mathbb{E}^4$ nájdite príklad mimobežnej priamky a roviny.
(c) Nájdite príklad dvoch mimobežných rovín v $\mathbb{E}^5$.

*** 70.** V $\mathbb{E}^4$ sú dané body $P_0 = (1,1,2,2)$, $P_1 = (0,1,0,1)$, $P_2 = (1,2,0,3)$ a $Q = (0,2,-4,2)$, $R = (-1,2,-4,1)$.

(a) Zistite, či platí $Q \in \langle P_0, P_1, P_2 \rangle$, $R \in \langle P_0, P_1, P_2 \rangle$.
(b) Vypočítajte dimenzie afinných podpriestorov $\langle P_0, P_1, P_2 \rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, Q \rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, R \rangle$.
(c) Vypočítajte dimenziu afinného podpriestoru $\langle P_0, P_1, P_2 \rangle \cap \langle Q, R \rangle$.
(d) Vypočítajte dimenziu afinného podpriestoru $\langle P_0, P_1 \rangle \cap \langle Q, R \rangle$, a zistite vzájomnú polohu $\langle P_0, P_1 \rangle$ a $\langle Q, R \rangle$.

Kužeľosečky v $\mathbb{E}^2$

71. Nájdite implicitnú (všeobecnú) rovnicu pre hyperbolu s ohniskami $F_1 = (-e, 0)$, $F_2 = (e, 0)$ a dĺžkou hlavnej poloosi a. Pre a platí, že $0 < a < e$ a hyperbola je množina bodov bodov $X \in \mathbb{E}^2$ takých, že

$$||FX_1| - |FX_2|| = 2a.$$

Teda napríklad body $V_1 = (-a, 0)$ a $V_2 = (a, 0)$ (tzv. vrcholy hyperboly) ležia na hyperbole. Výslednú rovnicu zapíšte pomocou a a b, kde $a^2 + b^2 = e^2$ (pozor, vzťah je odlišný od toho pre elipsu).

72. Zistite, akú kužeľosečku popisuje táto rovnica:

$$x^2 - 4y^2 - 6x - 8y + 9 = 0.$$

Skúste ju aj zhruba načrtnúť (t.j. nestačí len prehlásiť „je to pababola/elipsa/...").

73. (Ide o zovšeobecnenie predchádzajúcej úlohy.) Aké podmienky musia spĺňať koeficienty $a_{20}, a_{02}, a_{10}, a_{01}, a_{00}$, aby bola rovnicou

$$a_{20}x^2 + a_{02}y^2 + a_{10}x + a_{01}y + a_{00} = 0$$

popísaná

(a) elipsa,
(b) hyperbola,
(c) parabola?